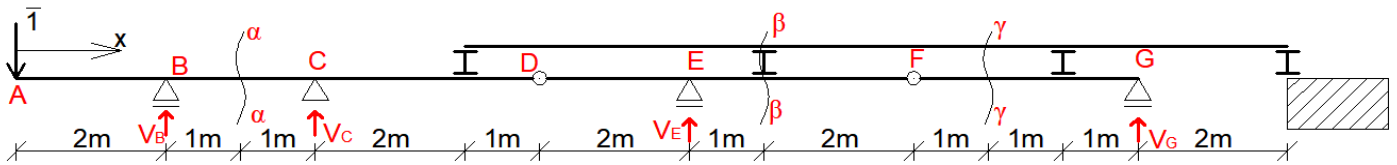


## Linia wpływu - belka



Na początek rozwiążemy powyższą linię wpływu. W tym zadaniu należy:

- narysować wszystkie linie wpływu od reakcji i dwóch przekrojów (dla przecięcia tutaj są trzy), z wykorzystaniem belki pośredniej,
- narysować obwiednię momentów dla zadanego obciążenia ciągłego (o tym później), z wykorzystaniem belki bezpośredniej, w 8-12 przekrojach od punktu A do B (tutaj zrobimy sobie od B do F).

Rozważmy na razie tylko belkę bezpośrednią (dolną).

Siła 1 jest ruchoma. Wartość  $x$  mówi, w którym miejscu stoi siła 1. Linie wpływu Reakcji, to wartości ile wynosi reakcja w zależności od położenia siły 1.

Policzymy metodą statyczną reakcję  $V_G$  i  $V_E$ , resztę zrobimy szybciej metodą kinematyczną.

Kolejność obliczeń reakcji jest taka sama, jak gdybyśmy rozwiązywali zadanie ze statyki

**LW V.G:**  $\sum M_F^P = 0$

$x \in (0;12)\text{m}$   $V_G \cdot 3\text{ m} = 0$

$V_G := 0$

$x \in (12;15)\text{m}$   $V_G \cdot 3\text{ m} - 1 \cdot (x - 12\text{ m}) = 0$   $V_G := \frac{1 \cdot (x - 12\text{ m})}{3\text{ m}}$

$x = 12\text{ m}$   $V_G := \frac{1 \cdot (12\text{ m} - 12\text{ m})}{3\text{ m}} = 0$

$x = 15\text{ m}$   $V_G := \frac{1 \cdot (15\text{ m} - 12\text{ m})}{3\text{ m}} = 1$



**LW V.E:**  $\sum M_D^P = 0$

$x \in (0;7)\text{m}$   $V_E \cdot 2\text{ m} + V_G \cdot 8\text{ m} = 0$

$x \in (7;15)\text{m}$   $V_E \cdot 2\text{ m} + V_G \cdot 8\text{ m} - 1 \cdot (x - 7\text{ m}) = 0$   $V_E := \frac{-V_G \cdot 8\text{ m} + 1 \cdot (x - 7\text{ m})}{2\text{ m}}$

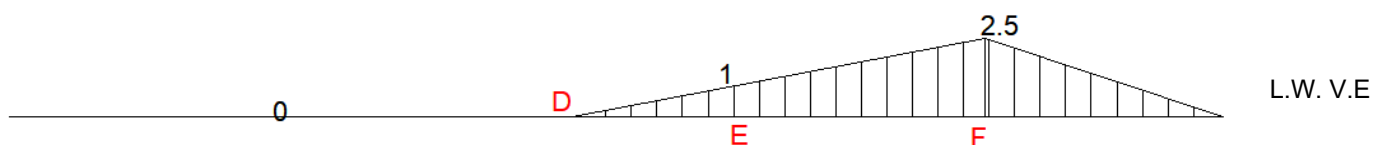
$x = 7\text{ m}$   $V_E := \frac{-0 \cdot 8\text{ m} + 1 \cdot (7\text{ m} - 7\text{ m})}{2\text{ m}} = 0$

$x = 9\text{ m}$   $V_E := \frac{-0 \cdot 8\text{ m} + 1 \cdot (9\text{ m} - 7\text{ m})}{2\text{ m}} = 1$

$x = 12\text{ m}$   $V_E := \frac{-0 \cdot 8\text{ m} + 1 \cdot (12\text{ m} - 7\text{ m})}{2\text{ m}} = 2.5$

$x = 15\text{ m}$   $V_E := \frac{-1 \cdot 8\text{ m} + 1 \cdot (15\text{ m} - 7\text{ m})}{2\text{ m}} = 0$

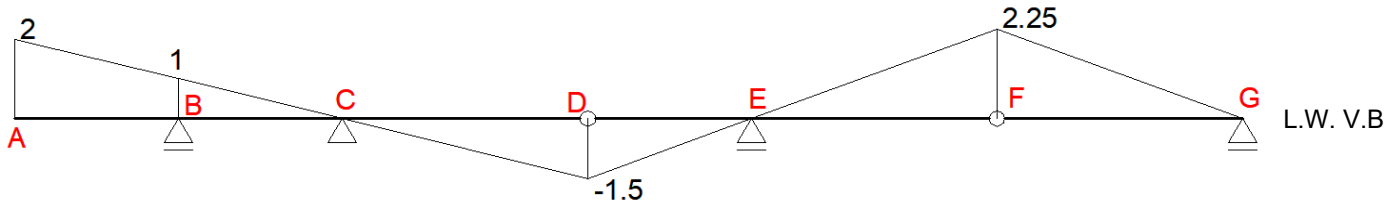
Proszę zobaczyć, w tym wzorze na  $V_E$  występuje  $V_G$ , które jest zmienne, zależne od  $x$ . Za każdym razem jak liczymy  $V_E$ , to sprawdzamy na wyznaczonej wcześniej linii wpływu  $V_G$  ile to  $V_G$  wynosi dla odpowiedniego  $x$ . W tym przypadku gdy  $x=7$  to  $V_G=0$ , gdy  $x=12$  to też  $V_G=0$ , gdy  $x=15$  to  $V_G=1$ . Widać to na tym wykresie powyżej.



Pozostałe dwie reakcje wyznaczmy metodą kinematyczną

Należy zapamiętać kilka zasad przy liczeniu linii wpływu reakcji skupionej:

- Wartość L.W. w miejscu tej reakcji jest równa 1,
- Wartość L.W. w miejscu pozostałych podpór jest równa 0,
- W pełnym utwierdzeniu L.W. jest pozioma,
- Tylko w przegubie może być załamanie wykresu,
- Zaczynamy rysowanie od dwóch sąsiadujących obok siebie podpór, lub od pełnego utwierdzenia.



Przeanalizujmy powyższy rysunek:

Rysujemy linię wpływu V.B, więc w B jest 1, a w C, E i G jest 0, bo to są pozostałe podpory.

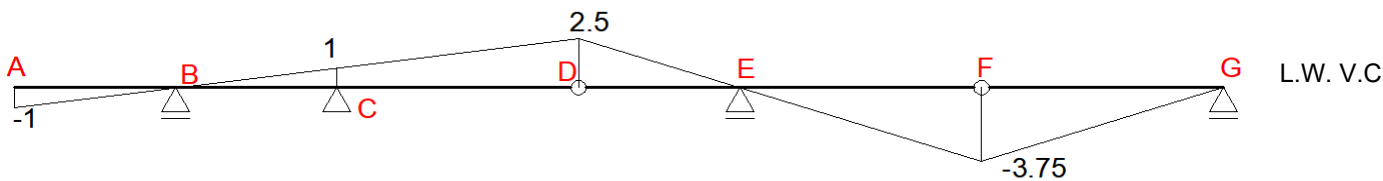
Łączymy punkty B i C, bo to są sąsiadujące podpory. Ciągniemy linię maksymalnie w lewo (do końca belki) i maksymalnie w prawo (do przegubu).

Łączymy punkt D i E i ciągniemy linię maksymalnie w prawo (aż do przegubu).

Łączymy punkt F i G.

Wartości na wykresach w załamaniach liczymy z proporcji.

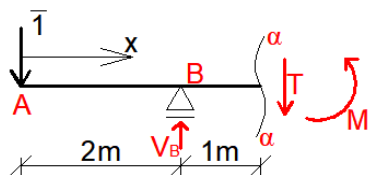
Poniżej jest właściwie ta sama sytuacja, tylko to w C jest wartość 1.



## Linie wpływu Tnących i Momentów

Policzymy L.W T i M w przekroju  $\alpha$ - $\alpha$  statycznie, pozostałe kinematycznie.

