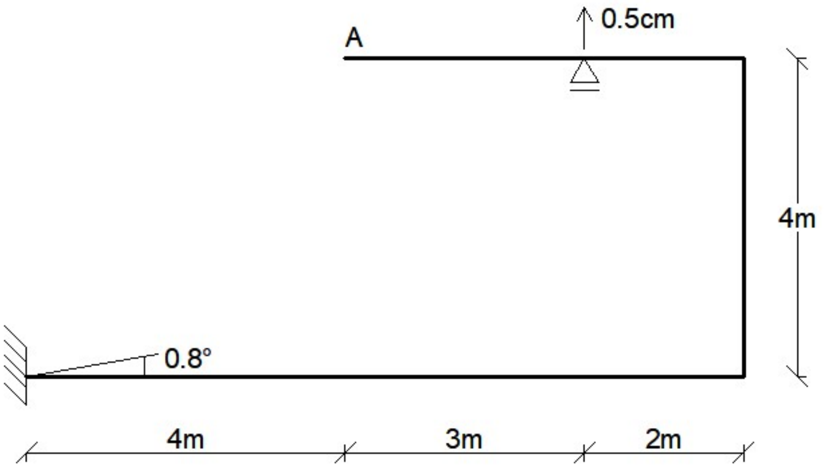
Przemieszczenia w ramie statycznie niewyznaczalnej

Zadanie: Policzyć przemieszczenie pionowe w punkcie A w ramie statycznie niewyznaczalnej



$EJ := 1136.1\ \mathrm{kN\ m}^2$

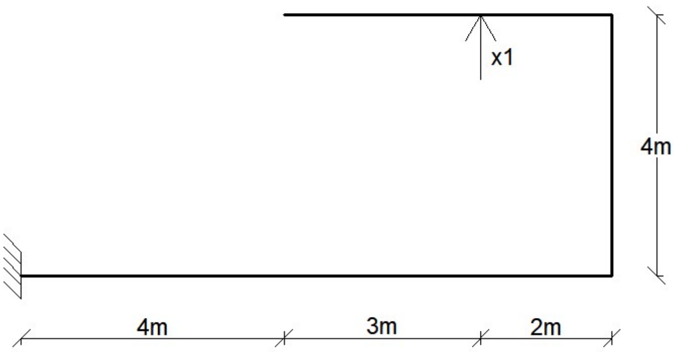
Wiemy, że żeby policzyć przemieszczenie to uwzględniamy dwa stany: stan P i stan jednostkowy (jednostkowa siła skupiona w punkcie A).

Są dwa sposoby:
1. stan P liczymy metodą sił, a stan jednostkowy robimy dla ramy statycznie wyznaczalnej,
2. stan P robimy dla ramy statycznie wyznaczalnej, a stan jednostkowy liczymy metodą sił.
Rozwiążemy na dwa sposoby.

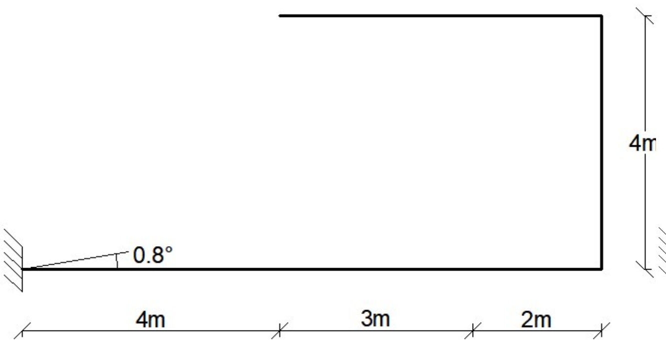
1.

