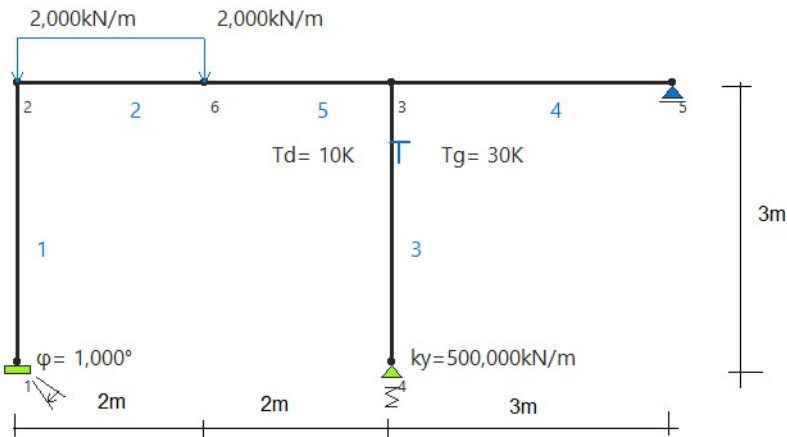


Zadanie z metody sił

Wszystkie moje komentarze będą zaznaczone na czerwono.

Projekt wykonano w programie SMath Studio. Jest to darmowa alternatywa dla Mathcada i nie posiada ograniczeń, tak jak studencka wersja Mathcada. Skróty klawiszowe są w 90% takie same jak w Mathcadzie, więc łatwo się przyzwyczaić.



IPN 80

$$E := 210 \text{ GPa}$$

$$J := 7,78 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$EJ := E \cdot J = 163,38 \text{ kN m}^2$$

$$h := 0,08 \text{ m}$$

$$\alpha_t := 1,2 \cdot 10^{-5}$$

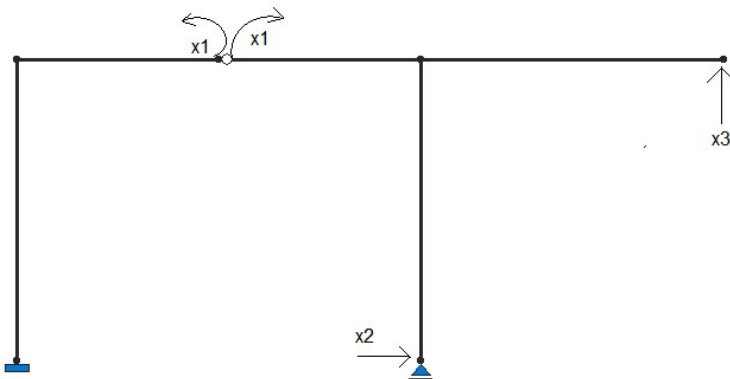
obliczenie SSNU

$$SSNU = R - P - 3 + 3 \cdot 0 \quad 6 - 0 - 3 + 3 \cdot 0 = 3$$

UPMP

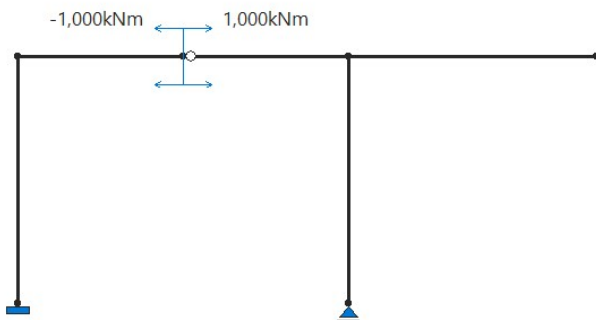
układ trzykrotnie statycznie niewyznaczalny

układ podstawowy metody sił. Usuwamy tyle przegubów, lub dodajemy tyle podpór ilukrotnie mamy niewyznaczalny układ. Możemy zrobić też kombinację, tak jak w tym przykładzie

