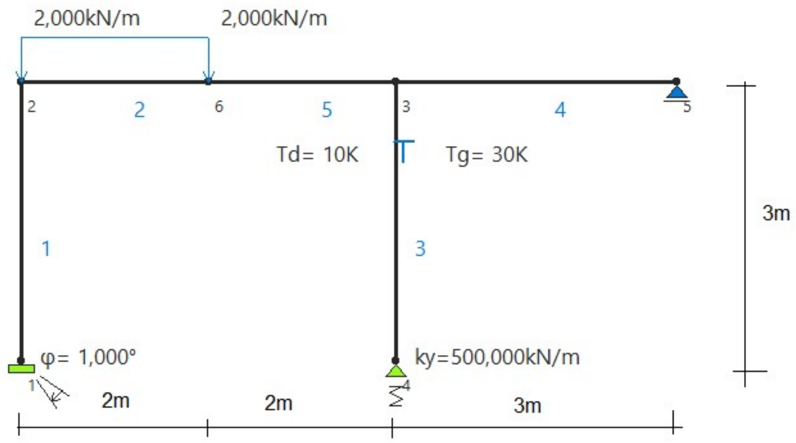
Zadanie z metody sił

Wszystkie moje komentarze będą zaznaczone na czerwono.

Projekt wykonano w programie SMath Studio. Jest to darmowa alternatywa dla Mathcada i nie posiada ograniczeń, tak jak studencka wersja Mathcada. Skróty klawiszowe są w 90% takie same jak w Mathcadzie, więc łatwo się przyzwyczaić.



IPN 80

$E := 210\ \text{GPa}$

$J := 7.78 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^4$

$EJ := E \cdot J = 163.38\ \text{kN m}^2$

$h := 0.08\ \text{m}$

$\alpha_t := 1.2 \cdot 10^{-5}$

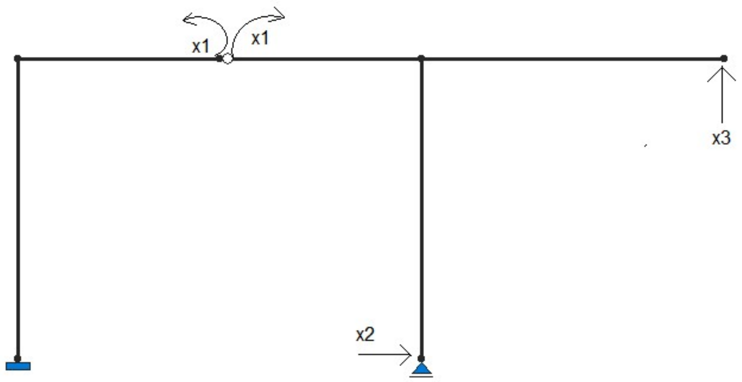
obliczenie SSNU

$SSNU = R - P - 3 + 3 \cdot O$ $\qquad 6 - 0 - 3 + 3 \cdot 0 = 3$

UPMP

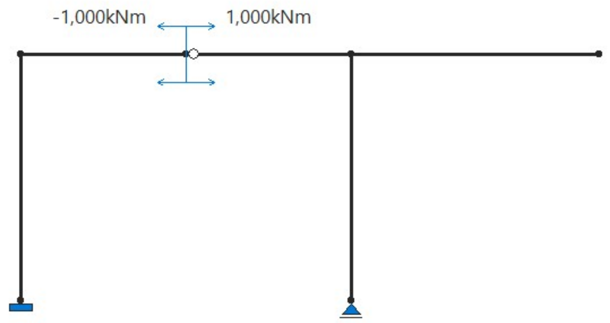
układ trzykrotnie statycznie niewyznaczalny

układ podstawowy metody sił. Usuwamy tyle przegubów, lub dodajemy tyle podpór ilukrotnie mamy niewyznaczalny układ. Możemy zrobić też kombinację, tak jak w tym przykładzie

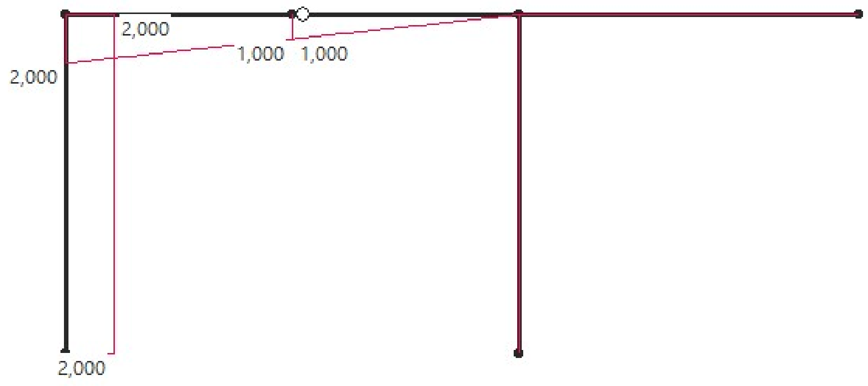


Stan x1=1

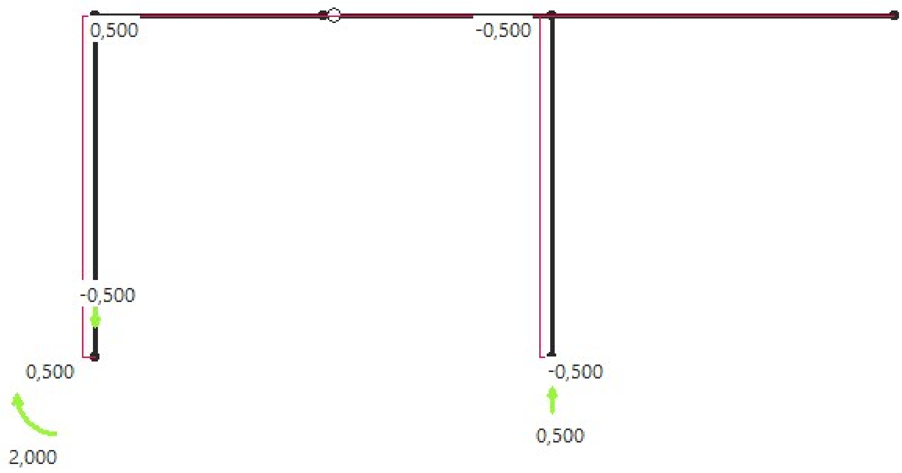
Uwaga, w projekcie należy wykonać wszystkie obliczenia reakcji i sił wewnętrznych. Na potrzeby tego przykładu zostają pominięte. Wykresy również należy wykonać samodzielnie.