Stan P - wyznaczamy wykresy momentów metodą sił w ramie dokładnie takiej samej jak wyżej. Wszystko związane z tym zadaniem w zadaniu będzie oznaczane gwiazdką *

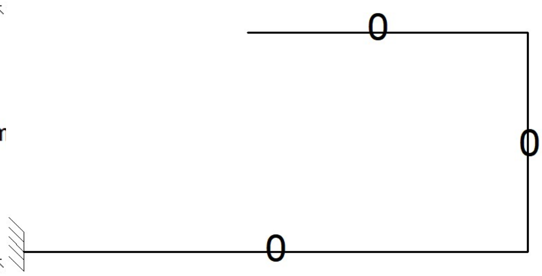
UPMS*



stan P*

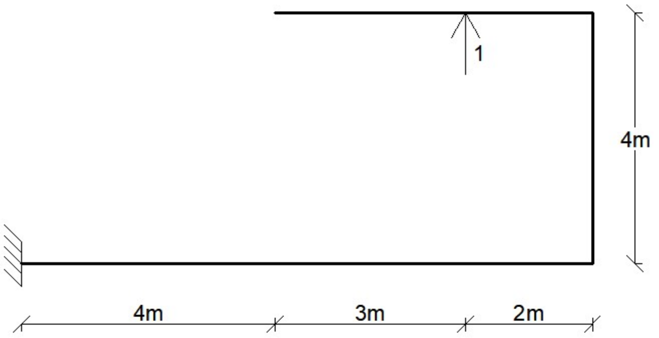


MP* [kNm]

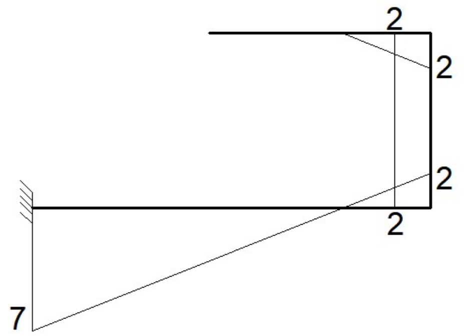


$$M_p := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{kN\ m}$$

stan 1*



M1* [m]



$$M_1 := \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

delty

$$\delta_{1p} := 0$$

$$\delta_{11} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \right) \mathrm{m}^3 = 135.6667 \frac{\mathrm{m}^3}{EJ}$$

$$\delta_{1\Delta} := 0.8 \, ° \cdot 7 \, \mathrm{m} = 0.0977 \, \mathrm{m}$$

Usuneliśmy podporę z wymuszeniem za pomocą x1, więc układ równań będzie wyglądał tak:

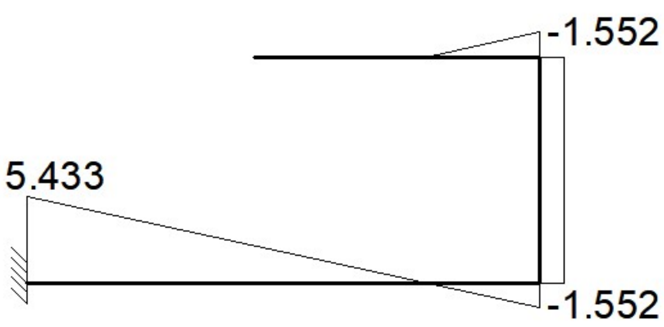
$$\delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{1p} + \delta_{1\Delta} = 0.5 \, \mathrm{cm}$$

$$x_1 := \frac{0.5 \, \mathrm{cm} - \delta_{1p} - \delta_{1\Delta}}{\delta_{11}} = -0.7766 \, \mathrm{kN}$$

Momenty ostateczne*

$$M_{ost} := M_1 \cdot x_1 + M_p = \begin{bmatrix} 5.4363 & -1.5532 \\ -1.5532 & -1.5532 \\ -1.5532 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{kN \, m}$$