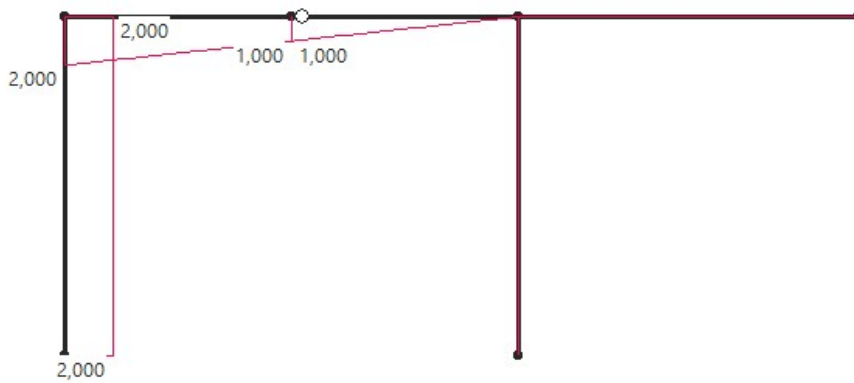


Stan $x_1=1$

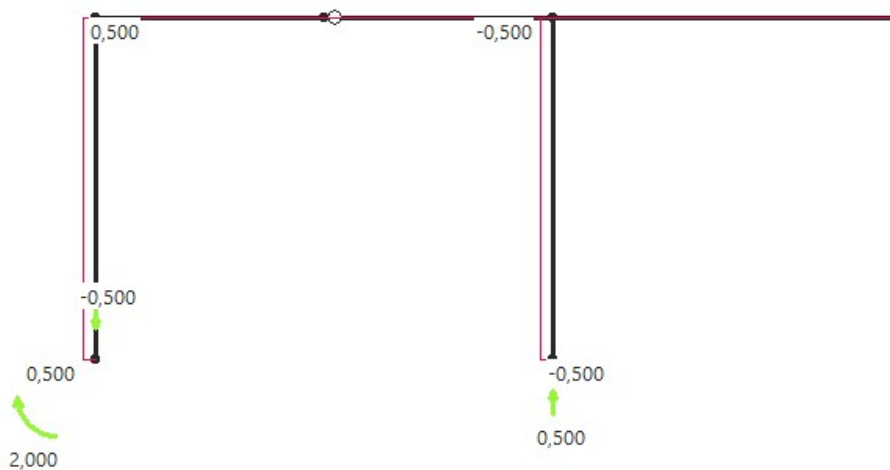
Uwaga, w projekcie należy wykonać wszystkie obliczenia reakcji i sił wewnętrznych. Na potrzeby tego przykładu zostają pominięte. Wykresy również należy wykonać samodzielnie.



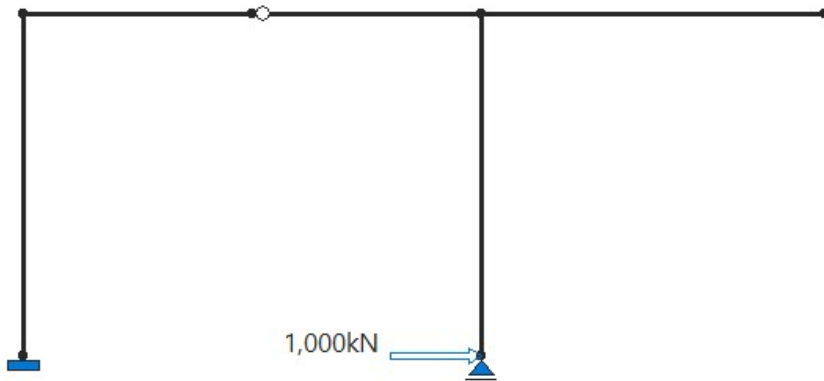
M1 [-]



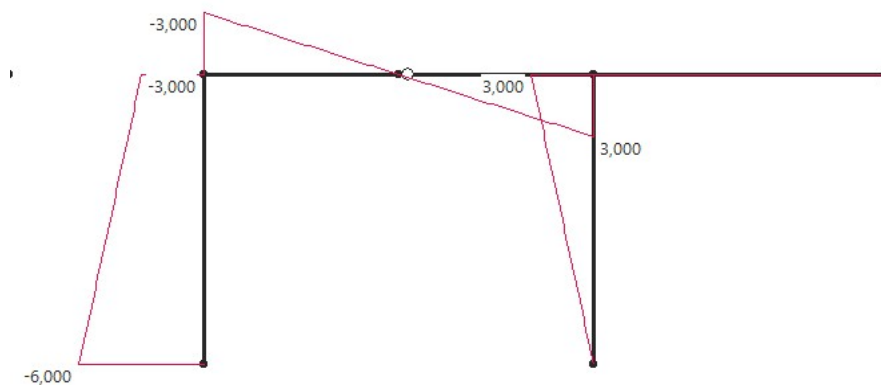
N1 [1/m]



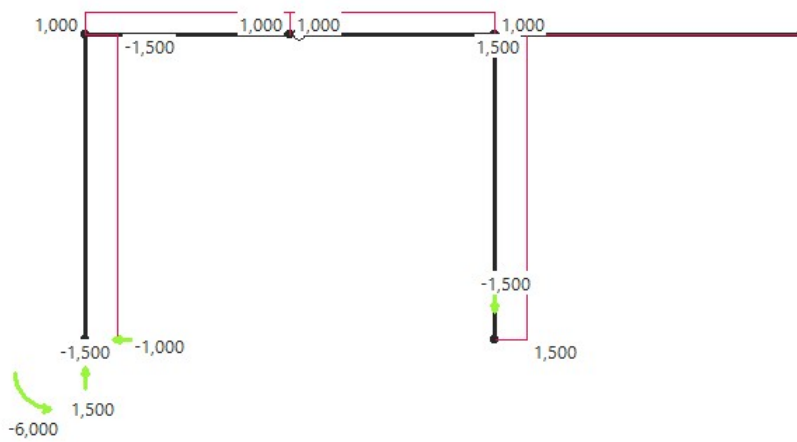
Stan $x_2=1$



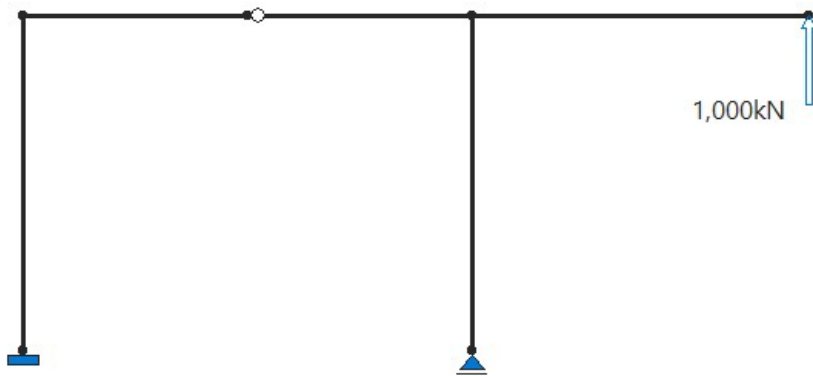
M2 [m]