**Przekrój  $\alpha$ - $\alpha$ :**



Sily wewnętrzne liczymy przekrojami, tak jak na pierwszym roku, tylko tutaj przekrój stoi w miejscu, za to zmienia się położenie siły 1.

$$x \in (0;3)m \quad T := V_B - 1 \quad M := V_B \cdot 1m - 1 \cdot (3m - x) \quad \text{Tutaj jest siła 1,}$$

$$x \in (3;15)m \quad T := V_B \quad M := V_B \cdot 1m \quad \text{a tutaj już nie ma, bo jest na prawo od przekroju}$$

We wzorach pojawia się V.B, jego wartość dla odpowiednich x odczytujemy z wykresu L.W. V.B

$$x = 0 \quad T := 2 - 1 = 1 \quad M := 2 \cdot 1m - 1 \cdot (3m - 0) = -1m$$

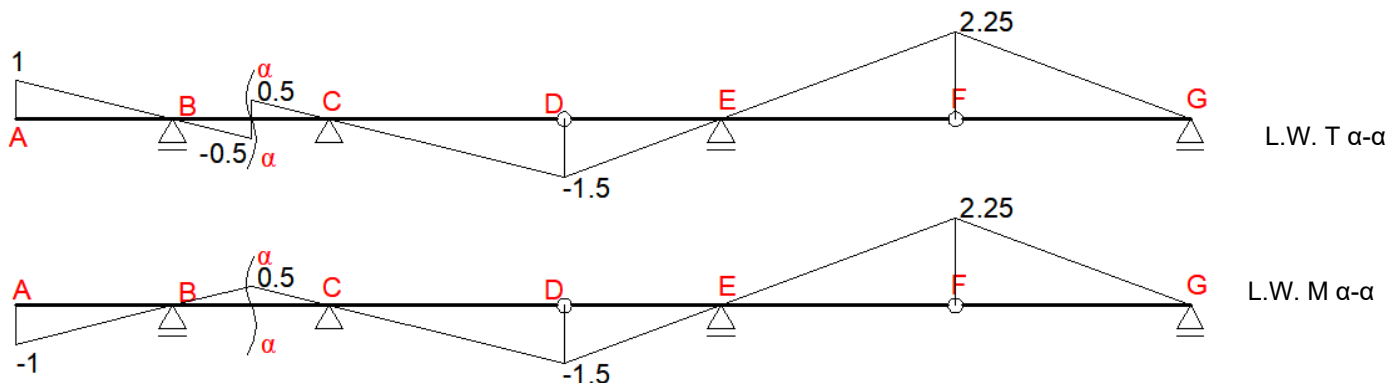
$$x = 2m \quad T := 1 - 1 = 0 \quad M := 1 \cdot 1m - 1 \cdot (3m - 2m) = 0$$

$$x = 3m \text{ tuż przed przekrojem} \quad T := 0.5 - 1 = -0.5 \quad M := 0.5 \cdot 1m - 1 \cdot (3m - 3m) = 0.5m$$

$$x = 3m \text{ tuż za przekrojem} \quad T := 0.5 = 0.5 \quad M := 0.5 \cdot 1m = 0.5m$$

Proszę zobaczyć, że w powyższych dwóch wynikach jest skok tnącej o 1 w górę (tak jest zawsze, jest skok w miejscu przekroju), natomiast moment się nie zmienił (tak też jest zawsze, nie może być skoku momentu).

Ze wzorów na T i M wynika, że dla x większych niż 3 jest to samo co na wykresie V.B, więc nie ma sensu dalej podstawiać.



UWAGA! Linię wpływu momentów rysujemy dodatnie na górze, ujemne na dole (na odwrót niż wykres momentów bo to nie są wykresy tnących i momentów, tylko linie wpływu)

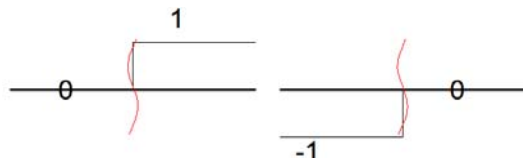
### Pozostałe dwa przekroje wyznaczamy metodą kinematyczną

Należy zapamiętać kilka zasad przy liczeniu linii wpływu T i M:

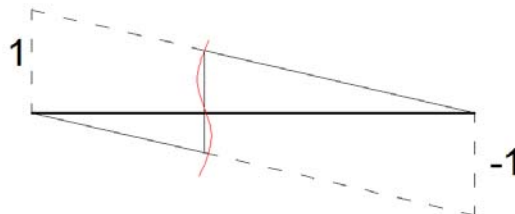
- Wartość L.W. w miejscu tej reakcji jest równa 0,
- W pełnym utwierdzeniu L.W. jest pozioma,
- Tylko w przegubie może być załamanie wykresu,
- W miejscu przekroju jest skok L.W. T o 1, w natomiast w L.W. M jest załamanie (kątem wypukły na górze)
- Zaczynamy rysowanie od dwóch sąsiadujących obok siebie podpór, lub od pełnego utwierdzenia.

### Skok tnącej rysujemy według poniższej zasady:

A) Jeżeli wiadomo, że po jednej stronie przekroju jest linia pozioma, to po drugiej, po skoku, też będzie pozioma

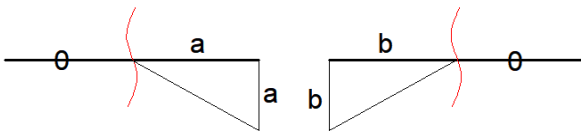


B) Jeżeli nie ma linii poziomej z żadnej strony to łączymy dwa najbliższe punkty z wartością 0 według rysunku. Wartości w przekroju liczymy z proporcji,

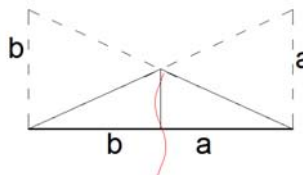


### Załamanie momentu rysujemy według poniższej zasady:

A) Jeżeli wiadomo, że po jednej stronie przekroju jest linia pozioma, to po drugiej linia będzie pod kątem 45 stopni.

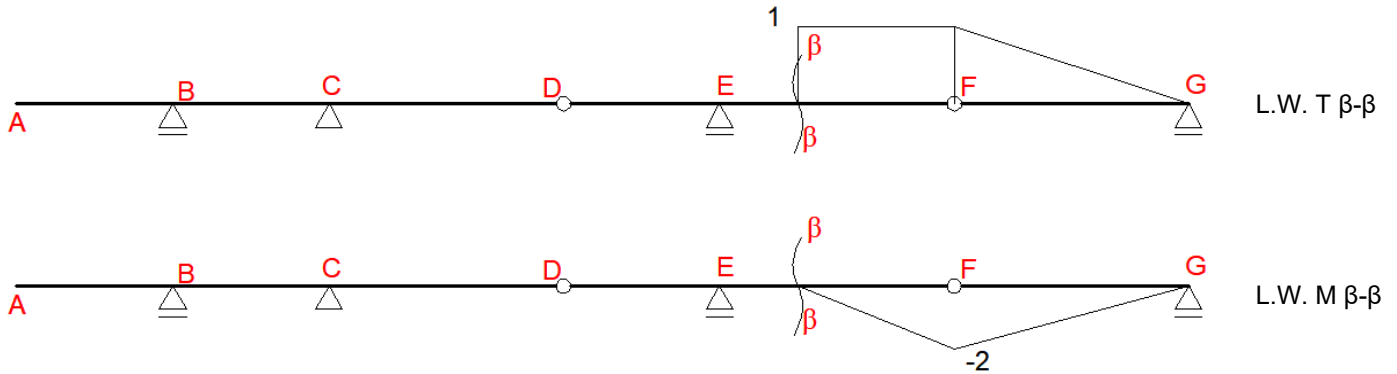


B) Jeżeli nie ma linii poziomej z żadnej strony to łączymy dwa najbliższe punkty z wartością 0 według rysunku. Wartość w przekroju liczymy z proporcji,



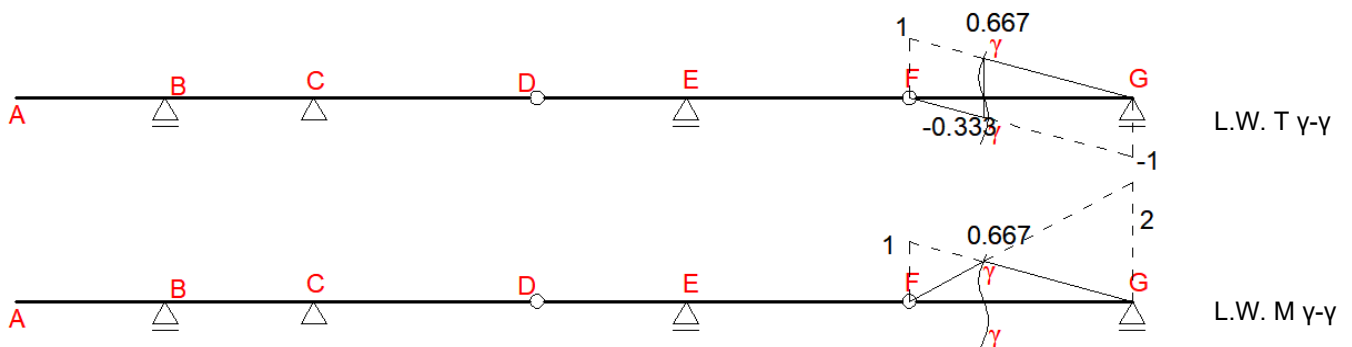
Przeanalizujmy więc jeszcze raz obie linie wpływu  $\alpha$ - $\alpha$ :

- Wszystkie podpory (B, C, E, G) mają wartość 0.
- Zaczynamy rysowanie od dwóch podpór obok siebie (B,C). Jako, że między nimi jest przekrój to rysujemy L.W. tnącej i momentu według zasady "B" powyżej. Wartość linii wpływu w miejscu przekroju liczymy z proporcji, wiedząc, że od B do przekroju jest 1m i od przekroju do C jest 1m.
- Przeciągamy linie w lewo do węzła A i w prawo do węzła D.
- Węzeł D to przegub więc będzie tu załamanie. Łączymy ten punkt z zerem w E i ciągniemy dalej aż do przegubu F.
- Tu jest załamanie, więc łączymy F z G.

