



SŁAWOMIR KARAS

Politechnika Lubelska  
s.karas@pollub.pl

## O metodzie Courbona

W czasopiśmie „Mosty” (nr 4 z 2010 r.) ukazał się artykuł dra inż. Janusza Hołowatego „Uproszczone metody rozdziału poprzecznego obciążeń w mostach drogowych” [3]. To profesjonalne i eleganckie opracowanie, wsparte solidnymi pracami

podstawowymi zawartymi w zamieszczonej bibliografii, świadczy o racjonalności postępowania polegającego na umiejętnym stosowaniu metod uproszczonych, a nawet prostych, w sposób przemyślany. Obecnie, z różnych przyczyn sięgamy po relatywnie złożone procedury numeryczne tylko z tej racji, że mamy do nich łatwy dostęp, podczas gdy zdarza się niejednokrotnie, że zadanie nawet złożone daje się dostatecznie dobrze opisać przysłowiowym  $qL^2/8$ . Niestety, ale autor niniejszego tekstu kilkakrotnie to stwierdzał po około miesięcznym procesie obliczeń numerycznych.

Nie będzie jednak tak, że przewagę wezmą metody uproszczone w miejsce precyzyjniejszych metod związanych z MES i jej pochodnymi, ale zawsze istnieje alternatywa przeprowadzenia niezależnego szybkiego sprawdzenia dokładnych obliczeń w ten sposób, by ustrzec się tzw. grubych błędów.

Spośród omówionych w artykule metod jedna będzie przedmiotem rozważań. Jest to metoda Jeana Courbona nazywana w Polsce metodą sztywnej poprzeczniczy [1]. Metoda ta, w swej podstawowej wersji, może być śmiało zaliczona do metod prostych, i tak jak każde skuteczne uproszczenie – zawiera w sobie cząstkę genialną. W tym przypadku jest to możliwość myślowego wyizolowania dźwigara (na ogół teowego) z całości ustroju nośnego. Wyizolowanie oznacza tu geometryczne wyodrębnienie wraz z przypadającymi na ten dźwigar obciążeniami. Obliczanie belki swobodnie podpartej zamiast ustroju nośnego modelowanego płytą czy rusztem jest ulubionym zadaniem każdego inżyniera budownictwa. Takie wyprowadzenie będzie tu przedstawione i będzie nie tyle uzupełnieniem artykułu dra J. Hołowatego, a raczej rezultatem zainspirowania artykułem – do przedstawienia poniższego uszczegółowienia.

Zaletą metody jest to, że może być przedstawiona jako proste, jednakże kompletne w sensie metodyki zadanie mechaniki, co ma dodatkowy wymiar zastosowania składowych teorii sprężystości. Postąpimy następująco:

- wprowadzimy założenia, łącznie z założeniem najsilniejszym – założeniem Courbona,
- w konsekwencji rozpatrzmy postać deformacji wyznaczonej przez konfigurację – początkową i aktualną, która może być rozłożona na składowe: symetryczną i antysymetryczną,

- w następnym kroku, korzystając ze związku konstytutywnego, wykorzystamy warunki równowagi zagadnienia,
- warunki równowagi nie tworzą jednak dostatecznej liczby związków do wyznaczenia wszystkich niewiadomych, w tej sytuacji włączymy do rozważań dodatkowe warunki zgodności deformacji wynikające z założenia Courbona,
- po analizie symetrii otrzymanego związku wnioskować będziemy o tym, że jest to linia wpływu.

### Metoda Courbona – wariant uproszczony

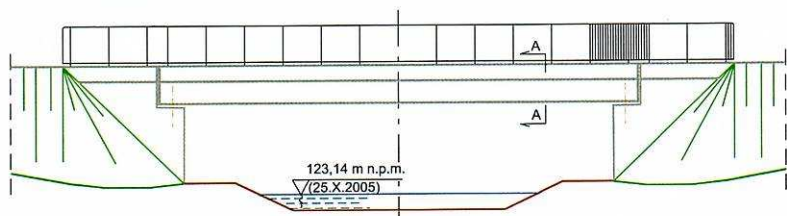
Wariant uproszczony to wariant, w którym wprowadzane jest założenie o symetrii konstrukcji w przekroju poprzecznym i założeniu o jednakowych sztywnościach na zginanie belek ustroju nośnego. W dalszej części nastąpi odejście od tych założeń.