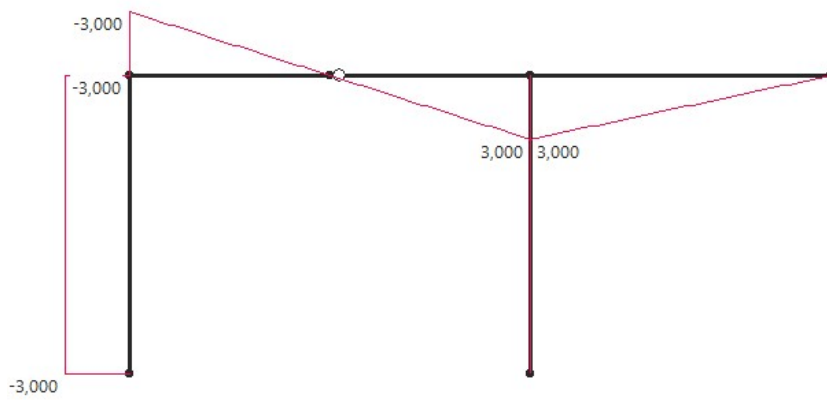
N2 [-]



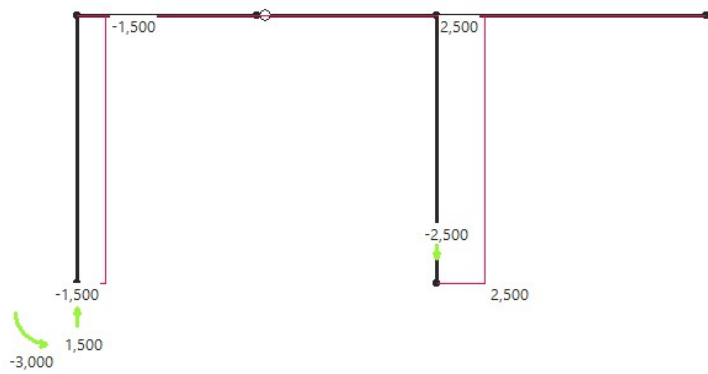
Stan $x_3=1$



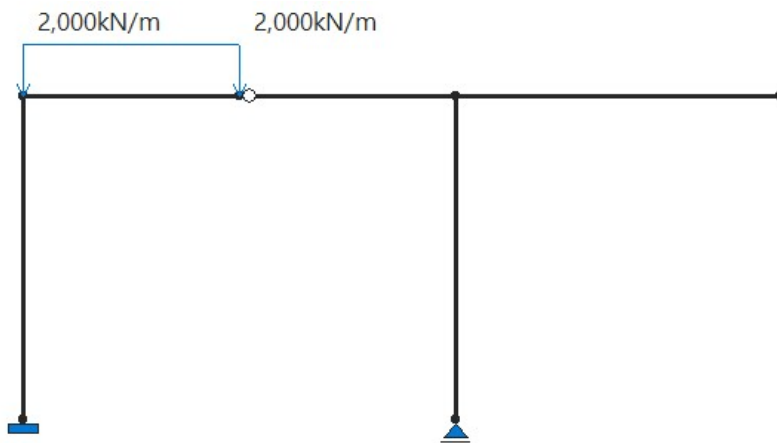
M_3 [m]



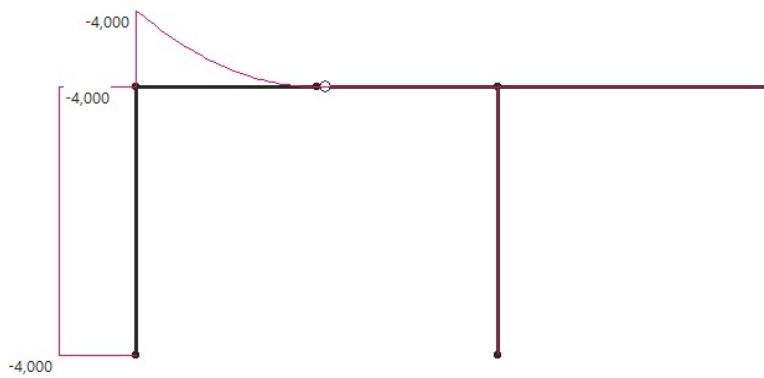
N_3 [-]



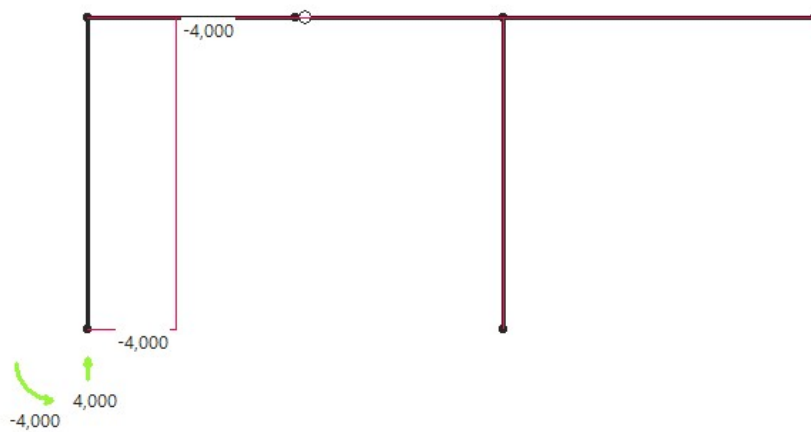
Stan p



Mp [kNm]



Np [-]



Liczenie delt

Delty liczymy metodą całkowania graficznego, tak jak na pierwszym projekcie, tylko że trzeba mnożyć również stany jednostkowe. Np. δ_{12} to wykres ze stanu 1 razy wykres ze stanu 2, a δ_{3p} to wykres ze stanu p razy wykres ze stanu 3.

