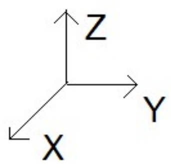
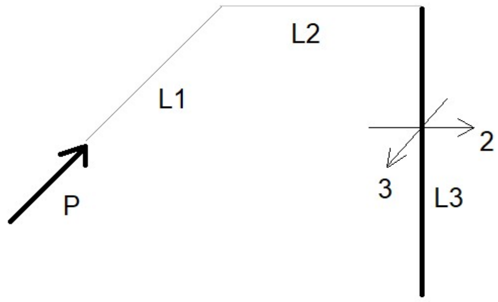
Na początek krótki poradnik rysowania wykresów

Kierunek działania siły skupionej, oś lokalna pręta i ramię działania siły mają być na trzech różnych osiach.

Przykład:



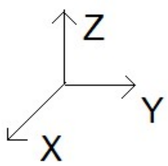


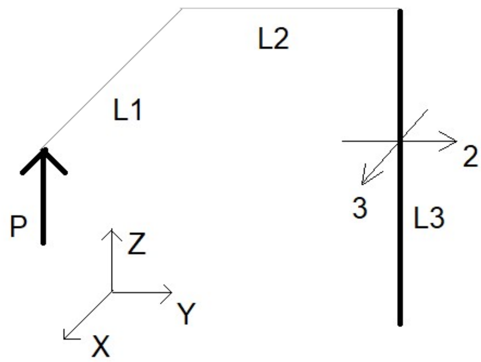
Momenty w osi lokalnej 2:
- siła P jest na kierunku X,
- oś lokalna 2 jest na kierunku Y,
- więc ramie siły jest wzdłuż Z, czyli w tym przypadku wzdłuż pręta, co oznacza, że moment na kierunku 2 będzie liniowo zmienny od 0 do P*L3

Moment w osi lokalnej 3:
- siła P jest na kierunku X,
- oś lokalna 3 jest na kierunku X,
- są to dwa takie same kierunki, więc P nie ma wpływu na momenty w osi 3 (M=0).

Moment skręcający (w osi lokalnej 1, czyli zawsze wzdłuż pręta):
- siła P jest na kierunku X,
- oś lokalna 1 jest na kierunku Z,
- więc ramie siły jest wzdłuż Y, czyli w tym przypadku wartość momentu skręcającego będzie stała P*L2

Przykład:





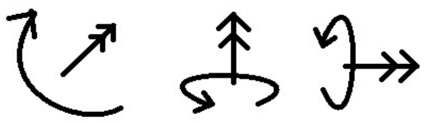
Momenty w osi lokalnej 2:
- siła P jest na kierunku Z,
- oś lokalna 2 jest na kierunku Y,
- więc ramie siły jest wzdłuż X, czyli w tym przypadku wartość momentu w osi 2 będzie stała P*L1

Moment w osi lokalnej 3:
- siła P jest na kierunku Z,
- oś lokalna 3 jest na kierunku X,
- więc ramie siły jest wzdłuż Y, czyli w tym przypadku wartość momentu w osi 2 będzie stała P*L2

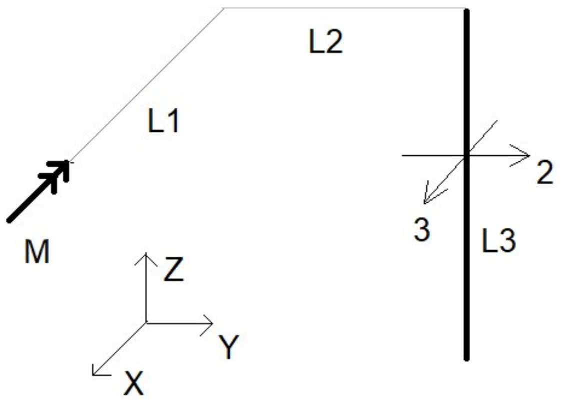
Moment skręcający (w osi lokalnej 1, czyli zawsze wzdłuż pręta):
- siła P jest na kierunku Z,
- oś lokalna 1 jest na kierunku Z,
- są to dwa takie same kierunki, więc P nie ma wpływu na momenty skręcające (M=0).

Obciążenie ciągłe działa w ten sam sposób, tylko zamiast wykresu liniowo zmiennego jest wykres paraboliczny, a wykres prostokątny to nadal wykres prostokątny. Obciążenie ciągłe można zastąpić siłą skupioną w środku obciążenia, wartość siły to wartość obciążenia razy długość obciążenia.