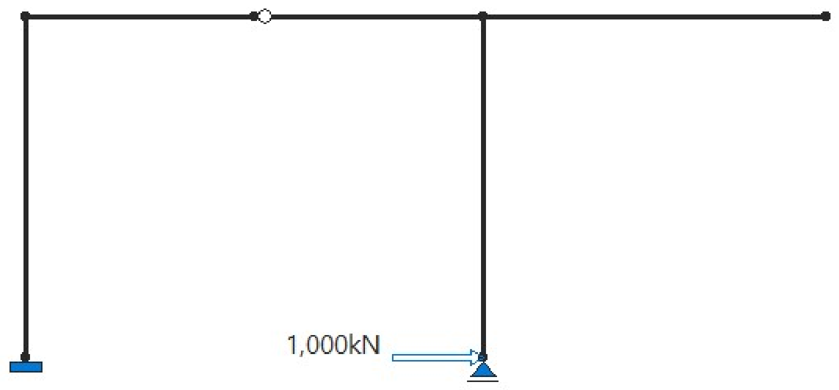
M1 [-]



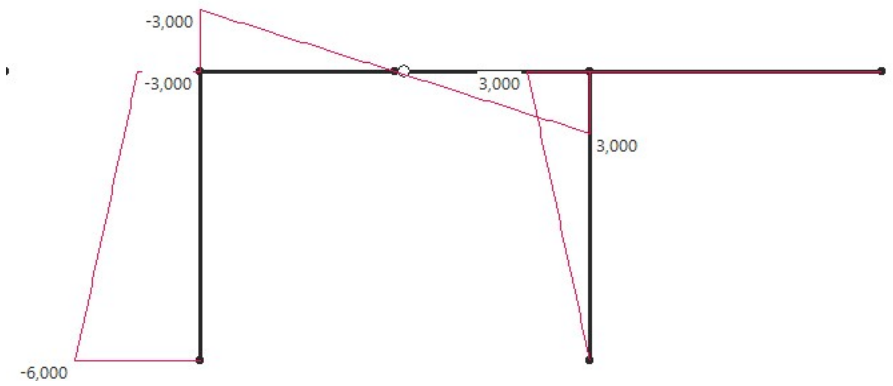
N1 [1/m]



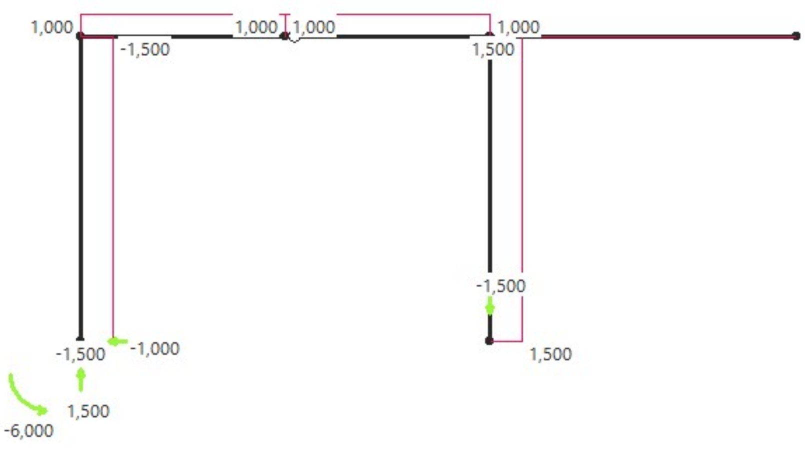
Stan x2=1



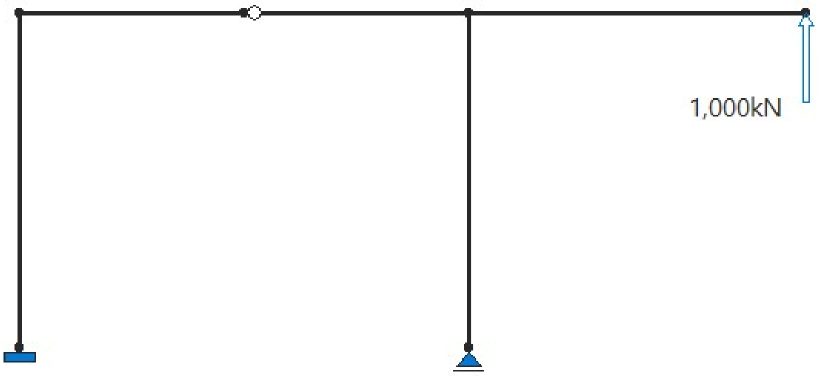
M2 [m]