$$\delta_{11} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1+2}{2} \right) + (2-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3} \right) + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \right) \text{m} = 0,1061 \frac{1}{\text{m kN}}$$

$$\delta_{12} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(-2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{6+3}{2} \right) - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3} \right) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right) \text{m}^2 = -0,1897 \frac{1}{\text{kN}}$$

$$\delta_{13} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(-3 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3} \right) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right) \text{m}^2 = -0,1347 \frac{1}{\text{kN}}$$

$$\delta_{21} := \delta_{12}$$

$$\delta_{22} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{6+3}{2} \right) + (6-3) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3 + (6-3) \cdot \frac{2}{3} \right) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \right) \text{m}^3 = 0,5141 \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

$$\delta_{23} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3+6}{2} \right) + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \right) \text{m}^3 = 0,3213 \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

$$\delta_{31} := \delta_{13}$$

$$\delta_{32} := \delta_{23}$$

$$\delta_{33} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \right) \text{m}^3 = 0,2938 \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

$$\delta_{1p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(-4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1+2}{2} \right) \right) \text{kN m}^2 = -0,1755$$

$$\delta_{2p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{6+3}{2} \right) + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \text{kN m}^3 = 0,3672 \text{ m}$$

$$\delta_{3p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \text{kN m}^3 = 0,2571 \text{ m}$$

Wpływ temperatury też liczymy tak samo, jak w pierwszym projekcie tzn. Wykres z odpowiedniego stanu wirtualnego razy prostokąt od temperatury.

$$t_0 := \frac{10+30}{2} = 20$$

$$\Delta t := 30 - 10 = 20$$

$$\delta_{1t0} := -0,5 \cdot \frac{1}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot \alpha_t \cdot t_0 = -0,0004$$

$$\delta_{1\Delta t} := 0$$

$$\delta_{2t0} := 1,5 \cdot 3 \text{ m} \cdot \alpha_t \cdot t_0 = 0,0011 \text{ m}$$

$$\delta_{2\Delta t} := -3 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} = -0,0135 \text{ m}$$

$$\delta_{3t0} := 2,5 \cdot 3 \text{ m} \cdot \alpha_t \cdot t_0 = 0,0018 \text{ m}$$

$$\delta_{3\Delta t} := 0$$

Wpływ wymuszeń liczymy, jak w pierwszym projekcie, czyli ujemna wartość reakcji w stanie wirtualnym, w miejscu wymuszenia, razy wymuszenie

$$\Delta := 1 \text{ deg} = 0,0175$$

$$\delta_{1\Delta} := -2 \cdot \Delta = -0,0349$$

$$\delta_{2\Delta} := -(-6 \text{ m}) \cdot \Delta = 0,1047 \text{ m}$$

$$\delta_{3\Delta} := -(-3 \text{ m}) \cdot \Delta = 0,0524 \text{ m}$$

Uwaga! Jeśli w UPMS usunęliśmy reakcję z wymuszeniem, to tutaj reakcje będą 0 lub 1 w zależności od stanu wirtualnego.

Np. jeżeli w UPMS przyjęto x2 jako reakcja moment w pierwszej podporze, to w takim przypadku:

$$\delta_{1\Delta} = 0 \cdot \Delta \quad \delta_{2\Delta} = -1 \cdot \Delta \quad \delta_{3\Delta} = 0 \cdot \Delta$$

Wpływ wymuszeń liczymy, jak w pierwszym projekcie, ale należy uwzględnić wszystkie kombinacje w stanach wirtualnych. Np. δ_{12k} to reakcja ze stanu 1, razy reakcja ze stanu 2 podzielone przez sztywność.

$$k := 500 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$\delta_{11k} := \frac{0,5 \cdot \frac{1}{\text{m}} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{\text{m}}}{k} = 0,0005 \frac{1}{\text{m kN}}$$

$$\delta_{12k} := \frac{0,5 \cdot \frac{1}{\text{m}} \cdot (-1,5)}{k} = -0,0015 \frac{1}{\text{kN}}$$

$$\delta_{13k} := \frac{0,5 \cdot \frac{1}{\text{m}} \cdot (-2,5)}{k} = -0,0025 \frac{1}{\text{kN}}$$

$$\delta_{21k} := \delta_{12k}$$

$$\delta_{22k} := \frac{(-1,5) \cdot (-1,5)}{k} = 0,0045 \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

$$\delta_{23k} := \frac{(-1,5) \cdot (-2,5)}{k} = 0,0075 \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

$$\delta_{31k} := \delta_{13k}$$

$$\delta_{32k} := \delta_{23k}$$

$$\delta_{33k} := \frac{(-2,5) \cdot (-2,5)}{k} = 0,0125 \frac{\text{m}}{\text{kN}}$$

$$\delta_{1pk} := \frac{0,5 \cdot \frac{1}{\text{m}} \cdot 0}{k} = 0$$

$$\delta_{2pk} := \frac{(-1,5) \cdot 0}{k} = 0$$

$$\delta_{3pk} := \frac{(-2,5) \cdot 0}{k} = 0$$

Uwaga! Jeśli w UPMS usunęliśmy reakcję z wymuszeniem, to tutaj reakcje będą 0 lub 1 w zależności od stanu wirtualnego.