W celu wyprowadzenia podstawowych związków założymy, że analizujemy dowolnie wybrany przekrój poprzeczny A-A ustroju nośnego mostu z rysunku 1, który w aksonometrii pokazano na rysunku 2.

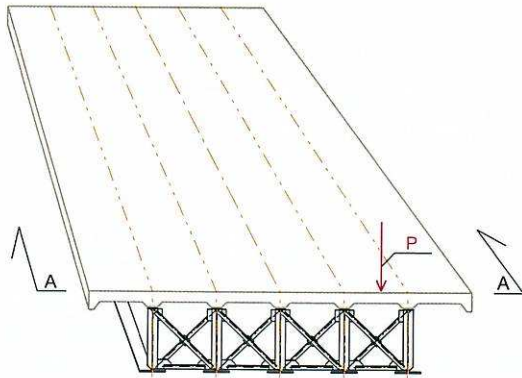
Na rysunku 2 wyraźnie zaznaczono sztywną poprzecznice oraz występującą w przekroju A-A siłę skupioną  $P$ .

Wprowadzmy następujące założenia:

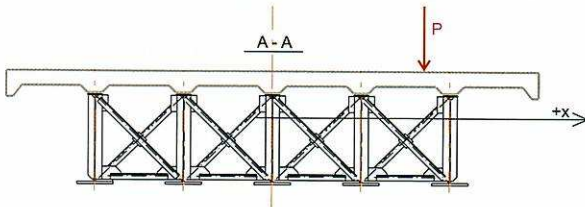
- 1) przekrój poprzeczny ustroju nośnego ma pionową oś symetrii (rys. 3); pozioma oś konstrukcji jest główną osią bezwładności; sztywności na zginanie dźwigarów są jednakowe,
- 2) zagadnienie jest statyczne i płaskie, liniowo-sprężyste według prawa Hooke'a, przy słuszności zasady zeszywnienia (konfiguracja aktualna jest zbieżna z konfiguracją początkową); liniowość pozwala na zastosowanie zasady superpozycji,
- 3) w analizowanym przekroju poprzecznym ustroju nośnego mostu jest **nieskończenie sztywna poprzecznicza – założenie Courbona**,
- 4) przemieszczenia przekroju poprzecznego są ograniczane reakcjami pochodzącymi od oporów dźwigarów na zginanie i w konsekwencji możemy przyjąć, że w przekroju poprzecznym w miejscach dźwigarów są podatne podparcia sprężyste typu Winklera (rys. 4), przy czym w przypadku dowolnego  $n$ -tego dźwigara jest słuszna relacja konstytutywna:



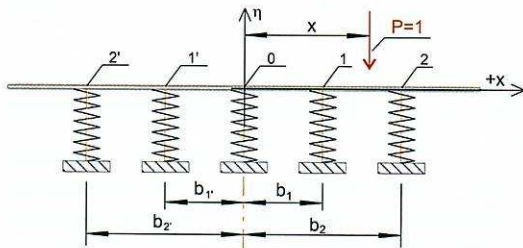
Rys. 1. Rozpatrywany przekrój poprzeczny A-A mostu belkowego



Rys. 2. Przekrój A-A w aksonometrii



Rys. 3. Symetryczny przekrój poprzeczny



Rys. 4. Model płaski przekroju poprzecznego ustroju nośnego mostu, konfiguracja początkowa

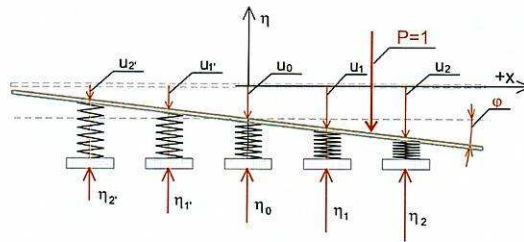
$$\vec{\eta}_{(n)} \sim \vec{u}_{(n)}; \quad (1)$$

przy czym przez  $\vec{\eta}_{(n)}$  i  $\vec{u}_{(n)}$  – oznaczono odpowiednio oddziaływanie (wektor reakcji)  $n$ -tego dźwigara w ustroju pomostu oraz wektor przemieszczenia w miejscu tego dźwigara (rys. 3 i 4).