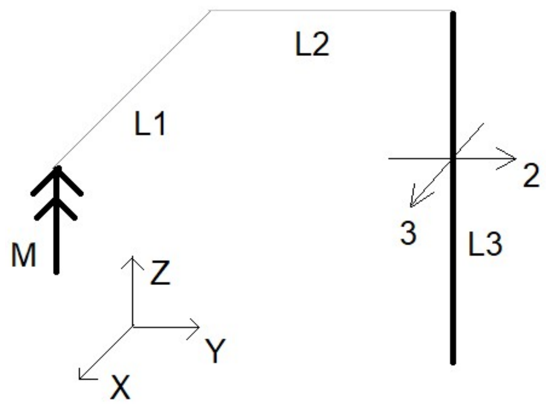
Momenty skupione działają zgodnie z zasadą prawej dłoni. Kciuk pokazuje kierunek strzałki, a palce pokazują jak ten moment kręci:



Kierunek działania momentu skupionego oś lokalna pręta i mają być na tej samej osi. Przykłady:



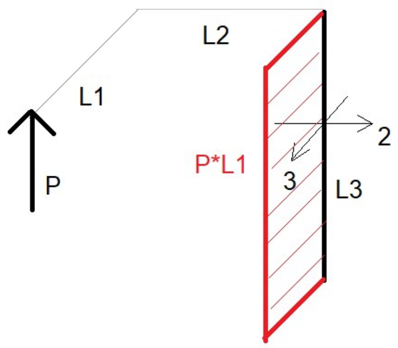
Ten moment działa tylko na momenty w osi 3.



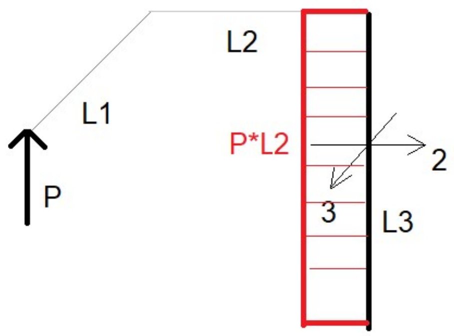
Ten moment działa tylko na momenty w osi 1 czyli na momenty skręcające.

Wykresy momentów zginających zawsze rysujemy w płaszczyźnie prostopadłej do osi lokalnej, po stronie włókien rozciąganych. Przykłady:

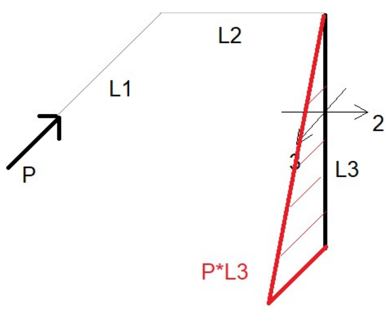
M2



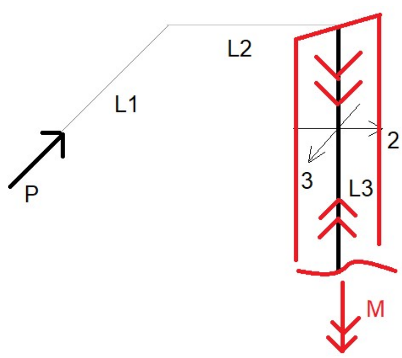
M3



M2



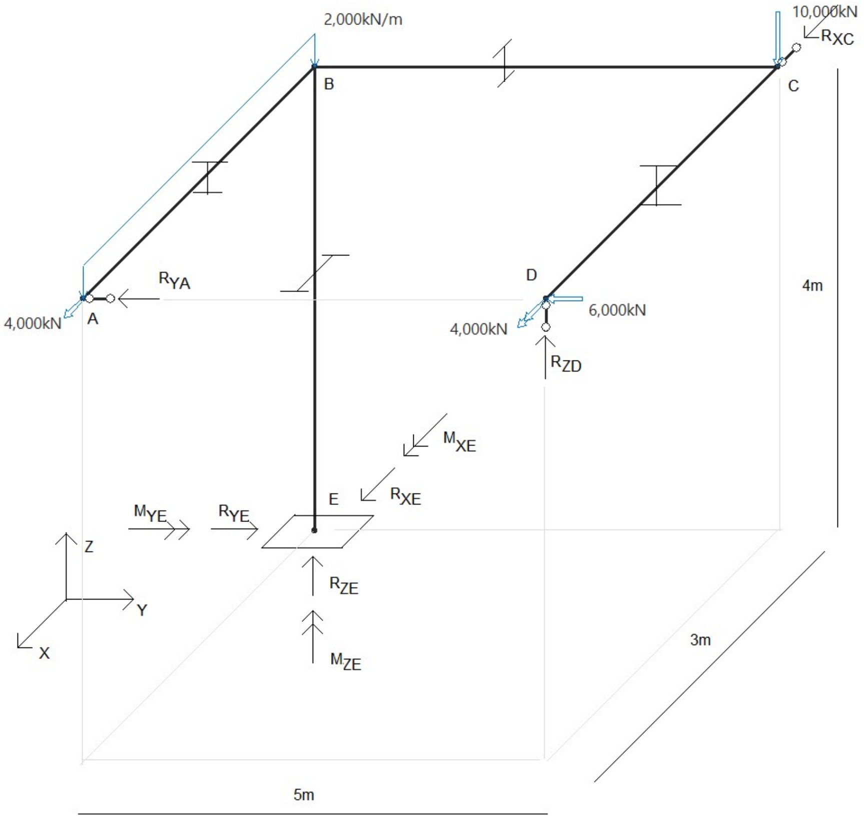
m



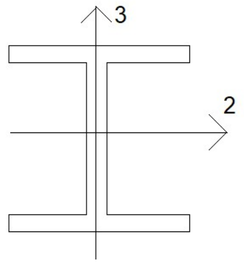
Siła P kręci prętem tak samo jak kierunek dodatni M (można ustawić rękę kciukiem w dół - palce kręcą tak jak siła P), żeby była równowaga to M musi być ujemne, czyli -P*L2

Rama przestrzenna - przykładowy projekt

Wszystkie uwagi będą pisane kolorem czerwonym



Układ lokalny



Przekrój IPE 160

$$J_2 := 869\ \text{cm}^4$$

$$J_3 := 68.3\ \text{cm}^4$$

$$I_0 := 3.6\ \text{cm}^4$$

$$E := 210\ \text{GPa}$$

$$\nu := 0.3$$

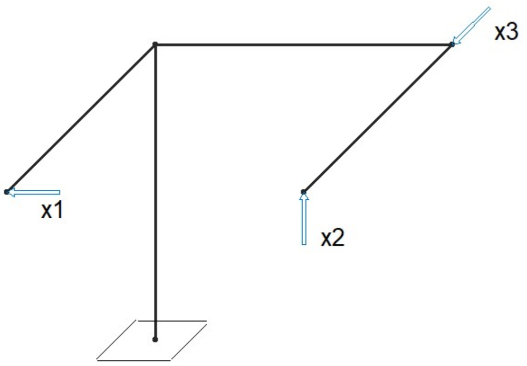
$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 80.7692\ \text{GPa}$$

$$EJ_2 := E \cdot J_2 = 1824.9\ \text{kN m}^2$$

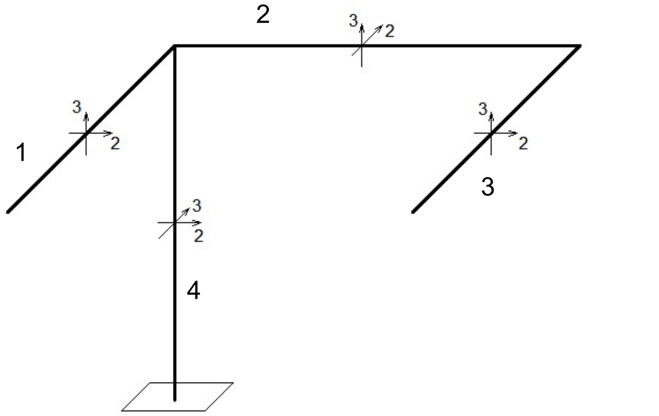
$$EJ_3 := E \cdot J_3 = 143.43\ \text{kN m}^2$$

$$GI_0 := G \cdot I_0 = 2.9077\ \text{kN m}^2$$

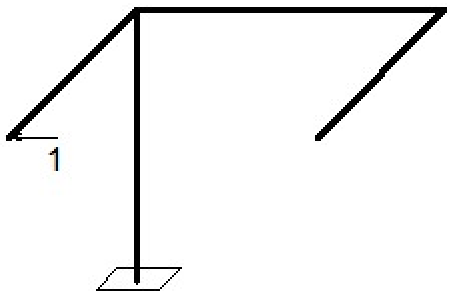
UPMS



Kierunki układów lokalnych i numeracja prętów



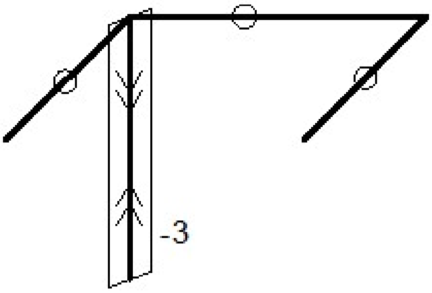
Stan x1=1



m x1 [m]

momenty skręcające

możemy przyjąć, że kierunek dodatni w przekroju pręta jest od pręta do zewnątrz (tak jak siły normalne)