**przekrój  $\beta$ - $\beta$ :**

Przeanalizujemy powyższy przykład, obie linie wpływu jednocześnie:

- We wszystkich podporach (B, C, E i G) wstawiamy 0.
- Łączymy dwie podpory obok siebie (B i C) - daje nam to linię poziomą. Ciągniemy ją w lewo do A i w prawo do D.
- Węzeł D to przegub, więc może być załamanie. Łączymy to z zerem w E, co dalej daje nam linię poziomą, ciągniemy ją dalej i natrafiamy na przekrój  $\beta$ - $\beta$ .
- Jako, że na lewo od przekroju jest linia pozioma to dla L.W. tnącej i momentu korzystamy z zasady "A". Wartość linii wpływu w punkcie F wynosi -2 dlatego, że od przekroju do F jest 2m (bo linia wpływu jest pod kątem 45 stopni).
- Łączymy F z zerem w G.

**przekrój  $\gamma$ - $\gamma$ :**

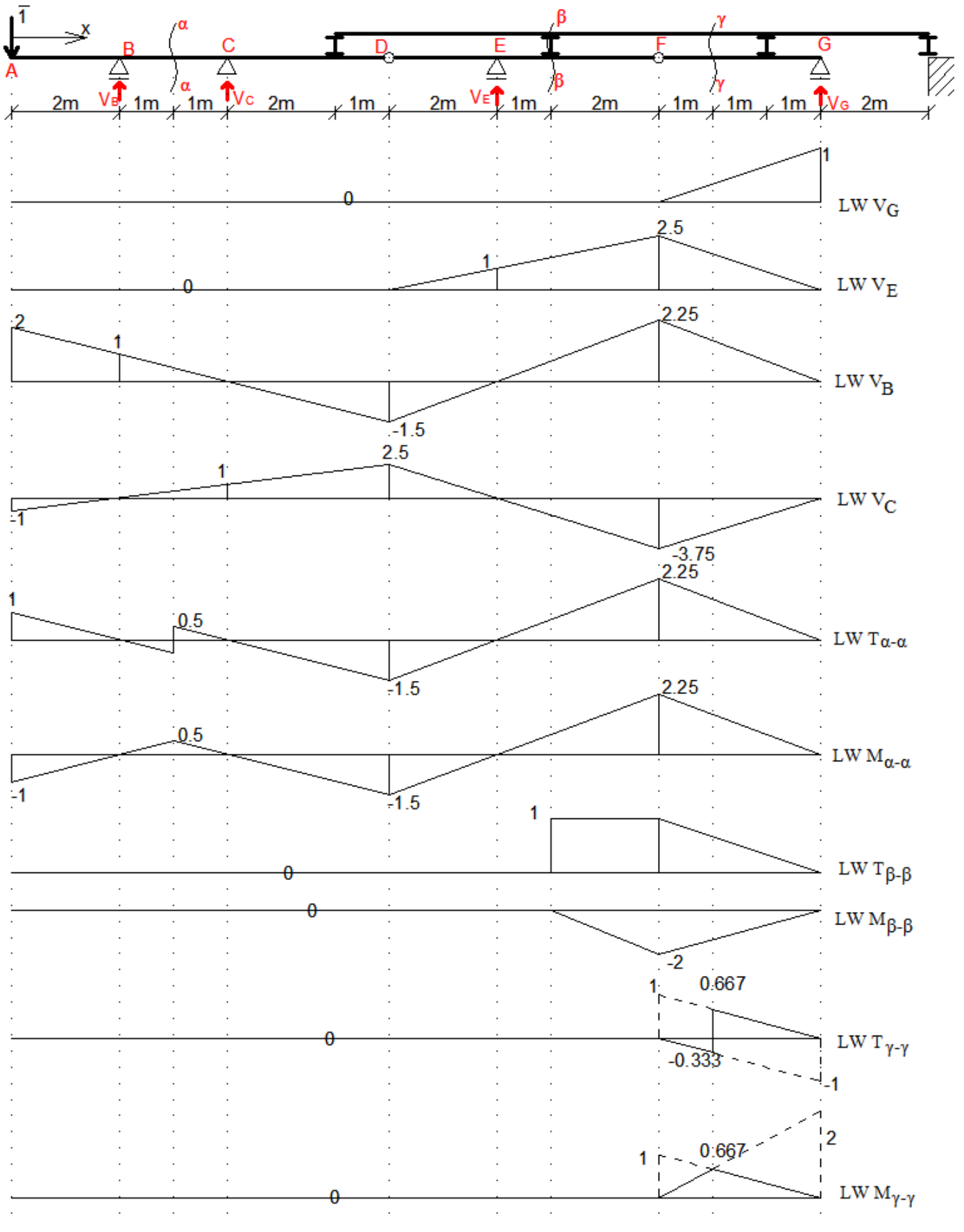
Przeanalizujemy powyższy przykład, obie linie wpływu jednocześnie:

- We wszystkich podporach (B, C, E i G) wstawiamy 0.
  - Łączymy dwie podpory obok siebie (B i C) - daje nam to linię poziomą. Ciągniemy ją w lewo do A i w prawo do D.
  - Węzeł D to przegub, więc może być załamanie. Łączymy to z zerem w E, co dalej daje nam linię poziomą, ciągniemy ją dalej aż do punktu F.
  - Następny za punktem F jest przekrój  $\gamma$ - $\gamma$ . Nie możemy do niego pojechać poziomo, bo w przegubie jest załamanie - nie wiemy, czy linia będzie pozioma, dlatego między punktami F i G, w których są wartości 0 korzystamy z zasady "B".
- Proporcje, z których policzono wartości są na rysunkach L.W.

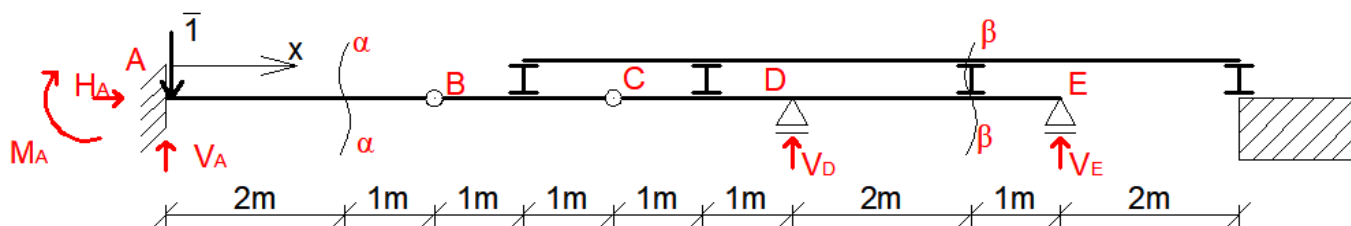
Proszę uważać, nie ma reguły, czy wariant "B" jest między przegubem a podporą, ale zawsze jest między dwiema podporami i między dwoma przegubami.

Wszystkie linie wpływu rysujemy na jednej stronie. Na górze rysujemy belkę, a pod nią po kolei linie wpływu, tak jak na następnej stronie. Proszę pamiętać, aby linie wpływu nie nachodziły na siebie, ale były na tyle płaskie żeby nie zajęło to trzech stron i nie za bardzo płaskie, żeby dało się je odczytać.

LINIE WPŁYWU DLA BELKI BEZPOŚREDNIEJ:



## Przykład z pełnym utwierdzeniem



Teraz pokażę tylko rozwiązanie metodą kinematyczną, gdyż mam nadzieję, że metoda statyczna jest zrozumiała.

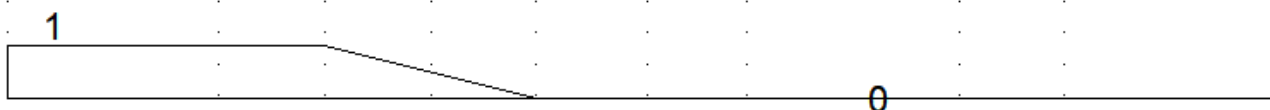
Przypomnę zasady rysowania lw dla reakcji, ale dodamy jeszcze jedną zasadę.

Należy zapamiętać kilka zasad przy liczeniu linii wpływu reakcji skupionej:

- Wartość L.W. w miejscu tej reakcji jest równa 1,
- Wartość L.W. w miejscu pozostałych podpór jest równa 0,
- W pełnym utwierdzeniu L.W. jest pozioma,
- Tylko w przegubie może być załamanie wykresu,
- Zaczynamy rysowanie od dwóch sąsiadujących obok siebie podpór, lub od pełnego utwierdzenia.