Np. jeżeli w UPMS przyjęto x_3 jako reakcja pionowa w drugiej podporze, to w takim przypadku:

$$\delta_{33k} = \frac{1 \cdot 1}{k} \quad \text{a pozostałe } \delta_k = 0$$

Układ równań

sumujemy wszystkie delty od stanów rzeczywistych do stanu zsumowanego

$$\delta_{1P} := \delta_{1p} + \delta_{1t0} + \delta_{1\Delta t} + \delta_{1\Delta} + \delta_{1pk} = -0,2107$$

$$\delta_{2P} := \delta_{2p} + \delta_{2t0} + \delta_{2\Delta t} + \delta_{2\Delta} + \delta_{2pk} = 0,4595 \text{ m}$$

$$\delta_{3P} := \delta_{3p} + \delta_{3t0} + \delta_{3\Delta t} + \delta_{3\Delta} + \delta_{3pk} = 0,3112 \text{ m}$$

$$\begin{cases} (\delta_{11} + \delta_{11k}) \cdot x_1 + (\delta_{12} + \delta_{12k}) \cdot x_2 + (\delta_{13} + \delta_{13k}) \cdot x_3 + \delta_{1P} = 0 \\ (\delta_{21} + \delta_{21k}) \cdot x_1 + (\delta_{22} + \delta_{22k}) \cdot x_2 + (\delta_{23} + \delta_{23k}) \cdot x_3 + \delta_{2P} = 0 \\ (\delta_{31} + \delta_{31k}) \cdot x_1 + (\delta_{32} + \delta_{32k}) \cdot x_2 + (\delta_{33} + \delta_{33k}) \cdot x_3 + \delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

Układ równań można rozwiązać w postaci macierzowej

$$\bar{W} := \begin{bmatrix} \delta_{11} + \delta_{11k} & \delta_{12} + \delta_{12k} & \delta_{13} + \delta_{13k} \\ \delta_{21} + \delta_{21k} & \delta_{22} + \delta_{22k} & \delta_{23} + \delta_{23k} \\ \delta_{31} + \delta_{31k} & \delta_{32} + \delta_{32k} & \delta_{33} + \delta_{33k} \end{bmatrix} \quad F := - \begin{bmatrix} \delta_{1P} \\ \delta_{2P} \\ \delta_{3P} \end{bmatrix}$$

Jeżeli program nie chce liczyć układu równań, to można podstawić tak, żeby były takie same jednostki. Dzielimy wszystko przez m lub m², zależnie od tego jak był dobrany UPMS, żeby jednostki się zgadzały.

$$\bar{W} := \begin{bmatrix} \frac{\delta_{11} + \delta_{11k}}{m} & \frac{\delta_{12} + \delta_{12k}}{m} & \frac{\delta_{13} + \delta_{13k}}{m} \\ \frac{\delta_{21} + \delta_{21k}}{m} & \frac{\delta_{22} + \delta_{22k}}{m^2} & \frac{\delta_{23} + \delta_{23k}}{m^2} \\ \frac{\delta_{31} + \delta_{31k}}{m} & \frac{\delta_{32} + \delta_{32k}}{m^2} & \frac{\delta_{33} + \delta_{33k}}{m^2} \end{bmatrix} \quad F := - \begin{bmatrix} \delta_{1P} \cdot m \\ \delta_{2P} \\ \delta_{3P} \end{bmatrix} \quad x := \bar{W}^{-1} \cdot F$$

$$x_1 := \frac{x}{m} = 1,1361 \text{ kN m}$$

$$x_2 := \frac{x}{2} = -0,4555 \text{ kN}$$

$$x_3 := \frac{x}{2} = -0,0184 \text{ kN}$$

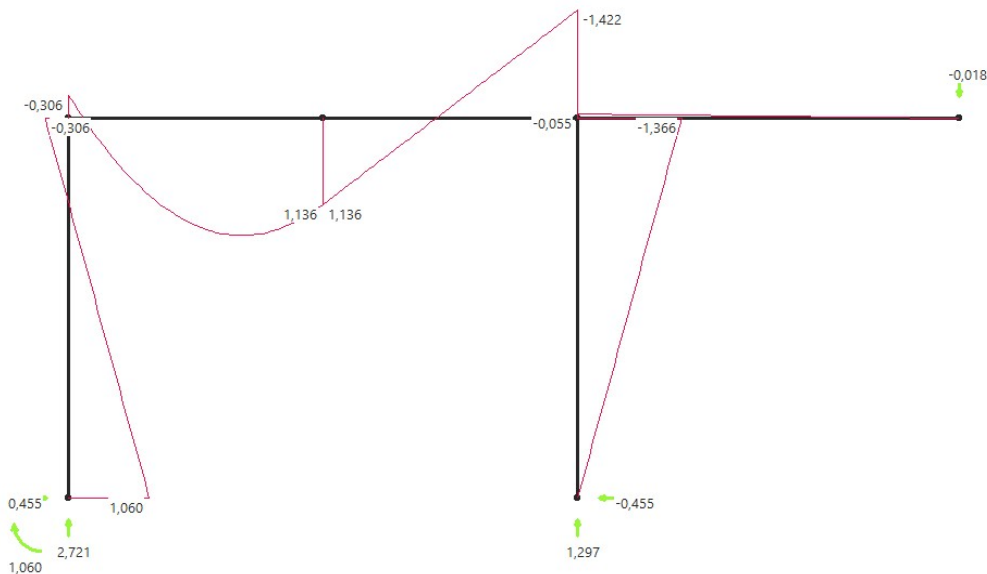
Obliczenie sił wewnętrznych

Momenty ostateczne

$$M_{ost} = M_1 \cdot x_1 + M_2 \cdot x_2 + M_3 \cdot x_3 + M_p$$

Za M1, M2 itd podstawiamy wartości momentów w poszczególnych stanach w pojedynczych punktach (na początku i na końcu każdego pręta)

$$M_{ost} := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot m \cdot x_2 + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot m \cdot x_3 + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN m} = \begin{bmatrix} 1,0602 & -0,3062 \\ -0,3062 & 1,1361 \\ 1,1361 & -1,4216 \\ -0,0551 & 0 \\ -1,3664 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN m}$$

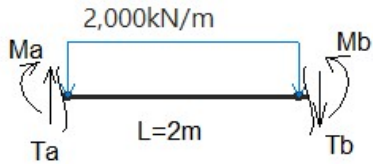


Należy również policzyć ekstremum paraboli, jest to miejsce w którym tnąca przyjmuje wartość 0. Tnące obliczymy za chwilę.