$$m_{x1} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

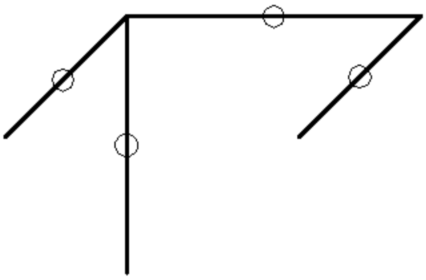
M2 x1 [m]

momenty w płaszczyźnie prostopadłej do osi lokalnych 2

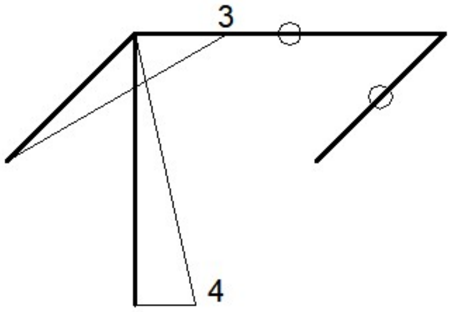
M3 x1 [m]

momenty w płaszczyźnie prostopadłej do osi lokalnych 3

możemy przyjąć, że wszystkie wykresy "do wewnątrz" ramy będą dodatnie, a "na zewnątrz" będą ujemne.

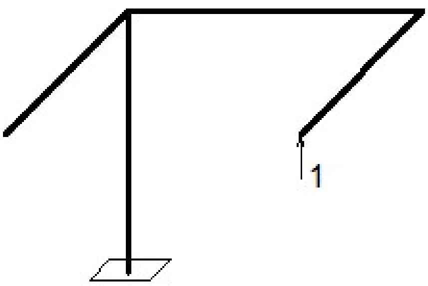


$$M2_{x1} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

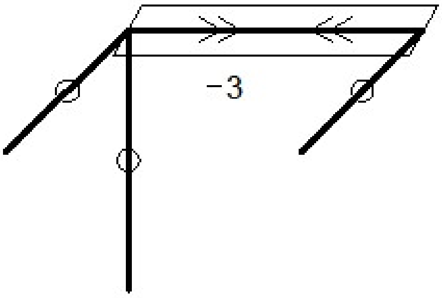


$$M3_{x1} := \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Stan x2=1

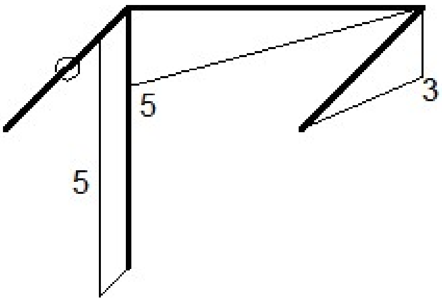


m x2 [m]



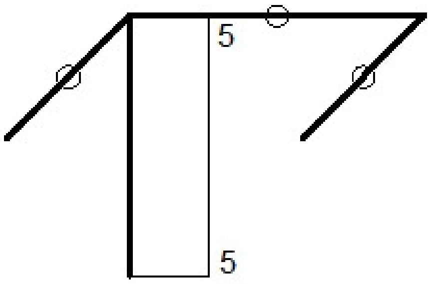
$$m_{x2} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M2 x2 [m]



$$M2_{x2} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

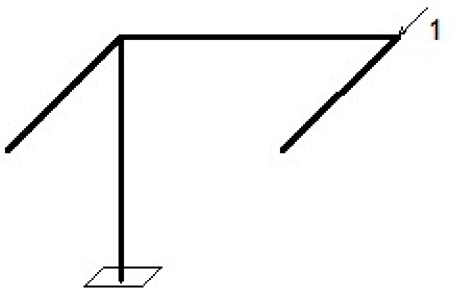
M3 x2 [m]



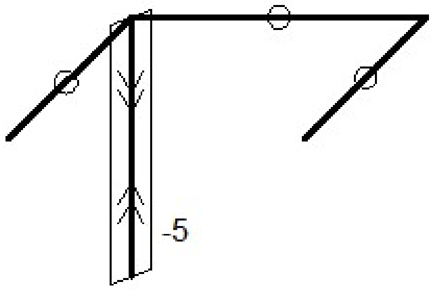
$$M3_{x2} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

UWAGA! Wszystkie wykresy należy policzyć. Tutaj obliczenia zostały pominięte, bo nie to jest głównym problemem tego projektu.