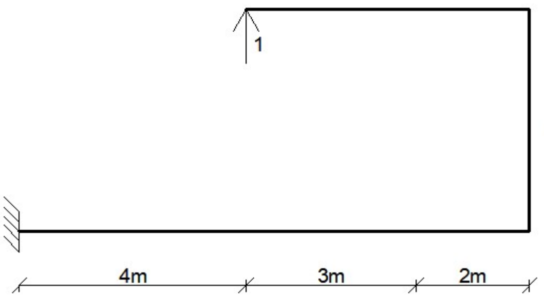
Most*, czyli Mp



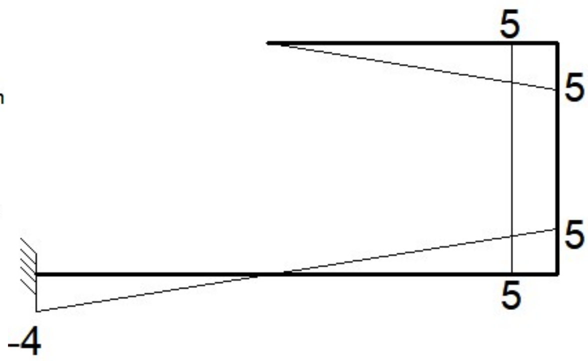
To jest stan ostateczny w zadaniu z metody sił, jednocześnie jest to nasz stan p do liczenia przemieszczenia.

Stan 1

Szukamy przemieszczenia pionowego w punkcie A. Zrobliliśmy z tego zadanie wyznaczalne, ponieważ stan P był rozważany jako niewyznaczalny.



M1 [m]



$$M_1 := \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Liczymy deltę tak jak w pierwszym projekcie.

$\delta_1 = \delta_{1p} + \delta_{1\Delta}$ + ewentualne delty od temperatur i sprężystości. W tym zadaniu akurat nie ma.

$$\delta_{1p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(5.433 \cdot 9 \cdot \left(\frac{-4}{3} + \frac{5}{6} \right) - 1.552 \cdot 9 \cdot \left(\frac{-4}{6} + \frac{5}{3} \right) - 1.552 \cdot 5 \cdot 4 - 1.552 \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{6} \right) \right) \text{kN m}^3 = -0.0671 \text{ m}$$

$$\delta_{1\Delta} := -(0.8\ °) \cdot (-4 \text{ m}) = 0.0559 \text{ m}$$

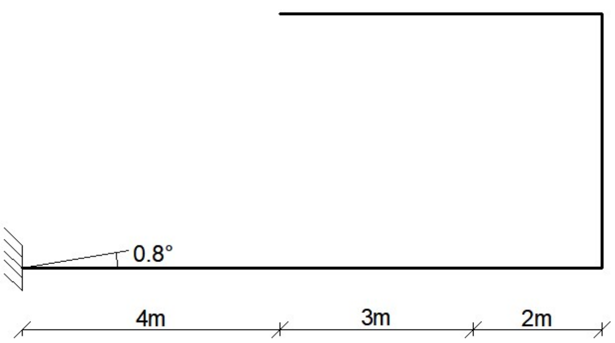
proszę zobaczyć, że delta od wymuszenia nie ma części od wymuszenia przesuwu, ponieważ w stanie wirtualnym nie ma tam podpory.

$$\delta_1 := \delta_{1p} + \delta_{1\Delta} = -0.0112 \text{ m}$$

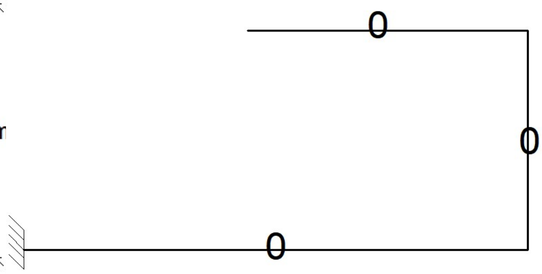
ODPOWIEDŹ: Węzeł A przesunął się o 11.2 mm w dół.

2.

Stan P przyjmujemy jako statycznie wyznaczalny.