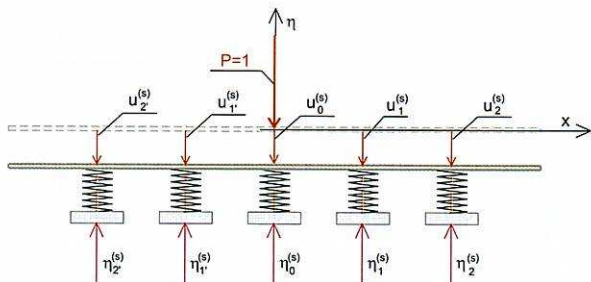
Po statycznym przyłożeniu obciążenia, przy istnieniu w przekroju nieskończenie sztywnej poprzecznicy, nastąpi deformacja ustroju w sposób pokazany na rysunku 5.

Na podstawie założenia 2) możemy dokonać dekompozycji deformacji z rysunku 5 na addytywne stany – symetryczny (rys. 6) oraz antysymetryczny (rys. 7). Na obu rysunkach składniki: symetryczny oraz antysymetryczny odniesiono do konfiguracji początkowej przekroju zaznaczonej symbolicznie linią przerywaną.

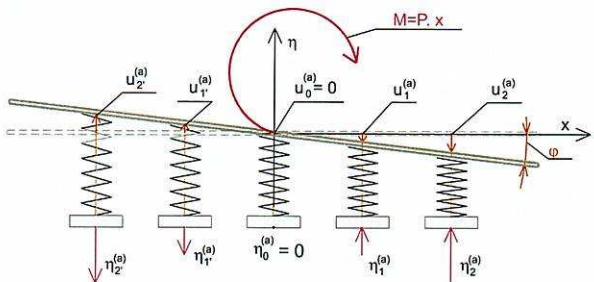
Na rysunkach mamy 5 dźwigarów symbolizujących w ogólności dowolną ich liczbę, którą oznaczymy przez  $k$ .



Rys. 5. Konfiguracja aktualna – po obciążeniu



Rys. 6. Symetryczna część deformacji



Rys. 7. Antysymetryczny składnik deformacji

Przy słuszności zasady superpozycji, możemy teraz opisać płaskie stany równowagi niezależnie w obu przypadkach, tj. symetrii i antysymetrii.

### Stan symetryczny

Przy słuszności założeń 1) i 4) przekrój poprzeczny ustroju przesunie się równomiernie (translacja), jako bryła sztywna o wektor  $\vec{u}^{(s)}$ , co spowoduje zgodnie z (1) równe reakcje we wszystkich umownych podporach sprężystych  $|\vec{\eta}^{(s)}| = \eta^{(s)}$ . Do analizy stanu równowagi wykorzystamy wariant równań równowagi, na który składają się sumy rzutów na kierunku pionowy i poziomy oraz sumę momentów względem dowolnego punktu płaszczyzny. Mamy zatem:

$$\begin{cases} \sum V = 0 \rightarrow \eta^{(s)} = \frac{P}{k}, \\ \sum H = 0, \\ \sum M_0 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

## Stan antysymetryczny

Na skutek przyjętego założenia o nieskończenie sztywnej poprzecznicy nastąpi teraz obrót (rotacja) przekroju poprzecznego ustroju nośnego, jako bryły sztywnej o kąt  $\varphi$ , a środkiem obrotu jest punkt pomostu na osi pionowej symetrii. W rezultacie założenia 1) otrzymamy w równaniu równowagi sumy momentów względem punktu 0 podwojoną sumę momentów składowych od odpowiednio antysymetrycznych reakcji, których zwroty wektorów pokazano na rysunku 7. Stan równowagi jest opisany następująco:

$$\begin{cases} \sum V = 0, \\ \sum H = 0, \\ \sum M_0 = 0 \end{cases} \rightarrow 2(\eta_2^{(a)} b_2 + \eta_1^{(a)} b_1) = P x. \quad (3)$$