Stan x3=1

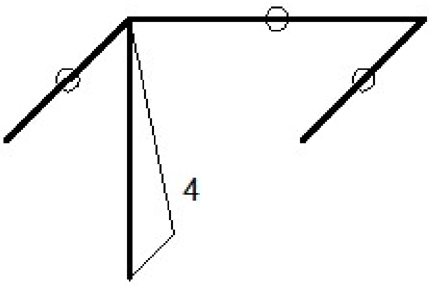


m x3 [m]



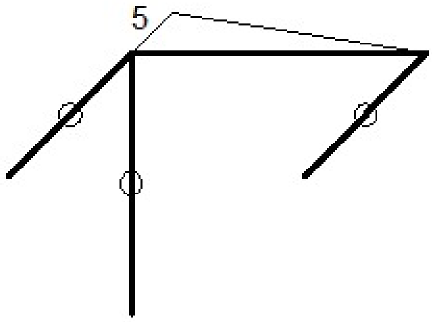
$$m_{x3} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

M2 x3 [m]



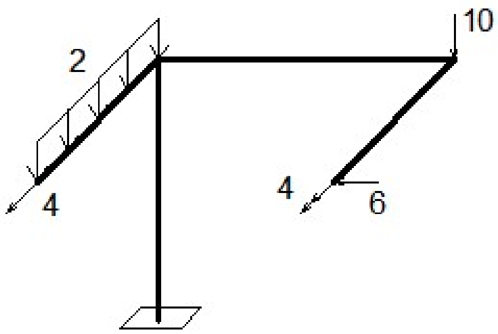
$$M2_{x3} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

M3 x3 [m]

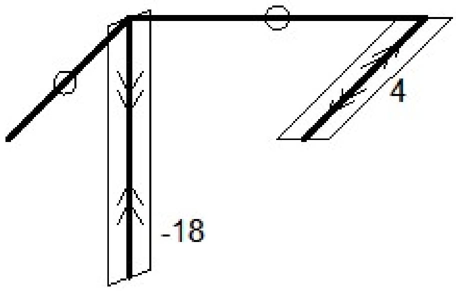


$$M3_{x3} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Stan p

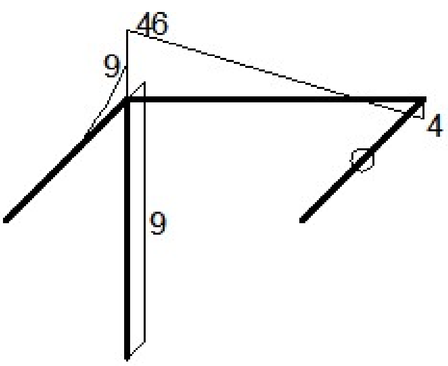


m p [kNm]



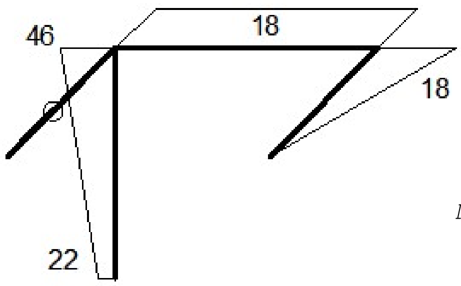
$$m_p := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 4 \\ -18 & -18 \end{bmatrix}$$

M2 p [kNm]



$$M2_p := \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -46 & 4 \\ 0 & 0 \\ -9 & -9 \end{bmatrix}$$

M3 p [kNm]



$$M3_p := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -18 & -18 \\ -18 & 0 \\ -46 & -22 \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie delt

$$\delta_{11} := \frac{m^3}{EJ_2} \cdot 0 + \frac{m^3}{EJ_3} \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}\right) + \frac{m^3}{GI_0} \cdot ((-3) \cdot (-3) \cdot 4) = 12.5924 \ \frac{m}{kN}$$

$$\delta_{12} := \frac{m^3}{EJ_2} \cdot 0 + \frac{m^3}{EJ_3} \cdot \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\right) + \frac{m^3}{GI_0} \cdot 0 = 0.2789 \ \frac{m}{kN}$$

$$\delta_{13} := \frac{m^3}{EJ_2} \cdot 0 + \frac{m^3}{EJ_3} \cdot 0 + \frac{m^3}{GI_0} \cdot ((-3) \cdot (-5) \cdot 4) = 20.6349 \ \frac{m}{kN}$$

$$\delta_{21} := \delta_{12}$$

$$\delta_{22} := \frac{m^3}{EJ_2} \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot 5 \cdot 4\right) + \frac{m^3}{EJ_3} \cdot (5 \cdot 5 \cdot 4) + \frac{m^3}{GI_0} \cdot ((-3) \cdot (-3) \cdot 5) = 16.256 \ \frac{m}{kN}$$

$$\delta_{23} := \frac{m^3}{EJ_2} \cdot \left(-4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\right) + \frac{m^3}{EJ_3} \cdot 0 + \frac{m^3}{GI_0} \cdot 0 = -0.0219 \ \frac{m}{kN}$$