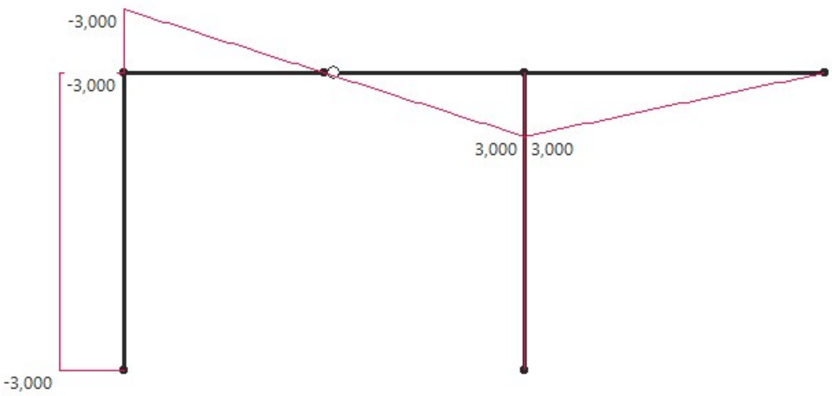
N2 [-]



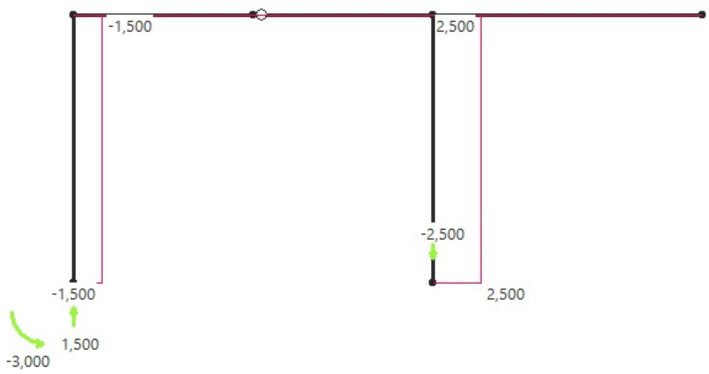
Stan x3=1



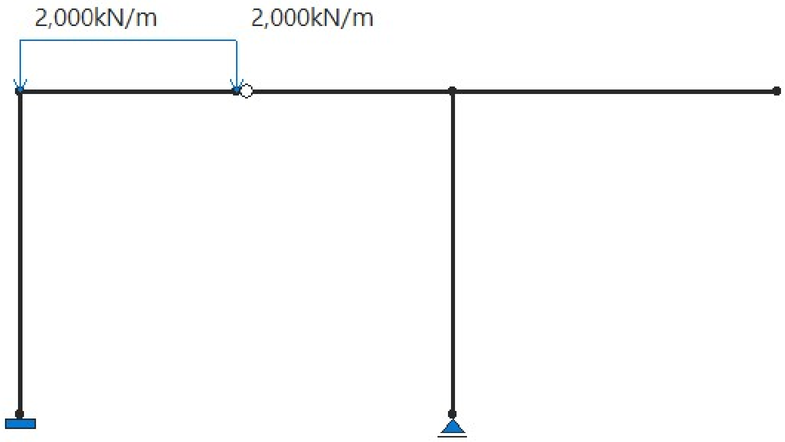
M3 [m]



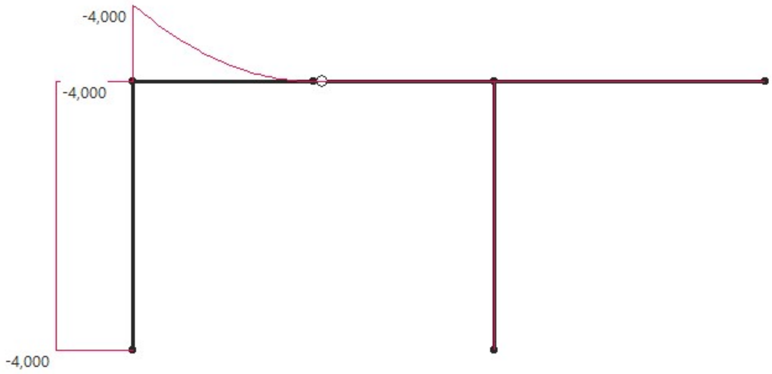
N3 [-]



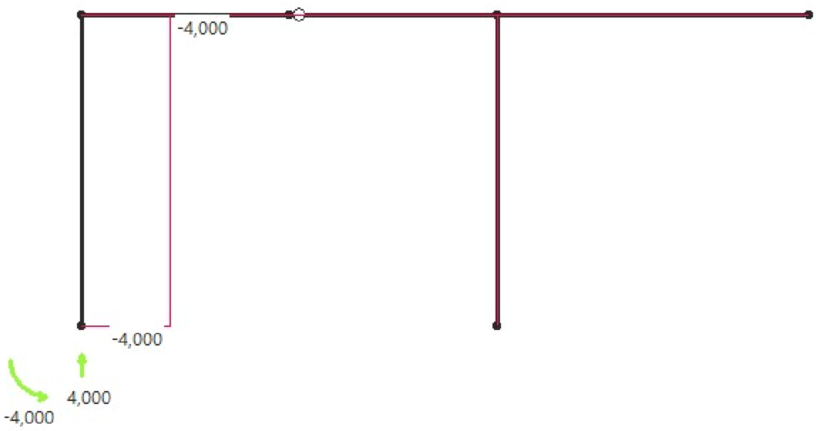
Stan p



Mp [kNm]



Np [-]



Liczenie delt

Delty liczymy metodą całkowania graficznego, tak jak na pierwszym projekcie, tylko że trzeba mnożyć również stany jednostkowe. Np. δ12 to wykres ze stanu 1 razy wykres ze stanu 2, a δ3p to wykres ze stanu p razy wykres ze stanu 3.