**- Linia wpływu w miejscu pełnego utwierdzenia jest zawsze pozioma**

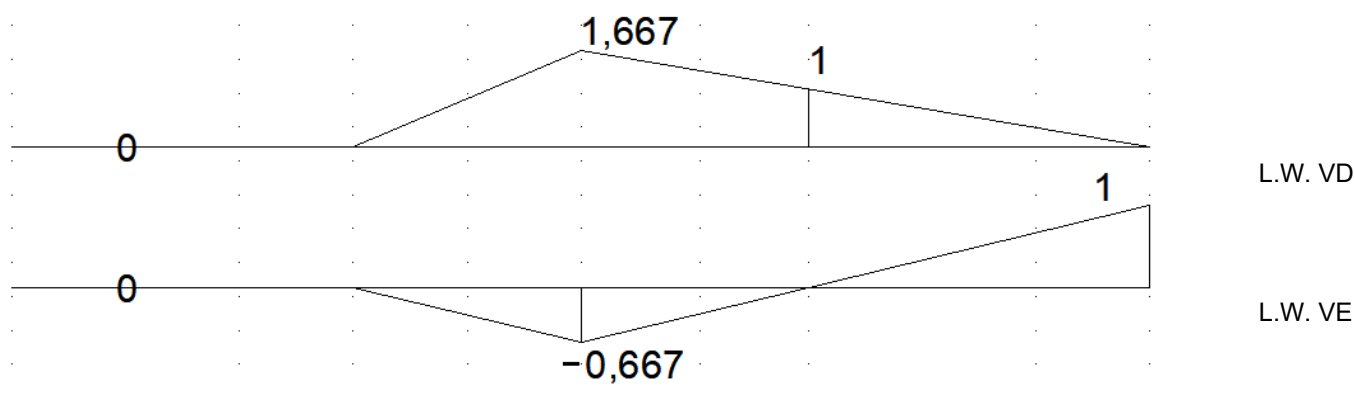
L.W.  $V_A$ :



Przeanalizujmy powyższą linię wpływu:

- LW w miejscu  $V_A$  jest równa 1, a w miejscu  $V_D$  i  $V_E$  jest równa 0.
- Podpora A to pełne utwierdzenie, więc LW będzie pozioma
- jedziemy dalej aż do przegubu B. Tu będzie załamanie, ale nie wiemy gdzie - wartość w punkcie C jest nieznaną.
- Widzimy, że D i E to dwie podpory obok siebie, więc je łączymy - łączymy 0 i 0 linią. Ciągniemy tę linię poziomą aż do punktu C.
- Teraz możemy połączyć punkt B i C.

L.W.  $V_D$  i  $V_E$ :



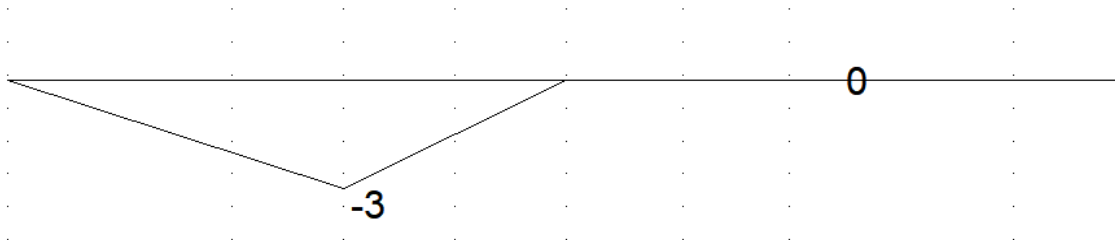
Przeanalizujmy dwie powyższe linie na raz:

- LW w miejscu  $V_A$  jest równa 0, a w miejscu  $V_D$  i  $V_E$  jest równa 0 lub 1, zależy którą linię rysujemy.
- Podpora A to pełne utwierdzenie, więc LW będzie pozioma (stałe 0).
- jedziemy dalej aż do przegubu B. Tu będzie załamanie, ale nie wiemy gdzie - wartość w punkcie C jest nieznaną.
- Widzimy, że D i E to dwie podpory obok siebie, więc je łączymy - łączymy 0 i 1 linią. Ciągniemy tę linię aż do punktu C.
- Teraz możemy połączyć punkt B i C.
- Wartość w punkcie C liczymy z proporcji.

**L.W. MA:**

Przy linii wpływu reakcji momentu panują poniższe zasady:

- Wartość L.W. w miejscu wszystkich podpór jest 0,
- Tylko w przegubie może być załamanie wykresu,
- Zaczynamy rysowanie od dwóch sąsiadujących obok siebie podpór, lub od pełnego utwierdzenia.
- W miejscu pełnego utwierdzenia linia jest pozioma, ALE:
- W miejscu MA linia wpływu jest pod kątem 45 stopni w dół.



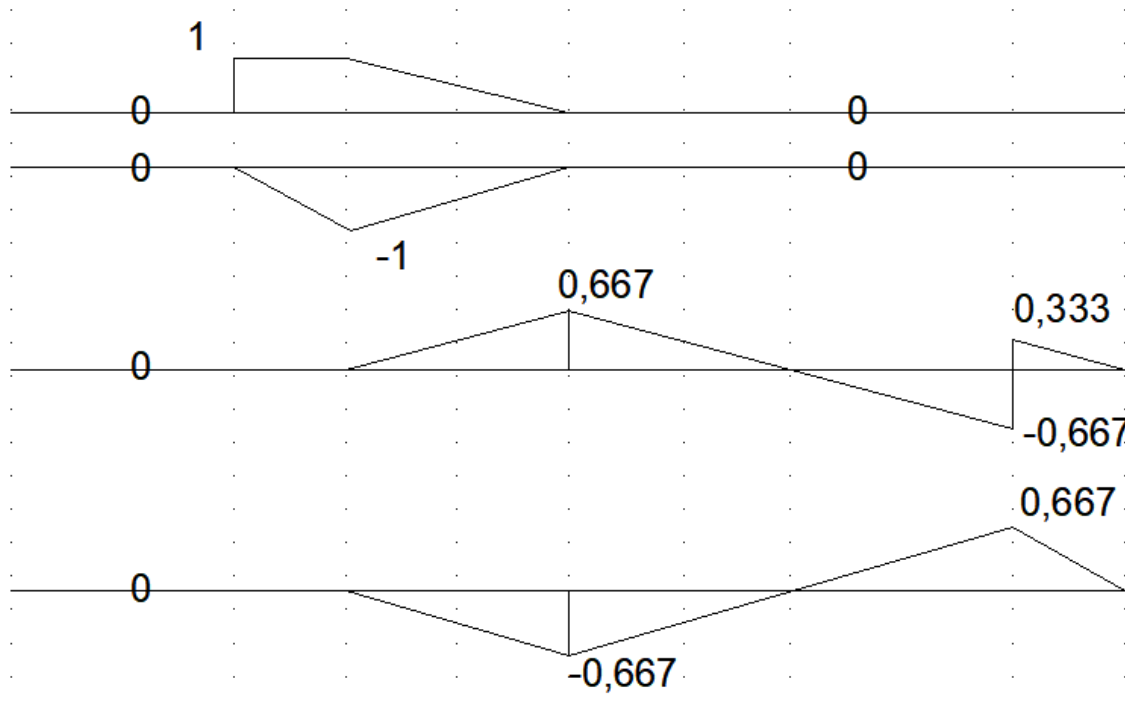
L.W. MA

Proszę zobaczyć:

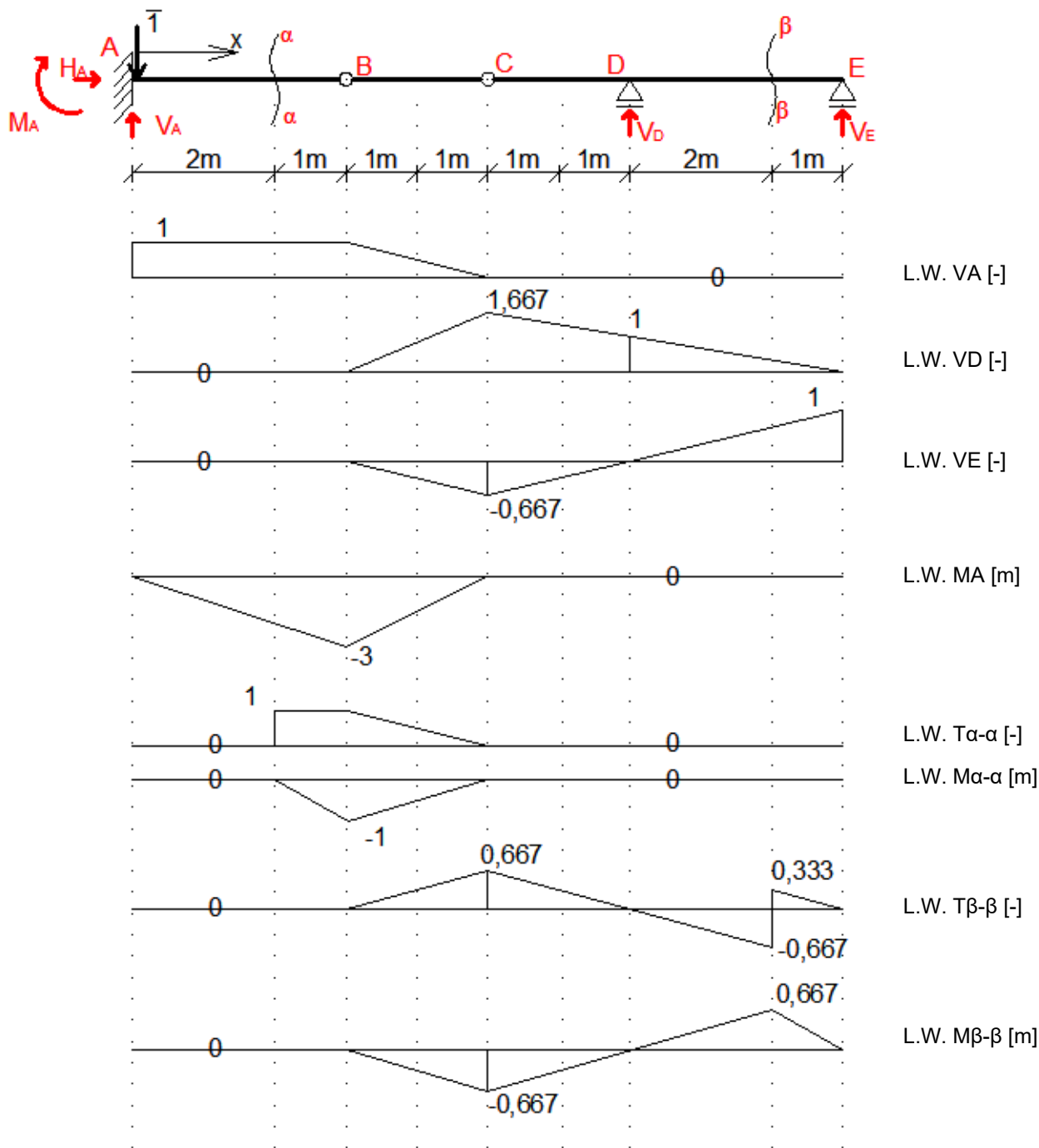
- we wszystkich podporach linia wpływu jest 0,
- w miejscu MA jest pod kątem 45 stopni w dół (od A do B jest 3m, stąd w punkcie B wartość -3).
- łączymy D i E, jedziemy poziomo w lewo aż do C,
- łączymy B i C.

**L.W. T i M w przekrojach:**

Tu nie ma nic nowego, więc tylko będą narysowane. Proszę sobie tylko z ciekawości porównać wykresy VA i  $T_{\alpha-\alpha}$ , oraz MA i  $M_{\alpha-\alpha}$ . sa takie same tylko w przekroiu sa krótsze z lewej stron.

L.W.  $T_{\alpha-\alpha}$ L.W.  $M_{\alpha-\alpha}$ L.W.  $T_{\beta-\beta}$ L.W.  $M_{\beta-\beta}$

Zestawienie wszystkich linii wpływu:

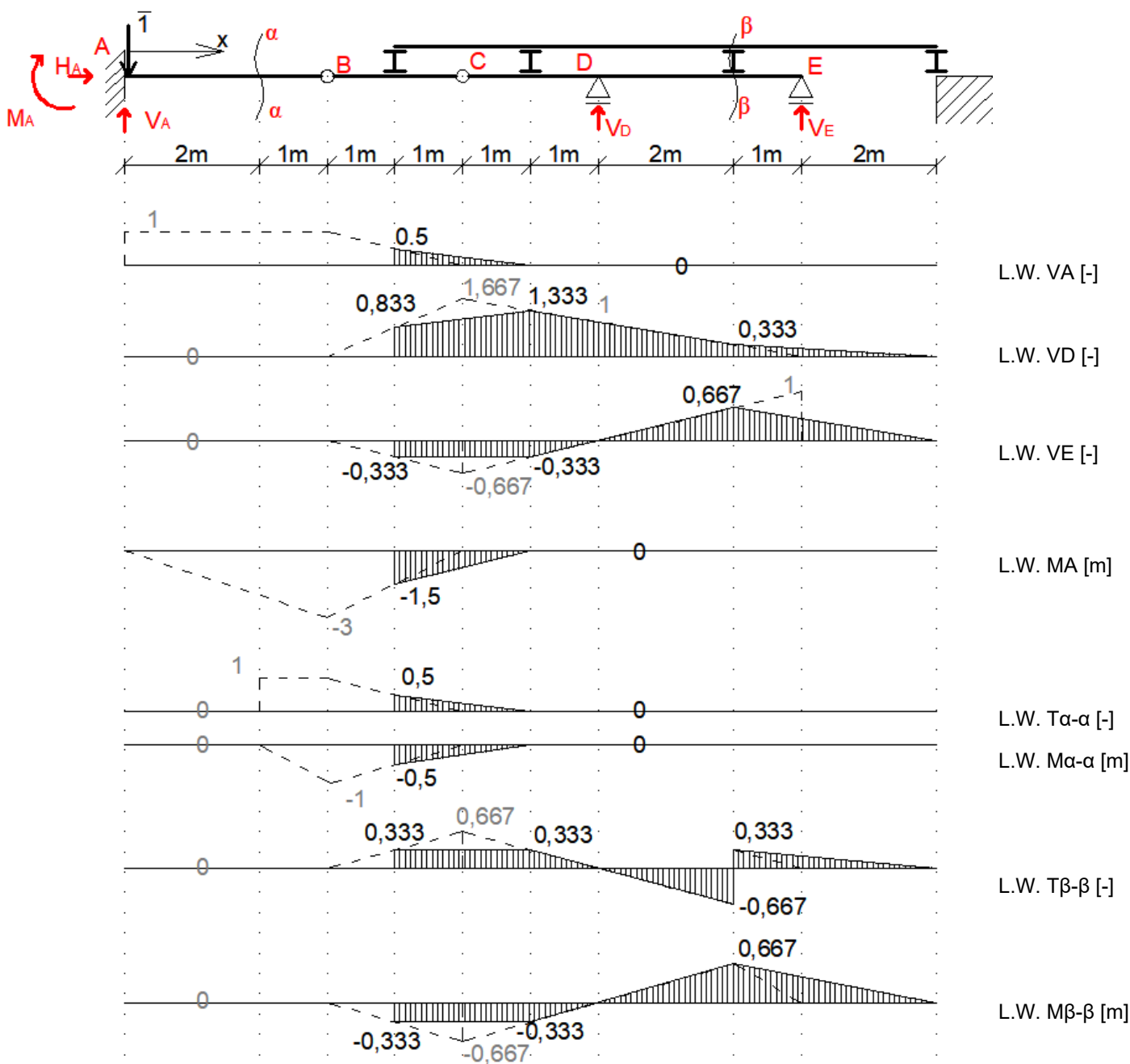


Przy okazji, jedna ważna rzecz: Linie wpływu można sprawdzić sobie w soldisie. Nie trzeba załączać ich do projektu, ale też nie zaszkodzą, jak będą.



## Uwzględnienie belki pośredniej

Tutaj chodzi o to, że tym razem zakładamy, iż obciążenie jeździ po górnej belce. Obciążenie jest przekazywane na dolną belkę za pomocą dodatkowych podpór, które na schemacie wyglądają jak dwuteowniki. Sprawa jest bardzo prosta, wystarczy wziąć jeszcze raz linie wpływu dla belki bezpośredniej i połączyć liniami wartości w miejscach tych dwuteowników. Trzeba policzyć z proporcji wartości w nowych zgięciach i zaznaczyć je na wykresach.

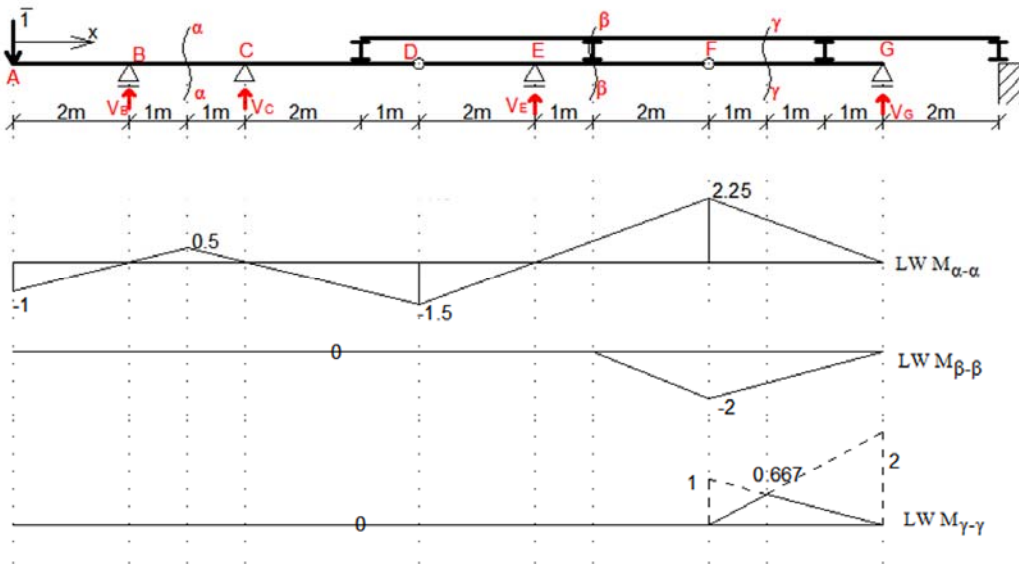


Proszę zwrócić szczególną uwagę na kilka rzeczy:

- dwuteownik najbardziej po lewej to również początek belki pośredniej, wszystko co jest na lewo od niego znika, bo siła nie może zjechać z belki pośredniej w lewo.
- dwuteownik najbardziej po prawej znajduje się w miejscu, gdzie już nie ma belki bezpośredniej. Tam wartość linii wpływu zawsze jest 0.
- $T_{\beta-\beta}$  - skok linii wpływu nadal jest, ponieważ w miejscu przekroju  $\beta-\beta$  znajduje się dwuteownik. Gdyby przekrój  $\beta-\beta$  znajdował się np. 1m w lewo, to połączylibyśmy linią po prostu dwuteownik ten między C i D z tym dwuteownikiem między D i E. Wtedy skok tnącej by nam "zniknął" bo znajdowałby się między dwuteownikami, dokładnie tak samo jak znikają wartości w punkcie C. Kiedyś tam były ekstrema, ale już ich nie ma, bo są między dwuteownikami.