Tnące ostateczne

Tnące liczymy analogicznym wzorem, jak w momentach, ale do tego potrzebne są wszystkie wykresy jednostkowe tnących. Nie mamy tych wykresów, więc liczymy to na podstawie metody równowagi prętów:

Np pręt, na którym jest obciążenie ciągle. Wycinamy ten pręt nieskończenie blisko jego końca i początku, spisujemy momenty z wykresów i za pomocą równań równowagi wyliczamy obie tnące:



$$M_a := -0,306 \text{ kN m} \quad M_b := 1,136 \text{ kN m}$$

$$\Sigma M_a \quad M_a - M_b + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + T_b \cdot 2 \text{ m} = 0$$

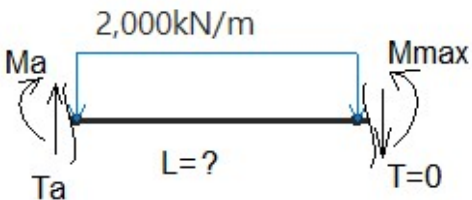
$$T_b := \frac{-M_a + M_b - 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}}{2 \text{ m}} = -1,279 \text{ kN}$$

W ten sposób należy policzyć wszystkie pręty.

$$\Sigma Y \quad T_a - T_b - 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$T_a := T_b + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m} = 2,721 \text{ kN}$$

Teraz, jak obliczyć ekstremum momentu. Jest to miejsce, gdzie tnąca jest równa 0. Robimy więc przecięcie w nieznanym miejscu, i szukamy z ΣY wartość L , a potem z ΣM wartość M_{max} .

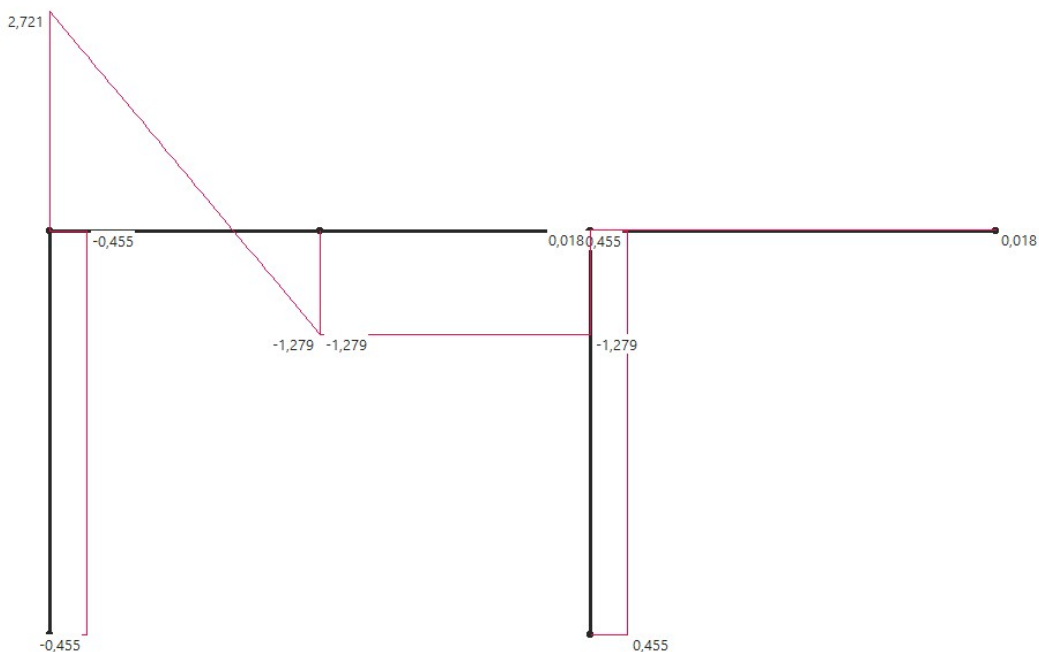


$$\Sigma Y \quad T_a - 0 - 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot L = 0$$

$$L := \frac{T_a}{2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} = 1,3605 \text{ m}$$

$$\Sigma M_a \quad M_a - M_{max} + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0$$

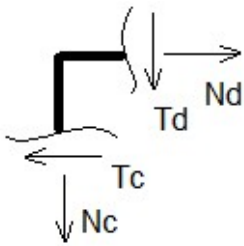
$$M_{max} := M_a + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 1,545 \text{ kN m}$$



Normalne ostateczne

Normalne ostateczne liczymy analogicznym sposobem, jak momenty (po prostu zamiast M do wzoru podstawiamy N). Ale można też policzyć metodą równoważenia węzłów.

Bierzemy jeden węzeł, spisujemy tnące z wykresów i z równowagi ΣX , ΣY liczymy normalne.