$$\delta_{11} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1+2}{2}\right) + (2-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3}\right) + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}\right) \mathrm{m} = 0.1061 \ \frac{1}{\mathrm{m\ kN}}$$

$$\delta_{12} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(-2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{6+3}{2}\right) - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3}\right) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}\right) \mathrm{m}^2 = -0.1897 \ \frac{1}{\mathrm{kN}}$$

$$\delta_{13} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(-3 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3}\right) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}\right) \mathrm{m}^2 = -0.1347 \ \frac{1}{\mathrm{kN}}$$

$$\delta_{21} := \delta_{12}$$

$$\delta_{22} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{6+3}{2}\right) + (6-3) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3 + (6-3) \cdot \frac{2}{3}\right) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}\right) \mathrm{m}^3 = 0.5141 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kN}}$$

$$\delta_{23} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3+6}{2}\right) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}\right) \mathrm{m}^3 = 0.3213 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kN}}$$

$$\delta_{31} := \delta_{13}$$

$$\delta_{32} := \delta_{23}$$

$$\delta_{33} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}\right) \mathrm{m}^3 = 0.2938 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kN}}$$

$$\delta_{1p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(-4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1+2}{2}\right)\right) \mathrm{kN\ m}^2 = -0.1755$$

$$\delta_{2p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{6+3}{2}\right) + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\right) \mathrm{kN\ m}^3 = 0.3672 \ \mathrm{m}$$

$$\delta_{3p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\right) \mathrm{kN\ m}^3 = 0.2571 \ \mathrm{m}$$

Wpływ temperatury też liczymy tak samo, jak w pierwszym projekcie tzn. Wykres z odpowiedniego stanu wirtualnego razy prostokąt od temperatury.

$$t_0 := \frac{10+30}{2} = 20 \qquad \Delta t := 30 - 10 = 20$$

$$\delta_{1t0} := -0.5 \cdot \frac{1}{\mathrm{m}} \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot \alpha_t \cdot t_0 = -0.0004 \qquad \delta_{1\Delta t} := 0$$

$$\delta_{2t0} := 1.5 \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot \alpha_t \cdot t_0 = 0.0011\ \mathrm{m} \qquad \delta_{2\Delta t} := -3\ \mathrm{m} \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} = -0.0135\ \mathrm{m}$$

$$\delta_{3t0} := 2.5 \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot \alpha_t \cdot t_0 = 0.0018\ \mathrm{m} \qquad \delta_{3\Delta t} := 0$$

Wpływ wymuszeń liczymy, jak w pierwszym projekcie, czyli ujemna wartość reakcji w stanie wirtualnym, w miejscu wymuszenia, razy wymuszenie

$$\Delta := 1\ \mathrm{deg} = 0.0175$$

$$\delta_{1\Delta} := -2 \cdot \Delta = -0.0349$$

$$\delta_{2\Delta} := -(-6\ \mathrm{m}) \cdot \Delta = 0.1047\ \mathrm{m}$$

$$\delta_{3\Delta} := -(-3\ \mathrm{m}) \cdot \Delta = 0.0524\ \mathrm{m}$$

Uwaga! Te delty pomijamy, jeżeli reakcja, na której było wymuszenie została zastąpiona jakąś niewiadomą w UPMS. W takim przypadku zamiast tych delt należy zastąpić 0 na końcu równania w układzie równań.

Np. jeżeli w UPMS przyjęto x2 jako reakcja momentowa w pierwszej podporze, to w drugim równaniu układu równań zamiast 0 będzie Δ.

Wpływ wymuszeń liczymy, jak w pierwszym projekcie, ale należy uwzględnić wszystkie kombinacje w stanach wirtualnych. Np. δ12k to reakcja ze stanu 1, razy reakcja ze stanu 2 podzielone przez sztywność.

$k := 500 \ \frac{kN}{m}$

$\delta_{11k} := \frac{0.5 \cdot \frac{1}{m} \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{m}}{k} = 0.0005 \ \frac{1}{m\ kN}$

$\delta_{12k} := \frac{0.5 \cdot \frac{1}{m} \cdot (-1.5)}{k} = -0.0015 \ \frac{1}{kN}$

$\delta_{13k} := \frac{0.5 \cdot \frac{1}{m} \cdot (-2.5)}{k} = -0.0025 \ \frac{1}{kN}$

Uwaga! Te delty pomijamy, jeżeli reakcja, na której była sprężystość została zastąpiona jakąś niewiadomą w UPMS. W takim przypadku zamiast tych delt należy zastąpić 0 na końcu równania w układzie równań.

Np. jeżeli w UPMS przyjęto x3 jako reakcja pionowa w drugiej podporze, to w trzecim równaniu układu równań zamiast 0 będzie -x3/k. Albo, jeżeli przyjęto x1 jako ta reakcja, to w pierwszym równaniu zamiast 0, będzie -x1/k itd...

$\delta_{21k} := \delta_{12k}$

$\delta_{22k} := \frac{(-1.5) \cdot (-1.5)}{k} = 0.0045 \ \frac{m}{kN}$

$\delta_{23k} := \frac{(-1.5) \cdot (-2.5)}{k} = 0.0075 \ \frac{m}{kN}$

$\delta_{31k} := \delta_{13k}$

$\delta_{32k} := \delta_{23k}$

$\delta_{33k} := \frac{(-2.5) \cdot (-2.5)}{k} = 0.0125 \ \frac{m}{kN}$

$\delta_{1pk} := \frac{0.5 \cdot \frac{1}{m} \cdot 0}{k} = 0$

$\delta_{2pk} := \frac{(-1.5) \cdot 0}{k} = 0$

$\delta_{3pk} := \frac{(-2.5) \cdot 0}{k} = 0$

Układ równań

sumujemy wszystkie delty od stanów rzeczywistych do stanu zsumowanego

$\delta_{1P} := \delta_{1p} + \delta_{1t0} + \delta_{1\Delta t} + \delta_{1\Delta} + \delta_{1pk} = -0.2107$