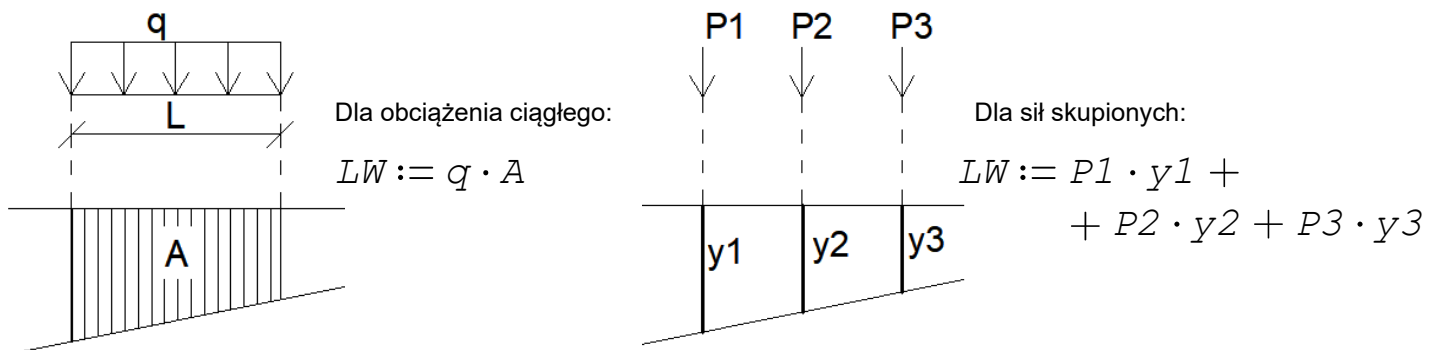
## Liczenie wartości minimalnych i maksymalnych

Na potrzeby tego przykładu wrócimy do pierwszej belki. Dla uproszczenia w tym zadaniu bierzemy tylko belkę bezpośrednią. Przypomnijmy, jak wyglądały linie wpływu momentów w przekrojach.

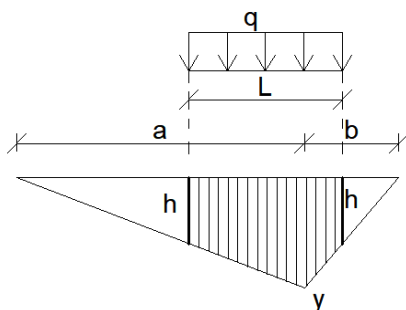


Teraz zamiast siły 1 będzie jeździć po belce obciążenie ciągłe. Równie dobrze może to być zestaw sił skupionych, albo jednocześnie 3 siły skupione i 2 obciążenia ciągłe - zależy jakie są potrzeby.

Aby narysować linię wpływu od dowolnego obciążenia trzeba by było umieścić to obciążenie na początku belki, policzyć wartość według poniższego sposobu, przesunąć np o 10cm w prawo, znów policzyć wartość i tak aż do końca belki.



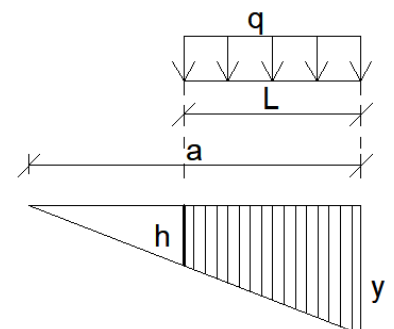
Na szczęście nie musimy rysować całej linii wpływu a tylko policzyć jej wartość maksymalną i minimalną.



W przypadku obciążenia ciągłego musimy ustawić obciążenie nad wierzchołkiem wykresu w taki sposób aby wykres na krawędziach obciążenia przyjął takie same wartości ( $h$ ) (rysunek po lewej). Jeżeli są dwa albo więcej takich wierzchołków to trzeba sprawdzić wszystkie, bo nie wiadomo w którym pole  $A$  będzie większe. Jeżeli jest to końcówka belki, to ekstremum może być jeśli ustawimy obciążenie właśnie na końcu belki (rysunek po prawej).

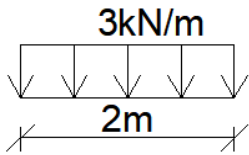
Na obliczenie tego pola można skorzystać z takiego wzoru, ale pod warunkiem, że  $(a+b) > L$ :

$$A := y \cdot L \cdot \left( 1 - \frac{L}{2 \cdot (a + b)} \right)$$

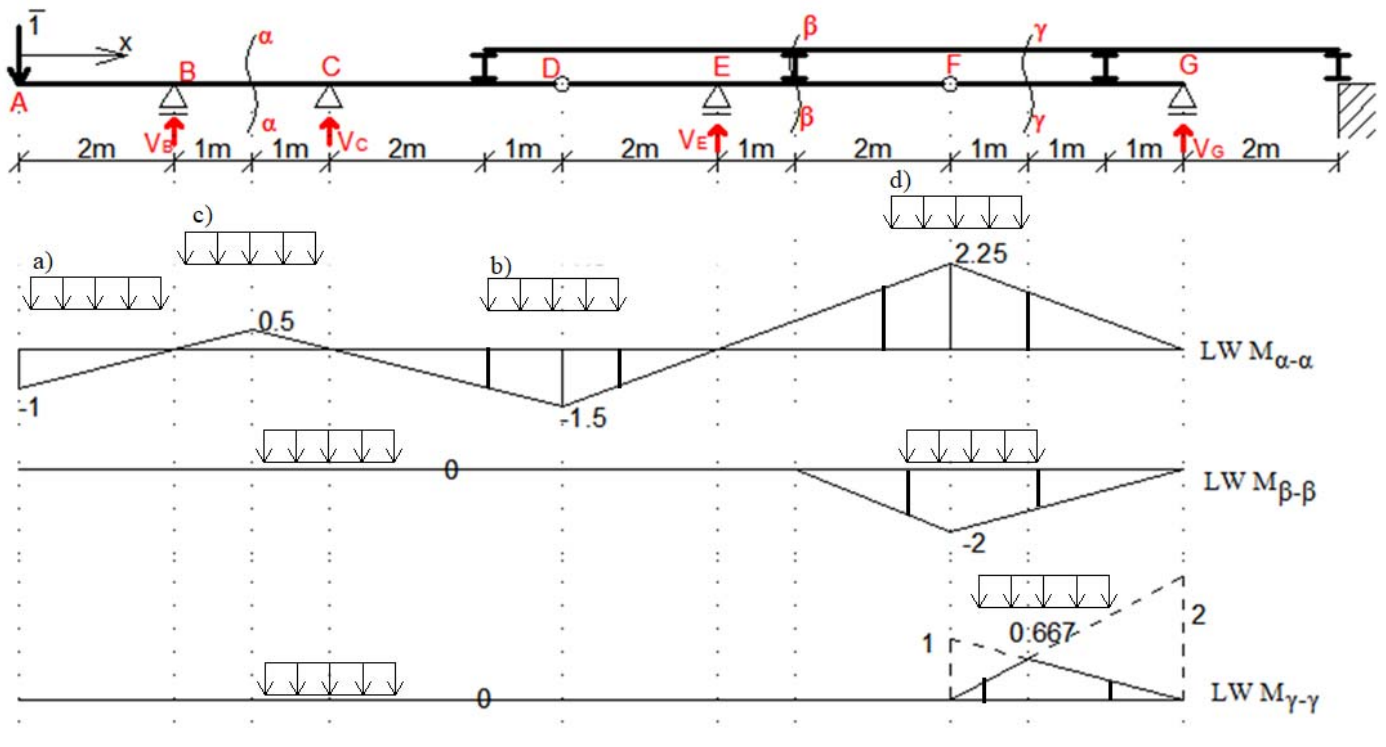


W przypadku zestawu sił skupionych ekstremum będzie zawsze kiedy jedna z sił znajduje się nad wierzchołkiem wykresu. Tzn. jeżeli są trzy siły to wartość trzeba policzyć trzy razy. UWAGA! obciążenie nie może wyjechać po za belkę - żadna z sił nie może wisieć w powietrzu, co oznacza, że nawet, jak mamy trzy siły, to nie zawsze będą trzy kombinacje dla jednego wierzchołka. Jeżeli to jest mało zrozumiałe, to i tak będzie przykład tego w obliczeniach w kratownicy.