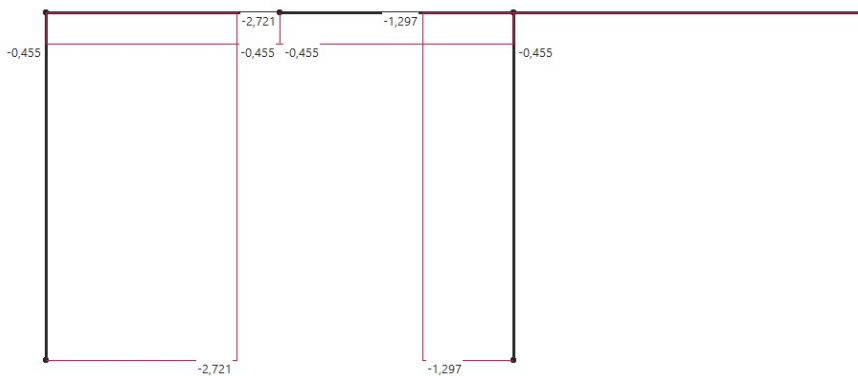


$$\Sigma X \quad -T_c + N_d = 0$$

$$N_d := 0,455 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y \quad -N_c - T_d = 0$$

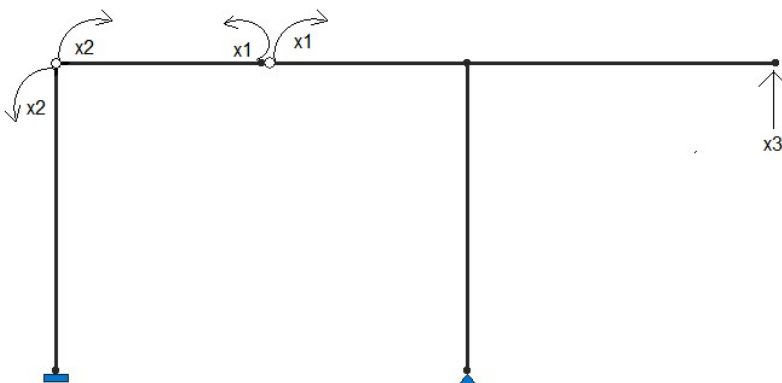
$$N_c := -2,721 \text{ kN}$$



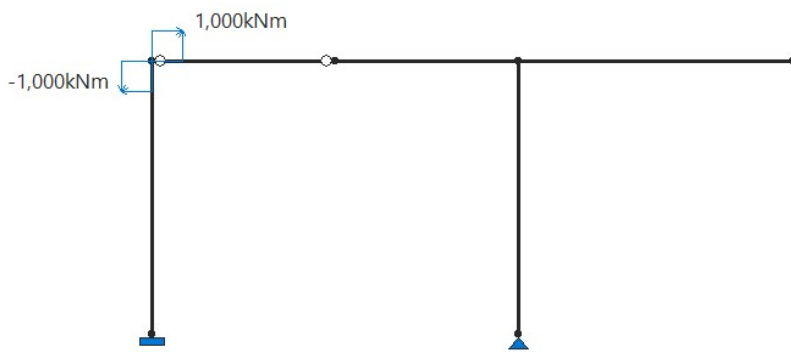
Sprawdzenie kinematyczne

W sprawdzeniu kinematycznym należy dobrać nowy UPMS i policzyć delty rzeczywiste na jednym kierunku. Ale zamiast stanu P, bierzemy stan ostateczny.