Istotny, jeden warunek w równaniach (3) zawiera dwie niewiadome (w przypadku ogólnym mamy:  $\text{Int}(k/2) = [k/2]$  niewiadomych). Należy zatem sformułować dodatkową relację, która pozwoli otrzymać rozwiązanie. W tym celu ponownie posłużymy się założeniem Courbona, traktując je tym razem jako *warunek zgodności deformacji* wyrażony w rozpatrywanym przypadku twierdzeniem Talesa w postaci:

$$\text{tg } \varphi = \frac{|\bar{u}_2^{(a)}|}{b_2} = \frac{|\bar{u}_1^{(a)}|}{b_1} \xrightarrow{(1)} \frac{\eta_2^{(a)}}{b_2} = \frac{\eta_1^{(a)}}{b_1}. \quad (4)$$

Analizując konfigurację aktualną pokazaną na rysunku 5 stwierdzamy, że maksymalne obciążenie przypada na dźwigar skrajny oznaczony numerem 2. Dlatego układ równań (3), rozwiążemy wyznaczając wartość reakcji  $\eta_1^{(a)} = f(\eta_2^{(a)}) = \eta_2^{(a)} b_1 / b_2$ :

$$\eta_2^{(a)} = \frac{P x b_2}{2[(b_1)^2 + (b_2)^2]}, \quad (5)$$

którą możemy uogólnić na przypadek  $k$  dźwigarów w przekroju poprzecznym pomostu przez związek:

$$\eta_s^{(a)} = \frac{P x b_s}{2 \sum_{m=1,2,\dots}^{[k/2]} (b_m)^2}, \quad (6)$$

przy czym indeks  $s$  jest numerem dźwigara skrajnego.

Po analogicznych elementarnych przekształceniach możemy znaleźć wartości reakcji w dowolnie wybranym  $n$ -tym dźwigarze poprzez relację:

$$\eta_n^{(a)} = \frac{P x b_n}{2 \sum_{m=1,2,\dots}^{[k/2]} (b_m)^2}. \quad (6.1)$$

Korzystając teraz z zasady superpozycji możemy wyznaczyć sumaryczną reakcję w dowolnym dźwigarze, ale z powodu maksymalnych wytyżeń w dźwigarze skrajnym rozpatrzmy właśnie jego reakcję. Jeśli dodatkowo przyjmiemy  $P=1$ , to uzyskamy następującą zależność liniową:

$$\eta_s = \eta_s^{(s)} + \eta_s^{(a)} = \frac{1}{k} + \frac{x b_s}{2 \sum_{m=1,2,\dots}^{[k/2]} (b_m)^2} = a_0 + x a_1 = \eta_s(x), \quad (7)$$

$$\text{w której } a_1 = \text{tg } \varphi = b_s \left\{ 2 \sum_{m=1,2,\dots}^{[k/2]} (b_m)^2 \right\}^{-1} \quad (7.1)$$

przy czym argument  $x$  jest odcięta lokalizującą położenie siły  $P=1$  (7.1) w przekroju poprzecznym.

Przepiszmy teraz wyrażenie (7) stosując uogólnienie uwzględniające wybór dowolnego dźwigara spośród tych znajdujących się w przekroju poprzecznym mostu. Dodatkowo wprowadźmy następane uogólnienie: dopuśćmy na zasadzie abstrakcji, że lokalizacja położenia dźwigara przestaje być dyskretna i staje się dziedziną ciągłą, co wyrażamy przez wprowadzenie argumentu  $\xi$  w miejsce  $b_n$ :

$$b_n \rightarrow \xi. \quad (8)$$

Otrzymujemy wówczas:

$$\eta = \frac{1}{k} + \frac{x \xi}{2 \sum_{m=1,2,\dots}^{[k/2]} (b_m)^2} = a_0 + x \cdot \xi \cdot A_1 = \eta(x, \xi) = \eta(y, \xi), \quad (9)$$

przy czym

$$A_1 = \left\{ 2 \sum_{m=1,2,\dots}^{[k/2]} (b_m)^2 \right\}^{-1}. \quad (9.1)$$