Na potrzeby tego projektu będzie poniższe obciążenie ciągłe:



Wstawmy jeszcze raz ramę, tym razem z zaznaczonymi miejscami, gdzie uzyskane zostanie minimum i maksimum. Jak widać w LW  $M_{\alpha-\alpha}$  mogą to być różne miejsca, dlatego przewidziano po dwa warianty a i b dla minimum i c i d dla maksimum



$$c) \quad 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 1.5 \text{ kN m}$$

$$d) \quad 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2.25 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (3 \text{ m} + 3 \text{ m})}\right) = 11.25 \text{ kN m}$$

$$M_{\alpha\alpha_{max}} := 11.25 \text{ kN m}$$

$$a) \quad 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} = -3 \text{ kN m}$$

$$b) \quad 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-1.5 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (3 \text{ m} + 2 \text{ m})}\right) = -7.2 \text{ kN m}$$

$$M_{\alpha\alpha_{min}} := -7.2 \text{ kN m}$$

$$M_{\beta\beta_{max}} := 0$$

$$M_{\beta\beta_{min}} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-2 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (2 \text{ m} + 3 \text{ m})}\right) = -9.6 \text{ kN m}$$

$$M_{\gamma\gamma_{max}} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 0.667 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (1 \text{ m} + 2 \text{ m})}\right) = 2.668 \text{ kN m}$$

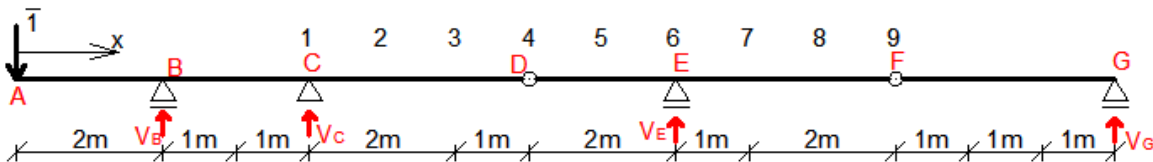
$$M_{\gamma\gamma_{min}} := 0$$

## Obwiednia momentów

W temacie projektu zaznaczone są dwa punkty A i B. Trzeba narysować obwiednię momentów między tymi punktami. Od punktu A do B trzeba zrobić około 10 przekrojów (od 8 do 12). Przekroje oczywiście muszą być w poniższych punktach:

- W punkcie A i B,
- W każdej podporze i przegubi między tymi punktami,
- Conajmniej jeden przekrój między powyższymi punktami,
- Dorobić jeszcze trochę przekrojów, żeby były w równych odstępach (np co 1m albo co 0.5m), żeby doliczyć mniej więcej do tych 10.

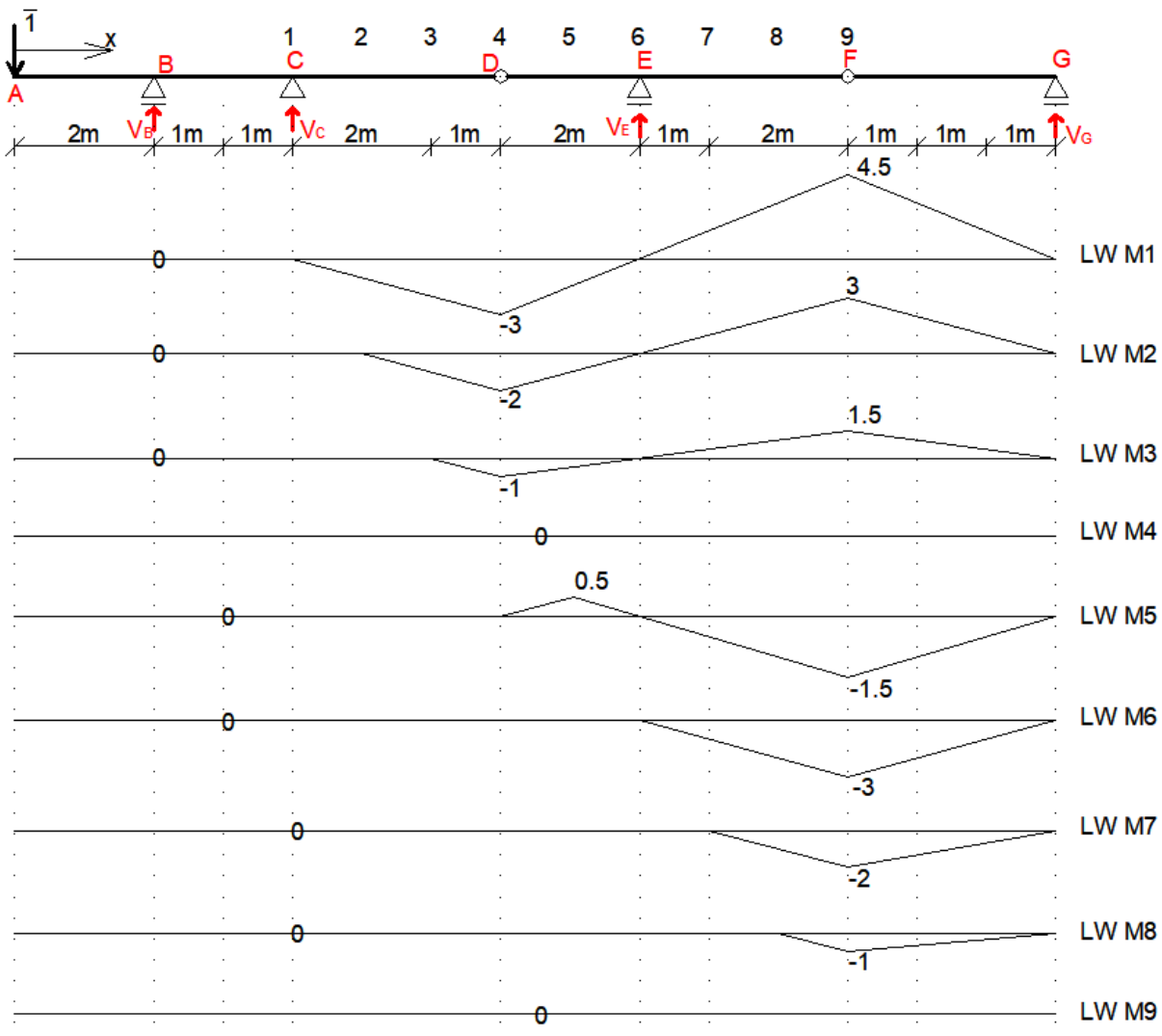
Na potrzeby tego przykładu zrobimy 9 przekrojów co metr między punktami C i F:



Zgodnie z powyższymi zasadami:

- Mamy przekrój w punkcie C i F (początkowy i końcowy)
- Mamy przekroje w D i E bo są to przegub i podpora
- Mamy jeden przekrój między D i E
- Mamy dorobione przekroje co metr, tak, że w sumie jest 9.

Teraz rysujemy linie wpływu momentów we wszystkich przekrojach:



Proszę zwrócić uwagę na kilka rzeczy:

- Proszę spojrzeć na linie wpływu przekrojów, które znajdują się w podporach (1, 6), należy przy nich szczególnie uważać,
- Linie wpływu w przekrojach, które znajdują się w przegubie są zawsze 0,
- Nawet jeśli przekroje mamy od punktu do punktu, to i tak przy rysowaniu linii wpływu pod uwagę bierzemy całą belkę.

Teraz liczymy min i max dla wszystkich przekrojów:

UWAGA! nad wszystkimi liniami wpływu należy narysować obciążenia ciągłe, w których miejscach będą wartości minimalne i maksymalne (tak jak to jest na stronie 11). Tutaj zostały pominięte dla większej czytelności.