$$\delta_{31} := \delta_{13}$$

$$\delta_{32} := \delta_{23}$$

$$\delta_{33} := \frac{m^3}{EJ_2} \cdot \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}\right) + \frac{m^3}{EJ_3} \cdot \left(5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3}\right) + \frac{m^3}{GI_0} \cdot ((-5) \cdot (-5) \cdot 4) = 34.6937 \ \frac{m}{kN}$$

$$\delta_{1p} := \frac{kN\ m^3}{EJ_2} \cdot 0 + \frac{kN\ m^3}{EJ_3} \cdot \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-22 - (46 - 22) \cdot \frac{1}{3}\right)\right) + \frac{kN\ m^3}{GI_0} \cdot ((-3) \cdot (-18) \cdot 4) = 72.6124 \ m$$

$$\delta_{2p} := \frac{kN\ m^3}{EJ_2} \cdot \left(5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4 - (46 + 4) \cdot \frac{2}{3}\right) - 5 \cdot 9 \cdot 4\right) + \frac{kN\ m^3}{EJ_3} \cdot \left(-5 \cdot 4 \cdot \left(\frac{46 + 22}{2}\right)\right) + \frac{kN\ m^3}{GI_0} \cdot 0 = -5.0405 \ m$$

$$\delta_{3p} := \frac{kN\ m^3}{EJ_2} \cdot \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9\right) + \frac{kN\ m^3}{EJ_3} \cdot \left(5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18\right) + \frac{kN\ m^3}{GI_0} \cdot ((-5) \cdot (-18) \cdot 4) = 125.4177 \ m$$

Rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \delta_{13} \cdot x_3 + \delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \delta_{23} \cdot x_3 + \delta_{2p} = 0 \\ \delta_{31} \cdot x_1 + \delta_{32} \cdot x_2 + \delta_{33} \cdot x_3 + \delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

$$W := \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \qquad F := -\begin{bmatrix} \delta_{1p} \\ \delta_{2p} \\ \delta_{3p} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} := W^{-1} \cdot F = \begin{bmatrix} 6.0291 \\ 0.1969 \\ -7.2008 \end{bmatrix} kN$$

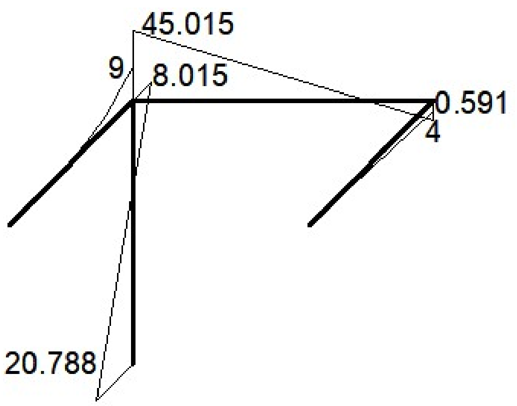
Momenty ostateczne

$$M2_{ost} := M2_{x1}\ \mathrm{m}\cdot x_1 + M2_{x2}\ \mathrm{m}\cdot x_2 + M2_{x3}\ \mathrm{m}\cdot x_3 + M2_p\ \mathrm{kN\ m} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -45.0153 & 4 \\ 0.5908 & 0 \\ -8.0153 & 20.7879 \end{bmatrix} \mathrm{kN\ m}$$

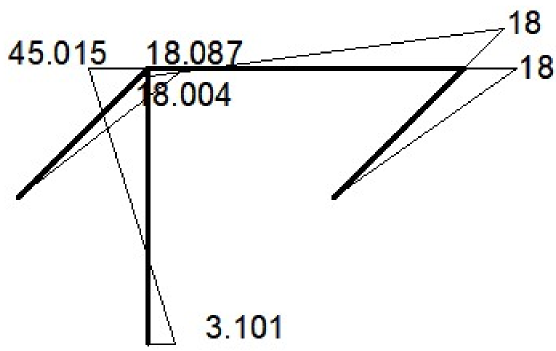
$$M3_{ost} := M3_{x1}\ \mathrm{m}\cdot x_1 + M3_{x2}\ \mathrm{m}\cdot x_2 + M3_{x3}\ \mathrm{m}\cdot x_3 + M3_p\ \mathrm{kN\ m} = \begin{bmatrix} 0 & 18.0872 \\ 18.0041 & -18 \\ -18 & 0 \\ -45.0153 & 3.101 \end{bmatrix} \mathrm{kN\ m}$$

$$m_{ost} := m_{x1}\ \mathrm{m}\cdot x_1 + m_{x2}\ \mathrm{m}\cdot x_2 + m_{x3}\ \mathrm{m}\cdot x_3 + m_p\ \mathrm{kN\ m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5908 & -0.5908 \\ 4 & 4 \\ -0.0832 & -0.0832 \end{bmatrix} \mathrm{kN\ m}$$