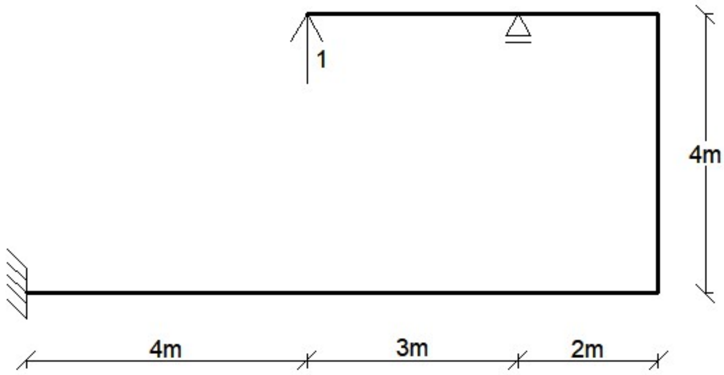


Mp [kNm]

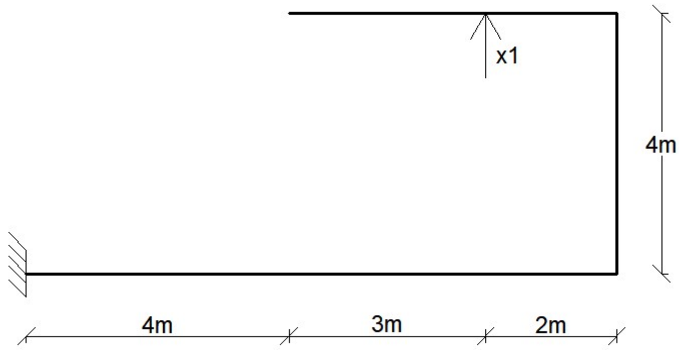


$$M_p := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{kN m}$$

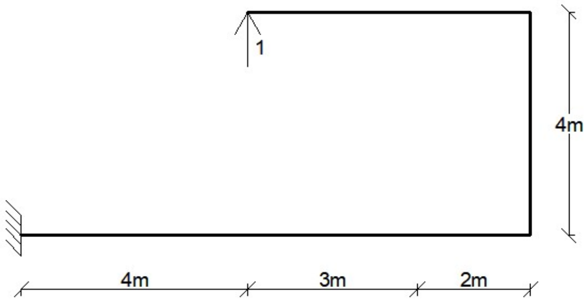
Stan 1 rozwiązujemy jako zadanie statycznie niewyznaczalne. Wszystko związane z tym zadaniem będzie oznaczone gwiazdką *. Stan 1 wygląda w ten sposób:



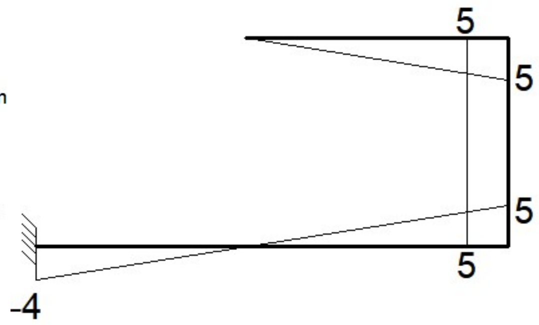
UPMS*



stan p*

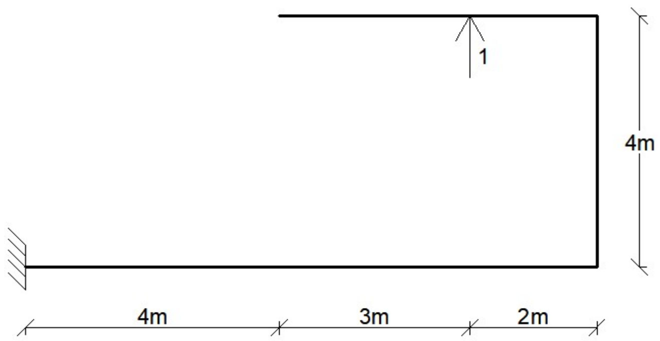


Mp* [m]