$\delta_{2P} := \delta_{2p} + \delta_{2t0} + \delta_{2\Delta t} + \delta_{2\Delta} + \delta_{2pk} = 0.4595 \ m$

$\delta_{3P} := \delta_{3p} + \delta_{3t0} + \delta_{3\Delta t} + \delta_{3\Delta} + \delta_{3pk} = 0.3112 \ m$

$$\begin{cases} \left(\delta_{11} + \delta_{11k}\right) \cdot x_1 + \left(\delta_{12} + \delta_{12k}\right) \cdot x_2 + \left(\delta_{13} + \delta_{13k}\right) \cdot x_3 + \delta_{1P} = 0 \\ \left(\delta_{21} + \delta_{21k}\right) \cdot x_1 + \left(\delta_{22} + \delta_{22k}\right) \cdot x_2 + \left(\delta_{23} + \delta_{23k}\right) \cdot x_3 + \delta_{2P} = 0 \\ \left(\delta_{31} + \delta_{31k}\right) \cdot x_1 + \left(\delta_{32} + \delta_{32k}\right) \cdot x_2 + \left(\delta_{33} + \delta_{33k}\right) \cdot x_3 + \delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

Układ równań można rozwiązać w postaci macierzowej

$$W := \begin{bmatrix} \delta_{11} + \delta_{11k} & \delta_{12} + \delta_{12k} & \delta_{13} + \delta_{13k} \\ \delta_{21} + \delta_{21k} & \delta_{22} + \delta_{22k} & \delta_{23} + \delta_{23k} \\ \delta_{31} + \delta_{31k} & \delta_{32} + \delta_{32k} & \delta_{33} + \delta_{33k} \end{bmatrix} \qquad F := -\begin{bmatrix} \delta_{1P} \\ \delta_{2P} \\ \delta_{3P} \end{bmatrix}$$

Jeżeli program nie chce liczyć układu równań, to można podstawić tak, żeby były takie same jednostki. Dzielimy wszystko przez m lub m^2, zależnie od tego jak był dobrany UPMS, żeby jednostki się zgadzały.

$$W := \begin{bmatrix} \delta_{11} + \delta_{11k} & \dfrac{\delta_{12} + \delta_{12k}}{m} & \dfrac{\delta_{13} + \delta_{13k}}{m} \\ \dfrac{\delta_{21} + \delta_{21k}}{m} & \dfrac{\delta_{22} + \delta_{22k}}{m^2} & \dfrac{\delta_{23} + \delta_{23k}}{m^2} \\ \dfrac{\delta_{31} + \delta_{31k}}{m} & \dfrac{\delta_{32} + \delta_{32k}}{m^2} & \dfrac{\delta_{33} + \delta_{33k}}{m^2} \end{bmatrix} \qquad F := -\begin{bmatrix} \delta_{1P}\, m \\ \delta_{2P} \\ \delta_{3P} \end{bmatrix} \qquad x := W^{-1} \cdot F$$

$$x_1 := \frac{x_1}{m} = 1.1361\ kN\, m \qquad x_2 := \frac{x_2}{m^2} = -0.4555\ kN \qquad x_3 := \frac{x_3}{m^2} = -0.0184\ kN$$

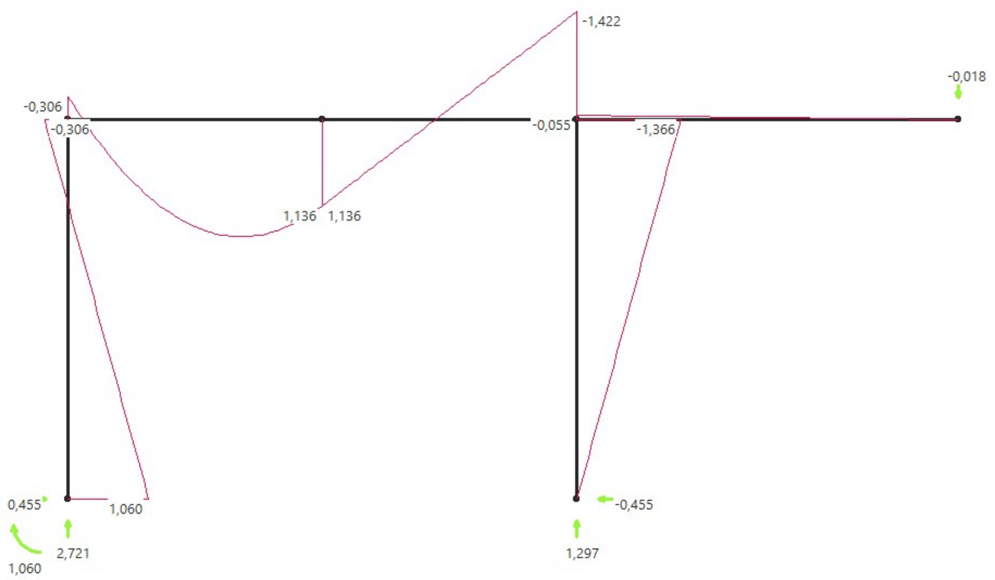
Obliczenie sił wewnętrznych

Momenty ostateczne

$$M_{ost} = M_1 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2 + M_3 \cdot x_3 + M_p$$

Za M1, M2 itd podstawiamy wartości momentów w poszczególnych stanach w pojedynczych punktach (na początku i na końcu każdego pręta)

$$M_{ost} := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} m \cdot x_2 + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} m \cdot x_3 + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} kN\, m = \begin{bmatrix} 1.0602 & -0.3062 \\ -0.3062 & 1.1361 \\ 1.1361 & -1.4216 \\ -0.0551 & 0 \\ -1.3664 & 0 \end{bmatrix} kN\, m$$

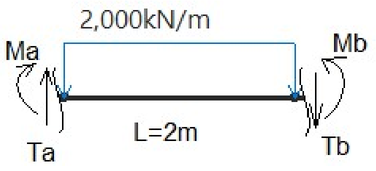


Należy również policzyć ekstremum paraboli, jest to miejsce w którym tnąca przyjmuje wartość 0. Tnące obliczymy za chwilę.