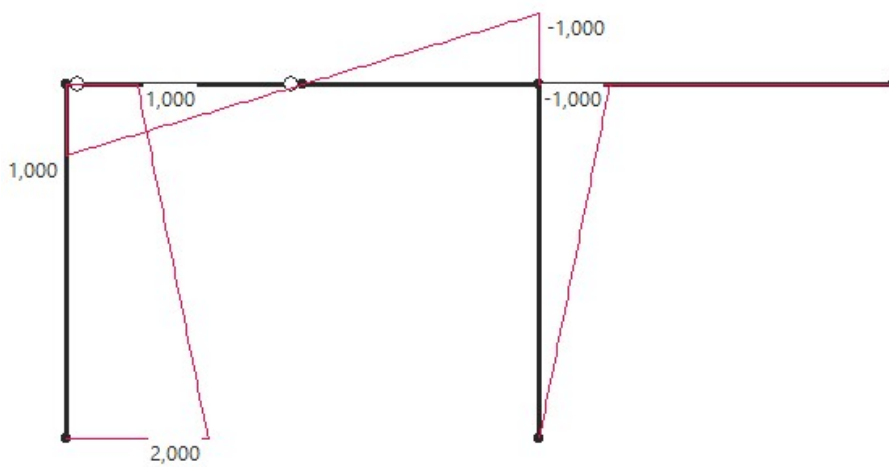
UPMS*



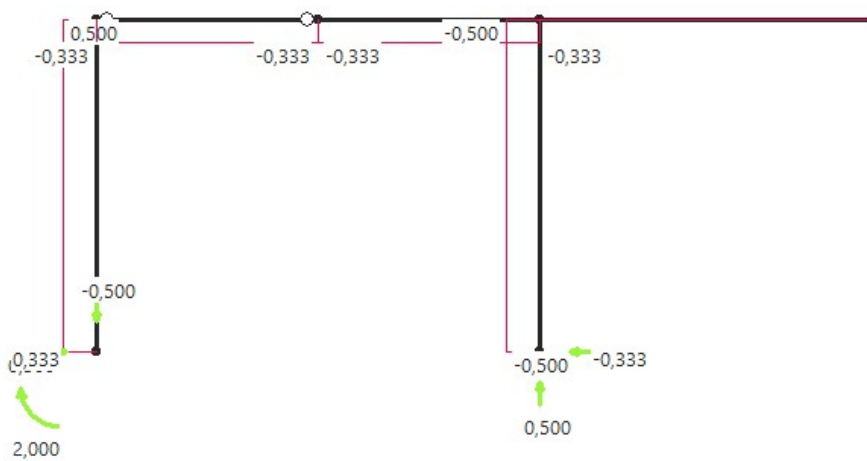
Stan $x_3^*=1$



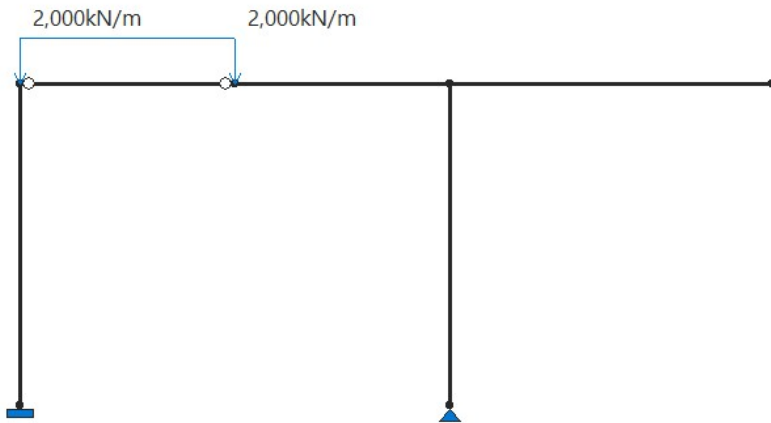
$M_3^* [-]$



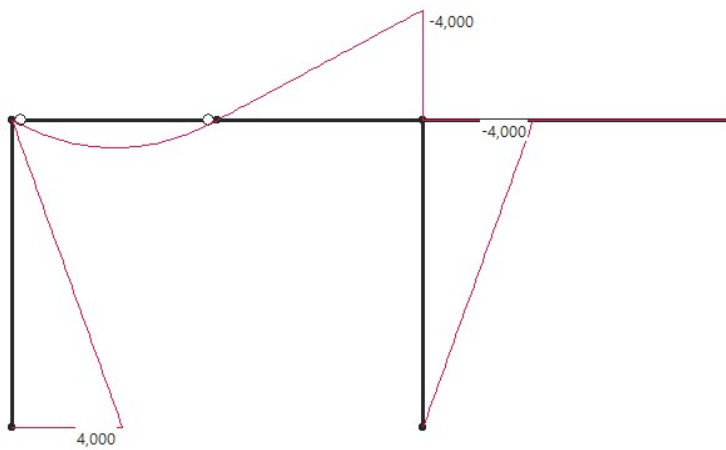
$N_3^* [1/m]$



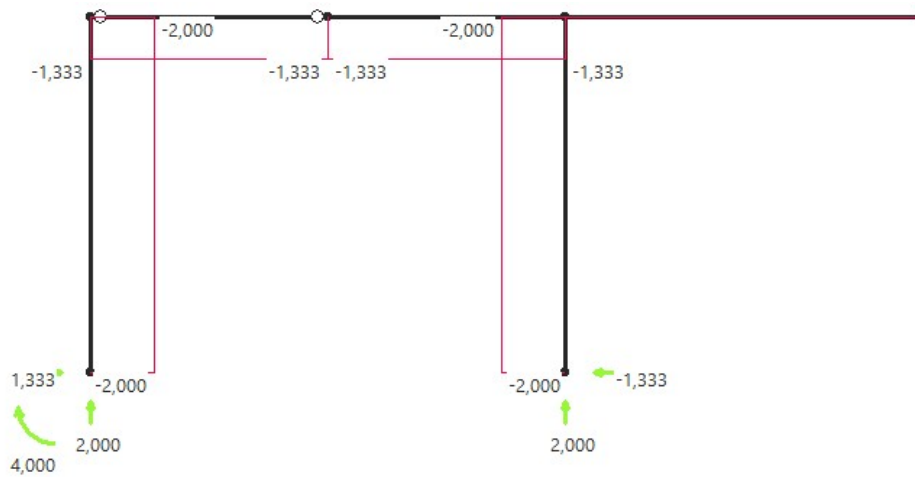
Stan p*



M_p^* [kNm]



N_p^* [kN]



$$\delta_{3ost} = \frac{M_3 \cdot M_{ost}}{EJ}$$

$$\delta_{3ost} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(1 \cdot 3 \cdot \left(\frac{-0,306 + 1,06}{2} \right) + (2-1) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-0,306 + (1,06 + 0,306) \cdot \frac{2}{3} \right) + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1,136 - (0,306 + 1,136) \cdot \frac{2}{3} \right) \right) \text{ kN m}^2 + 0,0295$$

$$+ \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-1,136 + (1,422 + 1,136) \cdot \frac{2}{3} \right) + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,366 \cdot \frac{2}{3} \right) \text{ kN m}^2$$

$$\delta_{3t0} := -0,5 \cdot \frac{1}{m} \cdot 3 \text{ m} \cdot \alpha_t \cdot t_0 = -0,0004$$

Tutaj używamy po prostu wykresów z nowego stanu wirtualnego.

$$\delta_{3\Delta t} := 1 \cdot 3 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} = 0,0045$$

$$\delta_{3\Delta} := -2 \cdot \Delta = -0,0349$$

$$\delta_{3k} = \frac{R_{ost} \cdot R_3}{k}$$

Tutaj bierzemy reakcję ze stanu ostatecznego i reakcję z nowego stanu wirtualnego

$$\delta_{3k} := \frac{1,297 \text{ kN} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{m}}{k} = 0,0013$$

$$\delta_3 := \delta_{3ost} + \delta_{3t0} + \delta_{3\Delta t} + \delta_{3\Delta} + \delta_{3k} = -4,5377 \cdot 10^{-7} \quad \text{powinno wyjść bardzo bliskie 0}$$

jeszcze liczymy jedną deltę dla porównania. Mnożymy nowy stan wirtualny razy nowy stan p.

$$\delta_{3p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + (2-1) \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \right) \text{ kN m}^2 = 0,1061$$

$$\frac{\delta_3}{\delta_{3p}} \cdot 100 \% = -0,0004 \% \quad < 5\% - \text{warunek spełniony}$$