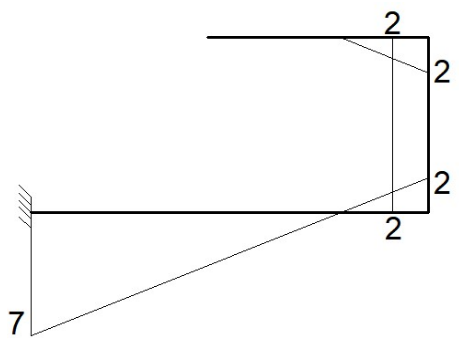


$$M_p := \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

stan 1*



M1* [m]



$$M_1 := \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

delty

$$\delta_{11} := \frac{1}{EJ} \cdot \left(7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \right) m^3 = 135.6667 \frac{m^3}{EJ}$$

$$\delta_{1p} := \frac{1}{EJ} \cdot \left((-7) \cdot 9 \cdot \left(\frac{-4}{3} + \frac{5}{6} \right) + 2 \cdot 9 \cdot \left(\frac{-4}{6} + \frac{5}{3} \right) + 2 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{6} \right) \right) m^3 = 98.1667 \frac{m^3}{EJ}$$

W tym zadaniu z metody sił nie ma żadnych wymuszeń, więc układ równań będzie wyglądał tak:

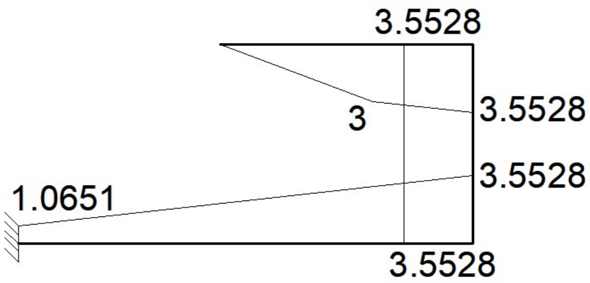
$$\delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{1p} = 0$$

$$x_1 := \frac{-\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -0.7236$$

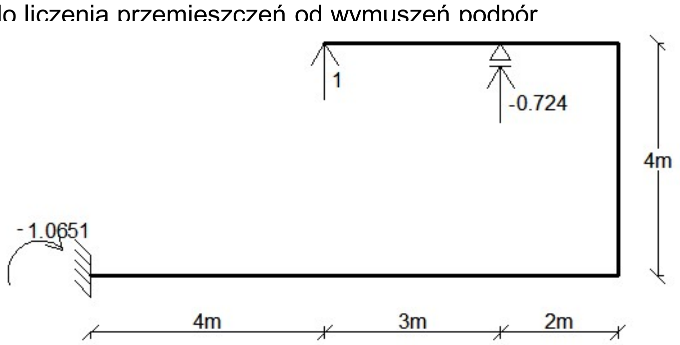
Momenty ostateczne*, czyli stan wirtualny w zadaniu z przemieszczeń

$$M_{ost} := M_1 \cdot x_1 + M_p = \begin{bmatrix} 1.0651 & 3.5528 \\ 3.5528 & 3.5528 \\ 3.5528 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} m$$

Most*



Tutaj też trzeba policzyć reakcje, ponieważ są one potrzebne do liczenia przemieszczeń od wymuszeń podpór



Liczymy przemieszczenie

$$\delta_1 = \delta_{1p} + \delta_{1\Delta}$$

$\delta_{1p} := 0$ ponieważ stan P jest cały zerowy.

$$\delta_{1\Delta} := -(-0.8\ °) \cdot (-1.0651\ m) - (0.5\ cm) \cdot (-0.724) = -0.0113\ m$$

proszę zobaczyć, że delta od wymuszenia ma dwie składowe, bo w stanie wirtualnym (ost*) istnieją te dwie podpory, mimo, że w stanie p jednej z nich nie ma.

$$\delta_1 := \delta_{1p} + \delta_{1\Delta} = -0.0113\ m$$

Wynik jest taki sam jak poprzednią metodą, z pomijalnie małą różnicą.

ODPOWIEDŹ: Węzeł A przesunął się o 11.3 mm w dół.