UWAGA 2! W przypadku rysowania obwiedni tylko dla obciążenia jednostkowego wartości maksymalnych i minimalnych nie trzeba liczyć. Odczytujemy je bezpośrednio z wykresów.

$$M1_{max} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 4.5 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (3 \text{ m} + 3 \text{ m})}\right) = 22.5 \text{ kN m} \quad M1_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-3 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (3 \text{ m} + 2 \text{ m})}\right) = -14.4 \text{ kN m}$$

$$M2_{max} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (3 \text{ m} + 3 \text{ m})}\right) = 15 \text{ kN m} \quad M2_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-2 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (2 \text{ m} + 2 \text{ m})}\right) = -9 \text{ kN m}$$

$$M3_{max} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 1.5 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (3 \text{ m} + 3 \text{ m})}\right) = 7.5 \text{ kN m} \quad M3_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-1 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (1 \text{ m} + 2 \text{ m})}\right) = -4 \text{ kN m}$$

$$M4_{max} := 0 = 0 \text{ kN m} \quad M4_{min} := 0 = 0 \text{ kN m}$$

$$M5_{max} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 0.5 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (1 \text{ m} + 1 \text{ m})}\right) = 1.5 \text{ kN m} \quad M5_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-1.5 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (3 \text{ m} + 3 \text{ m})}\right) = -7.5 \text{ kN m}$$

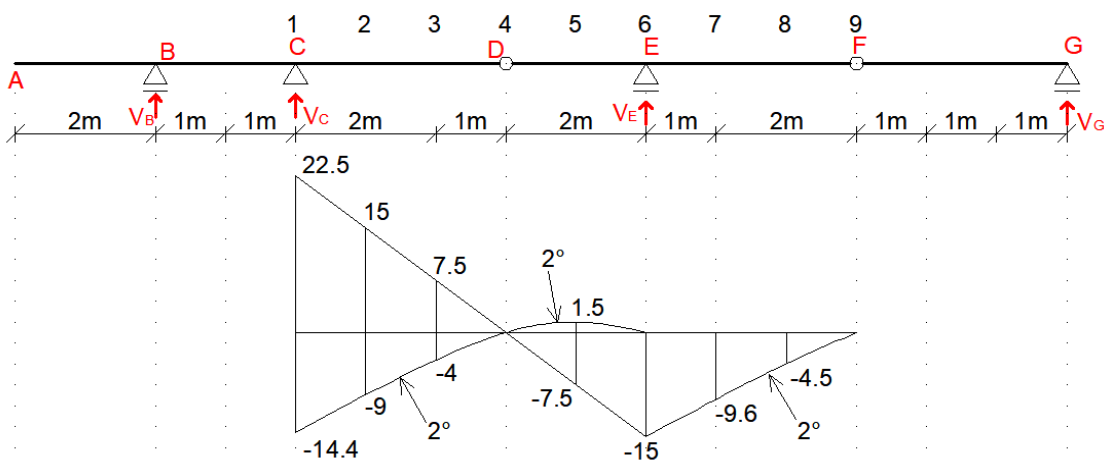
$$M6_{max} := 0 = 0 \text{ kN m} \quad M6_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-3 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (3 \text{ m} + 3 \text{ m})}\right) = -15 \text{ kN m}$$

$$M7_{max} := 0 = 0 \text{ kN m} \quad M7_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-2 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (2 \text{ m} + 3 \text{ m})}\right) = -9.6 \text{ kN m}$$

$$M8_{max} := 0 = 0 \text{ kN m} \quad M8_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-1 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (1 \text{ m} + 3 \text{ m})}\right) = -4.5 \text{ kN m}$$

$$M9_{max} := 0 = 0 \text{ kN m} \quad M9_{min} := 0 = 0 \text{ kN m}$$

## Obwiednia [kNm]



Przeanalizujemy po kolei, jak została narysowana ta obwiednia:

- Tytułujemy wykres i rysujemy na górze belkę z zaznaczonymi punktami,
- Pod spodem rysujemy oś i zaznaczamy na niej policzone wartości maksymalne i minimalne w odpowiednich punktach (należy zachować proporcje długości), piszemy liczby,
- Łączymy te punkty albo liniami, albo parabolami.

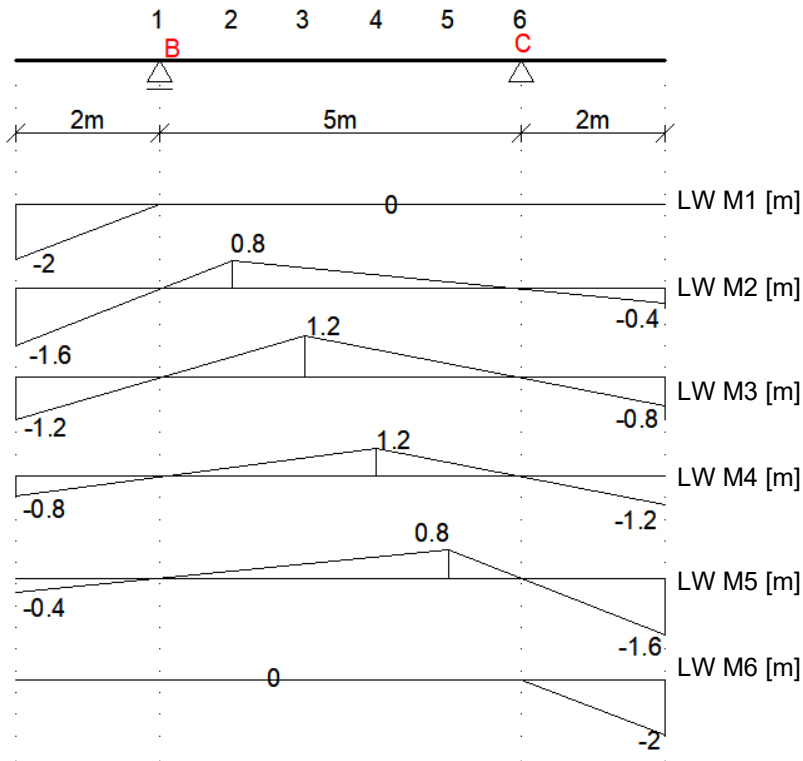
Proszę zobaczyć, że może być jedna parabola albo jedna linia między punktami charakterystycznymi:

- Punkty 1, 2, 3, 4, od podpory do przegubu na górze są współliniowe, łączymy je linią. Te same punkty na dole nie są współliniowe - łączymy je parabolą (zaznaczamy 2°).
- Punkty 4, 5, 6, od przegubu do podpory na górze nie są współliniowe, łączymy je parabolą. Na dole są współliniowe, łączymy je linią.
- Punkty 6, 7, 8, 9, od podpory do przegubu na dole nie są współliniowe, łączymy je parabolą, na górze i tak są zera.

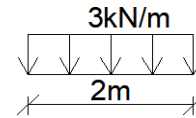
## Obwiednia - drugi przykład

Rozważmy jeszcze jedną belkę dla której między punktami charakterystycznymi (podporami) wyjątkowo będzie załamanie obwiedni.

Mamy taką belkę, robimy obwiednię od punktu B do C, zrobimy 6 punktów.



Weźmiemy to samo obciążenie ciągłe:



Liczmy min i max:

$$M1_{max} := 0$$

$$M1_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-2 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (0 \text{ m} + 2 \text{ m})} \right) = -6 \text{ kN m}$$

$$M2_{max} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 0.8 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (1 \text{ m} + 4 \text{ m})} \right) = 3.84 \text{ kN m}$$

$$M2_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-1.6 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (0 \text{ m} + 2 \text{ m})} \right) = -4.8 \text{ kN m}$$

$$M3_{max} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 1.2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (2 \text{ m} + 3 \text{ m})} \right) = 5.76 \text{ kN m}$$

$$M3_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-1.2 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (0 \text{ m} + 2 \text{ m})} \right) = -3.6 \text{ kN m}$$

$$M4_{max} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 1.2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (3 \text{ m} + 2 \text{ m})} \right) = 5.76 \text{ kN m}$$

$$M4_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-1.2 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (2 \text{ m} + 0 \text{ m})} \right) = -3.6 \text{ kN m}$$

$$M5_{max} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 0.8 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (4 \text{ m} + 1 \text{ m})} \right) = 3.84 \text{ kN m}$$

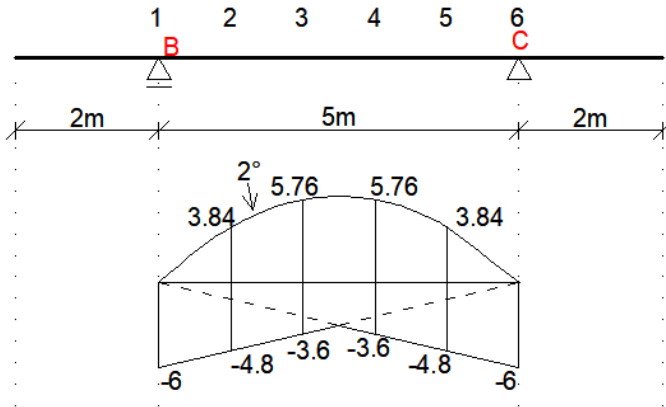
$$M5_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-1.6 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (2 \text{ m} + 0 \text{ m})} \right) = -4.8 \text{ kN m}$$

$$M6_{max} := 0$$

$$M6_{min} := 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot (-2 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{2 \text{ m}}{2 \cdot (2 \text{ m} + 0 \text{ m})} \right) = -6 \text{ kN m}$$

Proszę zobaczyć, że M3.min uzyskano gdy ustawimy obciążenie skrajnie po lewej stronie, a M4.min nagle, gdy obciążenie jest po prawej stronie. Będzie to miało wpływ na kształt obwiedni.

## Obwiednia [kNm]



Na górze punkty od podpory do podpory nie są współliniowe i układają się w ładną parabolę.

Na dole punkty też nie są współliniowe, ALE NIE BĘDZIE PARABOLI, tylko dwie linie proste, które łączą się między punktami 3 i 4, dlatego, że minimum w tych punktach było uzyskane w różnych miejscach. Dodatkowo te linie zawsze na przedłużeniu padają dokładnie w miejsca podpór.