Jeśli przyjmiemy teraz, że wartości reakcji  $\eta$  od przemieszczającej się w przekroju siły jednostkowej będziemy odkładali jako rzędne w miejscach zajmowanych chwilowo przez tę siłę oraz uwzględnimy widoczną w relacji (9) biliniowość funkcji  $\eta$  względem jej dwóch argumentów  $x, \xi$ , przy jednoczesnej symetrii względem tych argumentów to możemy stwierdzić, że  $\eta(x, \xi)$  jest: **linią wpływu siły  $P(x) = 1$  na reakcję pola materiałowego w przekroju poprzecznym (np. dźwigara) zlokalizowanym odcięta  $\xi$ . Tę wielkość mechaniczną nazywamy *linią wpływu rozdziału poprzecznego obciążenia w przekroju poprzecznym mostu*.**

Powróćmy teraz do wyrażenia (7), które wyznacza linię wpływu rozdziału poprzecznego obciążenia dźwigara skrajnego. Aby ją wyznaczyć wystarczy znać jej dwie rzędne. Niech będą to przypadki:

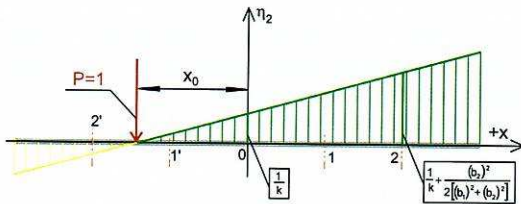
– gdy siła  $P=1$  jest w punkcie 0:

$$x = 0 \rightarrow \eta_s(0) = \eta_s^{(s)} = \frac{1}{k} \quad (10.1)$$

– oraz gdy  $P=1$  jest w miejscu odciętej dźwigara skrajnego:

$$x = b_s \rightarrow \eta_s(b_s) = \frac{1}{k} + \frac{(b_s)^2}{2 \sum_{m=1,2,\dots}^{[k/2]} (b_m)^2}. \quad (10.2)$$

Wyznaczymy jeszcze położenie siły jednostkowej, przy której wartość reakcji w dźwigarze skrajnym jest zerowa, tym samym wyznaczymy zakresy tzw. dodatniej i ujemnej gałęzi linii wpływu. Ich znajomość umożliwi zastosowanie redukcji



Rys. 8. Linia wpływu reakcji  $\eta_{s=2}(x)$

i przecięcia wynikających z wartości współczynników stanu granicznego nośności (SGN) odpowiednio w przypadkach obciążeń i dociążeń przy poszukiwaniu reakcji dźwigara na obciążenie.

Odciętą  $x_0$  wyznaczmy uwzględniając relację:

$$\eta_s(x_0) = 0. \quad (11.1)$$

Stąd otrzymujemy:

$$x_0 = - \frac{2 \sum_{m=1,2,\dots}^{[k/2]} (b_m)^2}{k b_s}. \quad (11.2)$$

Przez dodatnią gałąź linii wpływu rozumiemy odcinek dziedziny, na którym rzędne są dodatnie. W trakcie poszukiwania maksymalnej wartości obliczeniowej  $\eta_s^{(d) \max}$  na dodatniej gałęzi linii wpływu – obciążenia mnożymy przez częściowe współczynniki bezpieczeństwa  $\gamma_{f \max}$ , podczas gdy w obszarze ujemnej gałęzi stosujemy mnożniki  $\gamma_{f \min}$ . Przy wyznaczaniu  $\eta_s^{(d) \min}$  postępujemy odwrotnie.

Stosowana dotychczas nazwa „reakcja dźwigara” może być zastąpiona inną nazwą, bardziej adekwatną do zastosowań  $\eta_s$ , a mianowicie można mówić o udziale dźwigara w przenoszeniu obciążeń występujących w przekroju poprzecznym, a to jest równoważne interpretacji o wyznaczaniu obciążeń przypadających na wybrany dźwigar. W tym momencie dokonujemy myślowego wyizolowania pojedynczego dźwigara z ustroju nośnego mostu, co było zamysłem całej metody.