Tnące ostateczne

Tnące liczymy analogicznym wzorem, jak w momentach, ale do tego potrzebne są wszystkie wykresy jednostkowe tnących. Nie mamy tych wykresów, więc liczymy to na podstawie metody równoważenia prętów:

Np pręt, na którym jest obciążenie ciągłe. Wycinamy ten pręt nieskończenie blisko jego końca i początku, spisujemy momenty z wykresów i za pomocą równań równowagi wyliczamy obie tnące:



W ten sposób należy policzyć wszystkie pręty.

$$M_a := -0.306\ \mathrm{kN\ m} \qquad M_b := 1.136\ \mathrm{kN\ m}$$

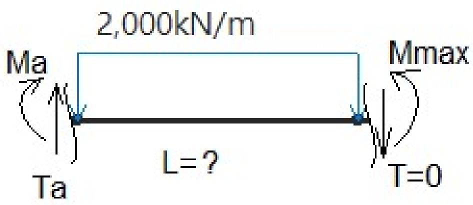
$$\Sigma M_a \qquad M_a - M_b + 2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m} + T_b \cdot 2\ \mathrm{m} = 0$$

$$T_b := \frac{-M_a + M_b - 2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{m}} = -1.279\ \mathrm{kN}$$

$$\Sigma Y \qquad T_a - T_b - 2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} = 0$$

$$T_a := T_b + 2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} = 2.721\ \mathrm{kN}$$

Teraz, jak obliczyć ekstremum momentu. Jest to miejsce, gdzie tnąca jest równa 0. Robimy więc przecięcie w nieznanym miejscu, i szukamy z ΣY wartość L, a potem z ΣM wartość Mmax.

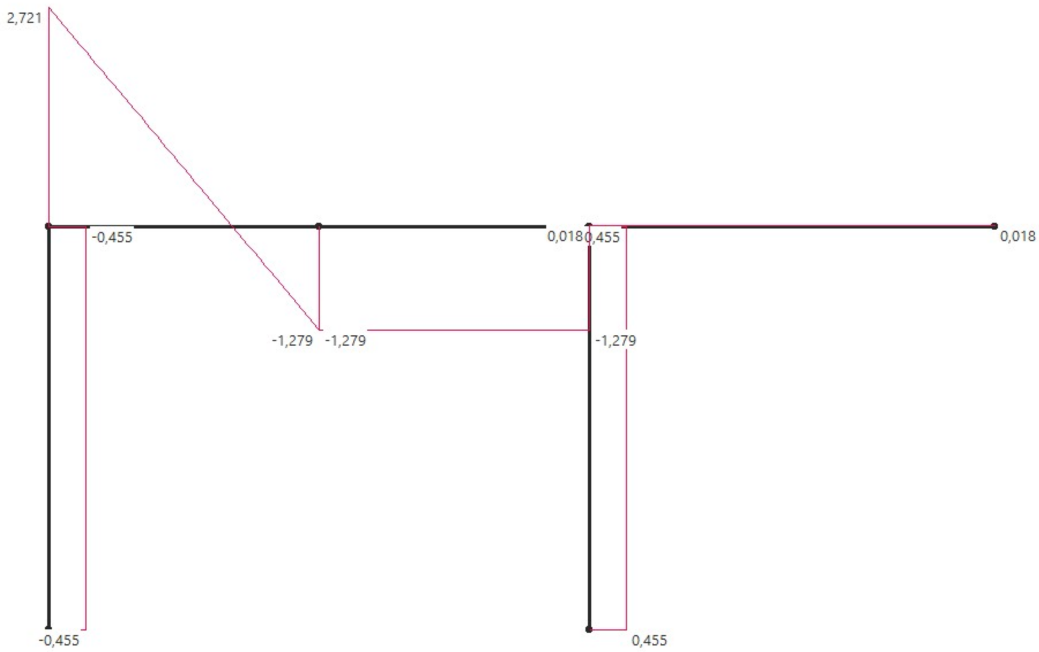


$$\Sigma Y \qquad T_a - 0 - 2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot L = 0$$

$$L := \frac{T_a}{2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}} = 1.3605\ \mathrm{m}$$

$$\Sigma M_a \qquad M_a - M_{max} + 2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0$$

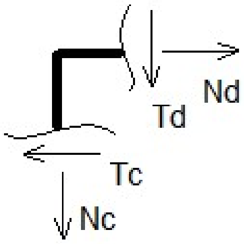
$$M_{max} := M_a + 2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}} \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 1.545\ \mathrm{kN\ m}$$



Normalne ostateczne

Normalne ostateczne liczymy analogicznym sposobem, jak momenty (po prostu zamiast M do wzoru podstawiamy N). Ale można też policzyć metodą równoważenia węzłów.

Bierzemy jeden węzeł, spisujemy tnące z wykresów i z równowagi ΣX, ΣY liczymy normalne.