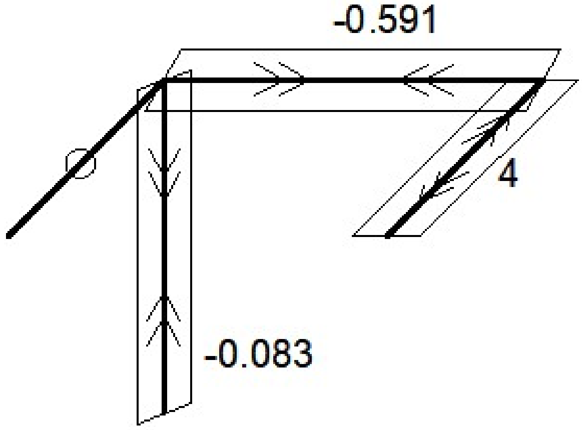
M2 ost [kNm]



M3 ost [kNm]

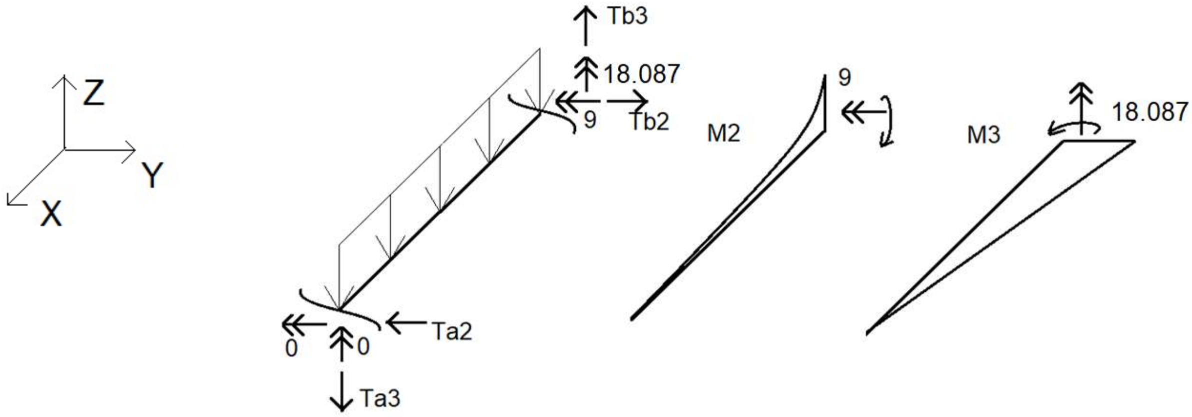


m ost [kNm]



Obliczenie tnących ostatecznych z metody równowagi prętów

Przykład na pręcie z obciążeniem ciągłym:



Aby ustalić w którą stronę mają być skierowane strzałki momentów można skożystać z reguły prawej dłoni, patrząc po wykresach momentów w obu kierunkach. Kierunki strzałek tnących mogą mieć dowolny zwrot, aby potem się trzymać tego.

ΣMya $\quad -0-9\ \mathrm{kN\,m}-2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\cdot 3\ \mathrm{m}\cdot\frac{3\ \mathrm{m}}{2}+Tb3\cdot 3\ \mathrm{m}=0$

$$Tb3:=\frac{0+9\ \mathrm{kN\,m}+2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\cdot 3\ \mathrm{m}\cdot\frac{3\ \mathrm{m}}{2}}{3\ \mathrm{m}}=6\ \mathrm{kN}$$

$YZ \quad -Ta3+Tb3-2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\cdot 3\ \mathrm{m}=0$

$$Ta3:=Tb3-2\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}\cdot 3\ \mathrm{m}=0$$

ΣMza $\quad 0+18.087\ \mathrm{kN\,m}-Tb2\cdot 3\ \mathrm{m}=0$

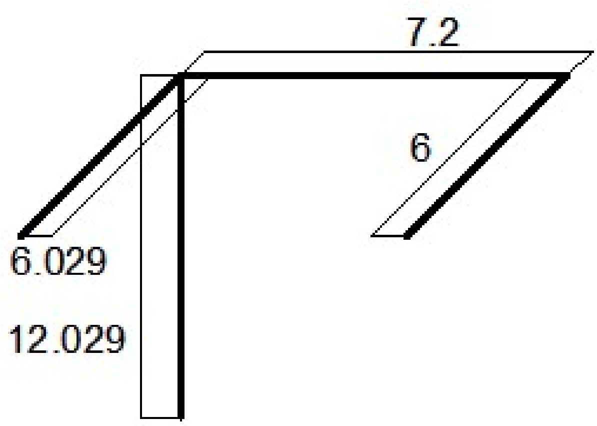
$$Tb2:=\frac{18.087\ \mathrm{kN\,m}}{3\ \mathrm{m}}=6.029\ \mathrm{kN}$$