## Metoda Courbona – wariant ogólny

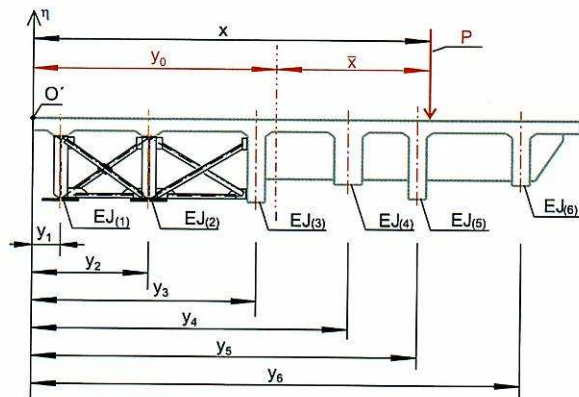
Rozpatrzmy teraz, na podstawie wcześniejszej analizy, wariant uwzględniający niesymetrię dystrybucji materiału i jego gęstości w przekroju poprzecznym. Symbolicznie taki stan przedstawiono na rysunku 9, gdzie rozstawy dźwigarów są nieregularne, a sztywności dźwigarów różne. W opisie zastosowano uproszczenie, które należy rozumieć następująco:  $E_{(m)} J_{(m)} \rightarrow EJ_{(m)}$ .

Zmienimy teraz założenia 1) i 4) przyjmując w ich miejsce następujące odpowiedniki:

1') przekrój poprzeczny ustroju nośnego nie ma geometrycznej pionowej osi symetrii, a rozstawy dźwigarów są różne; dodatkowo sztywności na zginanie poszczególnych dźwigarów są też różne;

4') przemieszczenie  $n$ -tego dźwigara jest proporcjonalne do oddziaływania poprzecznic na dźwigar i odwrotnie proporcjonalne do jego sztywności na zginanie  $EJ_{(n)}$ :

$$\bar{u}_{(n)} \sim \frac{\bar{\eta}_{(n)}}{EJ_{(n)}}. \quad (1')$$



Rys. 9. Fikcyjny przekrój poprzeczny ustroju nośnego obrazujący zmienność sztywności na zginanie dźwigarów oraz ich nieregularne rozstawy

Przyjmujemy też postać założenia Courbona uwzględniającą analizowane wcześniej stany symetrii i antysymetrii:

$$\eta_{(n)} = EJ_{(n)} (c_0 + c_1 y_{(n)}), \quad (12)$$

przy czym  $y_{(n)}$  jest odciętą  $n$ -tego dźwigara względem dowolnie przyjętego początku odciętej; na rysunku 9 jest to lewy skraj w przekroju poprzecznym ustroju nośnego oznaczony przez  $O'$ .

Uwzględniając (12), z równań równowagi otrzymujemy:

$$\begin{cases} \sum V = 0 \rightarrow P = c_0 \sum_m^k EJ_{(m)} + c_1 \sum_m^k y_{(m)} EJ_{(m)}, \\ \sum H \equiv 0, \\ \sum M_0 = 0 \rightarrow Px = c_0 \sum_m^k y_{(m)} EJ_{(m)} + c_1 \sum_m^k (y_{(m)})^2 EJ_{(m)}. \end{cases} \quad (13)$$

Przedstawimy powstały układ równań w notacji macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \sum_m^k EJ_{(m)} & \sum_m^k y_{(m)} EJ_{(m)} \\ \sum_m^k y_{(m)} EJ_{(m)} & \sum_m^k (y_{(m)})^2 EJ_{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}. \quad (13.1)$$

Możemy uprościć (13.1) przez zmianę układu odniesienia w ten sposób, by macierz współczynników miała postać diagonalną. Warunkowi

$$\sum_m^k y_{(m)} EJ_{(m)} = 0 \quad (14)$$

odpowiada wyznaczenie odciętej środka sztywności dźwigarów

$$y_0 = \frac{\sum_m^k y_{(m)} EJ_{(m)}}{\sum_m^k EJ_{(m)}} \quad (15)$$

oraz transformacja odciętych

$$\bar{y}_{(m)} = y_{(m)} - y_0, \quad \bar{x} = x - y_0. \quad (16)$$

Wówczas:

$$\eta_{(n)} = EJ_{(n)} (\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 \bar{y}_{(n)}), \quad (12')$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \end{bmatrix} = \frac{P}{\sum_m^k EJ_{(m)} \cdot \sum_m^k (\bar{y}_{(m)})^2 EJ_{(m)}} \begin{bmatrix} \sum_m^k (\bar{y}_{(m)})^2 EJ_{(m)} & 0 \\ 0 & \sum_m^k EJ_{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

lub po wymnożeniu:

$$\tilde{c}_0 = \frac{P}{\sum_m^k EJ_{(m)}}, \quad \tilde{c}_1 = \frac{P \bar{x}}{\sum_m^k (\bar{y}_{(m)})^2 EJ_{(m)}}. \quad (18)$$

Na podstawie (12) i (17) otrzymujemy wartości reakcji  $n$ -tego dźwigara na poprzecznicy:

$$\eta_{(n)} = EJ_{(n)} P \left( \frac{1}{\sum_m^k EJ_{(m)}} + \frac{\bar{x} \bar{y}_{(n)}}{\sum_m^k (\bar{y}_{(m)})^2 EJ_{(m)}} \right). \quad (19)$$

Wzór (19) przy założeniach 1) i 4), tj. gdy  $\sum_m^k EJ_{(m)} = EJ$  oraz  $y_0 = 0$  prowadzi do związku (7).

## Zakończenie

Przedstawiono tu metodę Courbona od strony analitycznej. W sensie praktycznym metoda wydaje się być na pozór archaiczna, jednakże nic nie stoi na przeszkodzie aby i dziś stosować w projektowaniu powyższe wzory. Na pewno są one właściwe w przypadku tradycyjnych typowych niewiel-

kich mostów. Błąd metody w odniesieniu do metod bardziej precyzyjnych jest znany. Można powiedzieć, że przy proporcji szerokości ustroju do jego rozpiętości  $B/L_i \leq 0,5$  otrzymamy dobre rezultaty. Istnieje wiele miar, jedną z nich [5] jest wartość wyznaczana ze wzoru:

$$\alpha = \frac{b^3}{6EJ'\Delta_g} \quad (20)$$

w którym:  $b$  – rozstaw dźwigarów,  $EJ' = EJ/a$  – sztywność na zginanie dźwigara przy uwzględnieniu rozstawu poprzecznic  $a$ ,  $\Delta_g$  – ugięcie pojedynczego dźwigara od jego ciężaru własnego. Jeśli wartość  $\alpha \leq 0,005$ , wówczas z powodzeniem możemy stosować opisaną metodę.

W latach 50. XX w. powstało wiele dodatkowych tablic i udoskonalień metody przez uwzględnienie sztywności skrętnej dźwigarów [4]. W rezultacie tych prac można uzyskać rozwiązania co do dokładności równe rozwiązaniom otrzymanym za pomocą MES.

Rozwinięciem przedstawionego sposobu są metody Guyona-Massoneta oraz innych. W Polsce uogólnieniem metody Courbona zajmował się m.in. Jerzy Grycz [2], w rezultacie czego powstała procedura numeryczna uwzględniająca dowolnie gęsty ruszt belkowo-poprzecznicowy.

## Bibliografia

- [1] Courbon J. – *Calcul des ponts à poutres multiples solidarisées par des entretoises*. Annales des Ponts et Chaussées, mémoires et documents relatif à l'art des constructions au service de l'ingénieur, 1940, vol. 17. pp. 293–322
- [2] Grycz J. – *Metody analizy statycznej układów utworzonych z płyt i belek*, rozdział w monografii *Budownictwo betonowe*, t. XIV, Mosty, cz. 2., Arkady, 1973, str. 205–314
- [3] Holowaty J. – *Uprozczone metody rozdziału poprzecznego obciążenia w mostach drogowych*, „Mosty”, 4/2010
- [4] Осипов С. В. – *Справочные таблицы для расчета неразрезных балок на упруго оседающих опорах*, ИЛСА, Москва, 1953
- [5] Поливанов Н. И. – *Железобетонные мосты*, Н-ТИАЛ, Москва, 1956

■