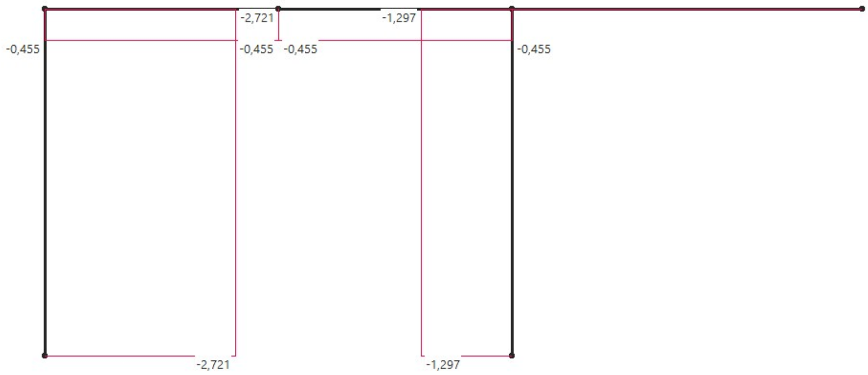


$\Sigma X \qquad -T_c + N_d = 0$

$N_d := 0.455\ \mathrm{kN}$

$\Sigma Y \qquad -N_c - T_d = 0$

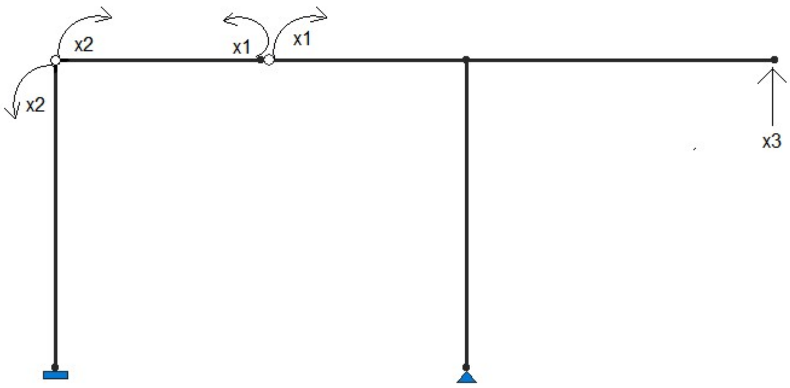
$N_c := -2.721\ \mathrm{kN}$



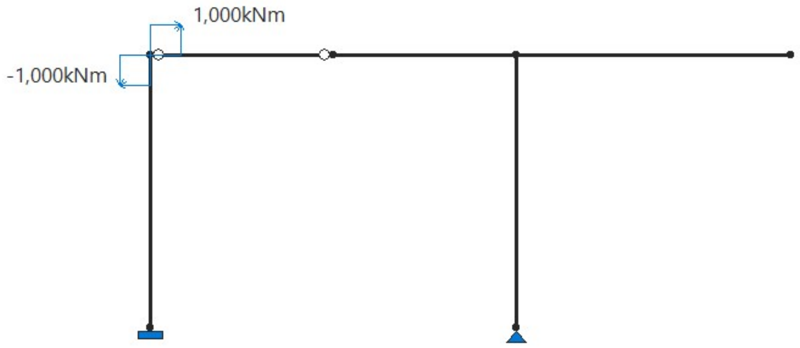
Sprawdzenie kinematyczne

W sprawdzeniu kinematycznym należy dobrać nowy UPMS i policzyć delty rzeczywiste na jednym kierunku. Ale zamiast stanu P, bierzemy stan ostateczny.