ΣY $\quad Tb2-Ta2=0$

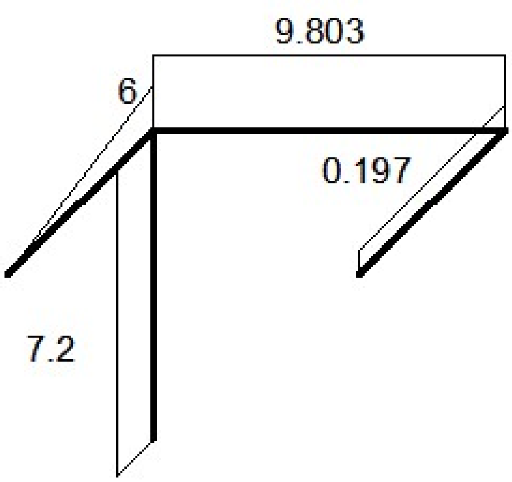
$$Ta2:=Tb2=6.029\ \mathrm{kN}$$

Jeszcze trzy pręty do policzenia

T2 ost [kN]

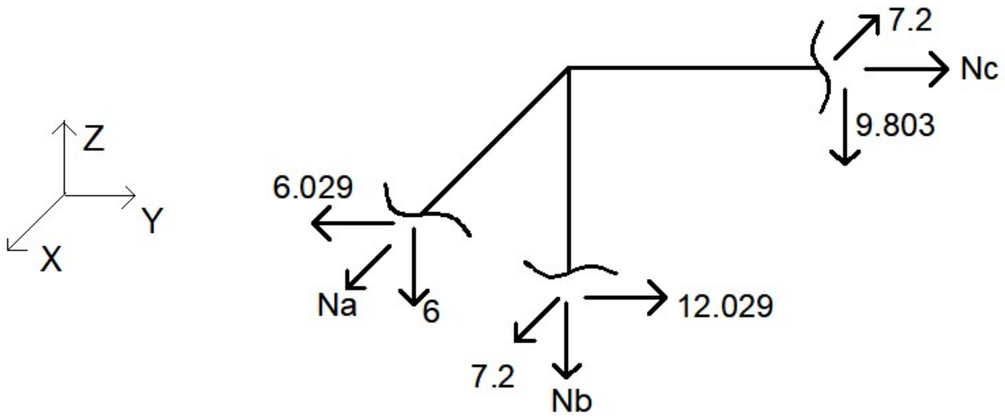


T3 ost [kN]



Obliczenie normalnych ostatecznych z metody równowagi węzłów

Przykład na jednym węźle. Spisujemy z wykresów tnącę, ale musimy zmienić zwroty strzałem, które zostały ustalone przy równoważeniu prętów. Jeżeli na węźle jest siła skupiona, albo reakcja skupiona to też należy ją uwzględnić w równowadze.



ΣX $Na + 7.2\ \mathrm{kN} - 7.2\ \mathrm{kN} = 0$

$Na := 0$

ΣY $-6.029\ \mathrm{kN} + 12.029\ \mathrm{kN} + Nc = 0$

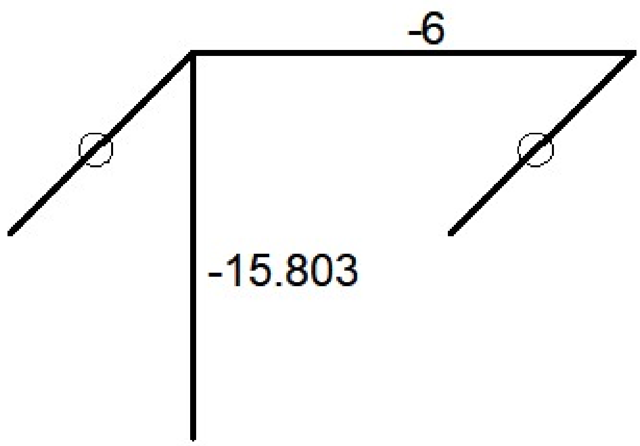
$Nc := 6.029\ \mathrm{kN} - 12.029\ \mathrm{kN} = -6\ \mathrm{kN}$

ΣZ $-6\ \mathrm{kN} - Nb - 9.803\ \mathrm{kN} = 0$

$Nb := -6\ \mathrm{kN} - 9.803\ \mathrm{kN} = -15.803\ \mathrm{kN}$

Jeszcze jeden węzeł do policzeni. Można dla pewności sprawdzić, co się dzieje z prętami. Rozciąganie jest dodatnie, a ściskanie ujemne.

N [kN]



Projekt można sobie sprawdzić w programie RM-WIN 3D lub ABC Rama 3D, jednak wydruki z programów w tym przypadku nie są wymagane.