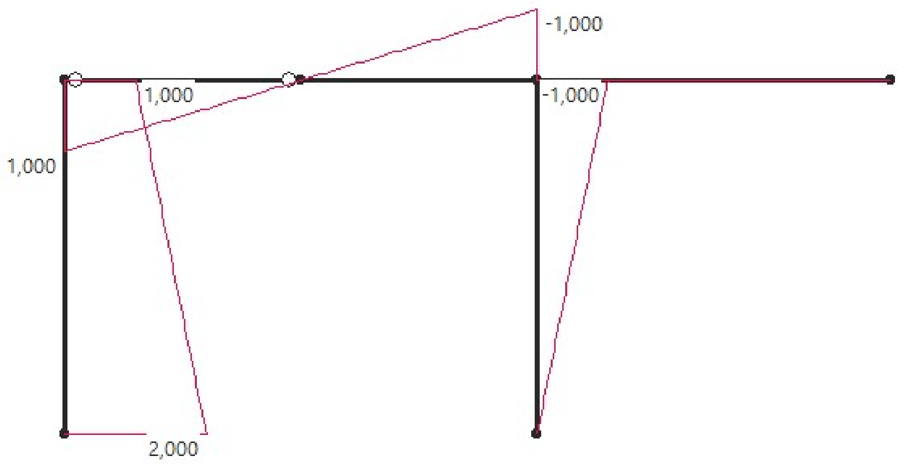
UPMS*



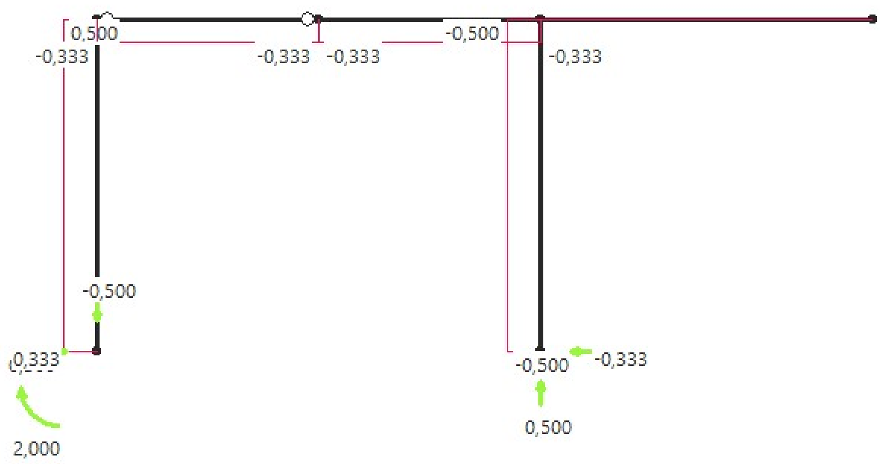
Stan x3*=1



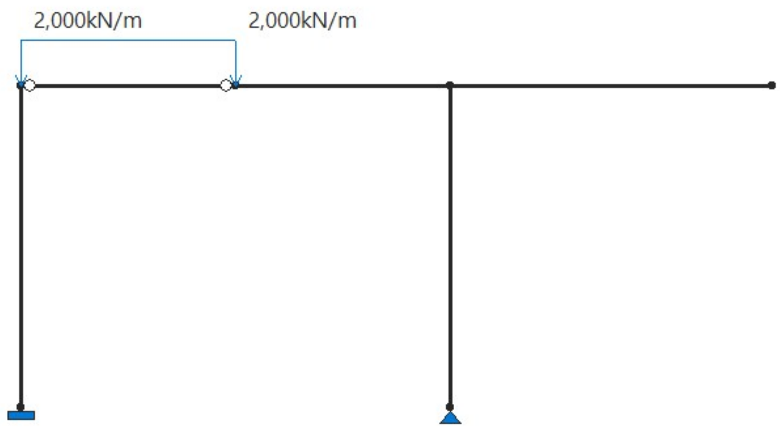
M3* [-]



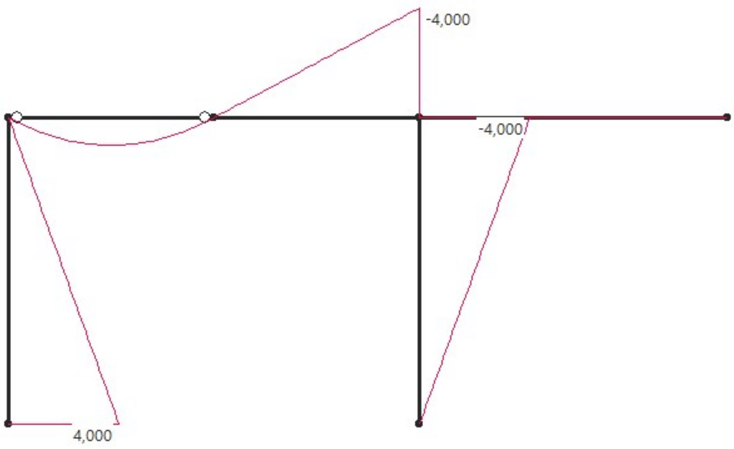
N3* [1/m]



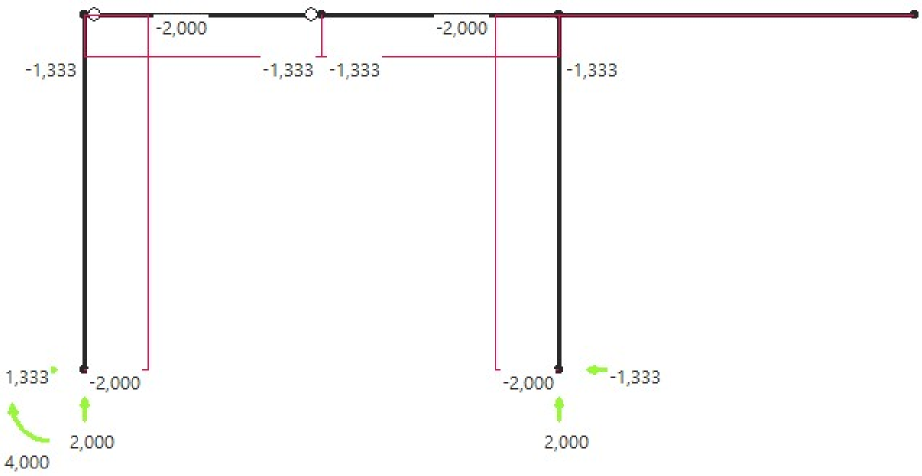
Stan p*



Mp* [kNm]



Np* [kN]



$$\delta_{3ost} = \frac{M_3 \cdot M_{ost}}{EJ}$$

$$\delta_{3ost} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(1 \cdot 3 \cdot \left(\frac{-0.306 + 1.06}{2}\right) + (2-1) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-0.306 + (1.06 + 0.306) \cdot \frac{2}{3}\right) + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1.136 - (0.306 + 1.136) \cdot \frac{2}{3}\right)\right) \mathrm{kN\,m}^2 + \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-1.136 + (1.422 + 1.136) \cdot \frac{2}{3}\right) + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.366 \cdot \frac{2}{3}\right) \mathrm{kN\,m}^2 = 0.0295$$

$$\delta_{3t0} := -0.5 \cdot \frac{1}{\mathrm{m}} \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot \alpha_t \cdot t_0 = -0.0004$$

Tutaj używamy po prostu wykresów z nowego stanu wirtualnego.

$$\delta_{3\Delta t} := 1 \cdot 3\ \mathrm{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} = 0.0045$$

$$\delta_{3\Delta} := -2 \cdot \Delta = -0.0349$$

$$\delta_{3k} = \frac{R_{ost} \cdot R_3}{k}$$

Tutaj bierzemy reakcję ze stanu ostatecznego i reakcję z nowego stanu wirtualnego

$$\delta_{3k} := \frac{1.297\ \mathrm{kN} \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{\mathrm{m}}}{k} = 0.0013$$

$$\delta_3 := \delta_{3ost} + \delta_{3t0} + \delta_{3\Delta t} + \delta_{3\Delta} + \delta_{3k} = -4.5377 \cdot 10^{-7}$$

powinno wyjść bardzo bliskie 0

jeszcze liczymy jedną deltę dla porównania. Mnożymy nowy stan wirtualny razy nowy stan p.

$$\delta_{3p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}\right) \mathrm{kN\,m}^2 = 0.1061$$

$$\frac{\delta_3}{\delta_{3p}} \cdot 100\ \% = -0.0004\ \%$$

< 5% - warunek spełniony