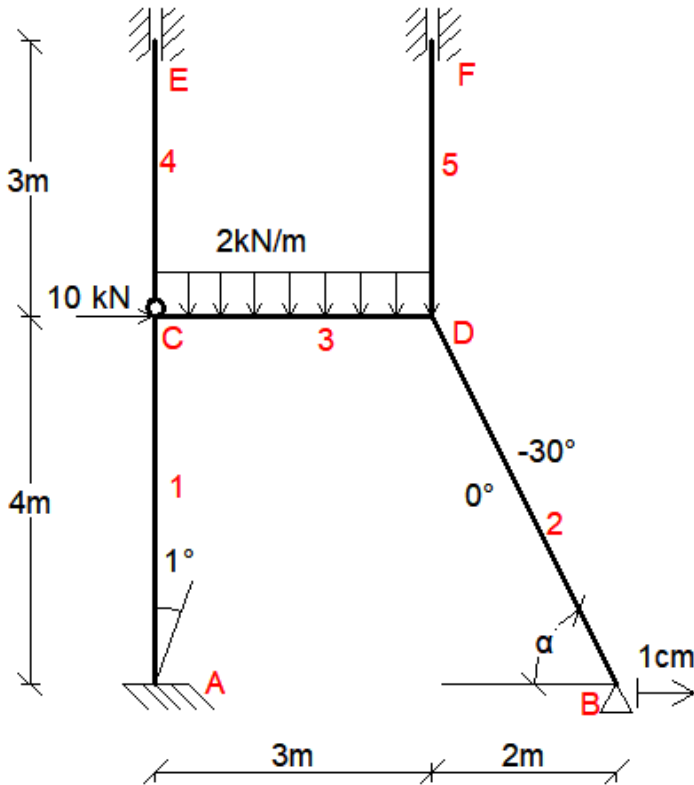


# Metoda przemieszczeń - przykład

Wszystkie komentarze zaznaczono na czerwono.

Projekt wykonano w programie SMath Studio. Jest to darmowa alternatywa dla Mathcada i nie posiada ograniczeń, tak jak studencka wersja Mathcada. Skróty klawiszowe są w 90% takie same jak w Mathcadzie, więc łatwo się przyzwyczaić.



IPN 160

$$E := 210 \text{ GPa}$$

$$J := 935 \text{ cm}^4$$

$$EJ := E \cdot J = 1963,5 \text{ kN m}^2$$

$$\alpha_t := 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{\text{K}}$$

Długość pręta ukośnego:

$$L2 := \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 4,4721 \text{ m}$$

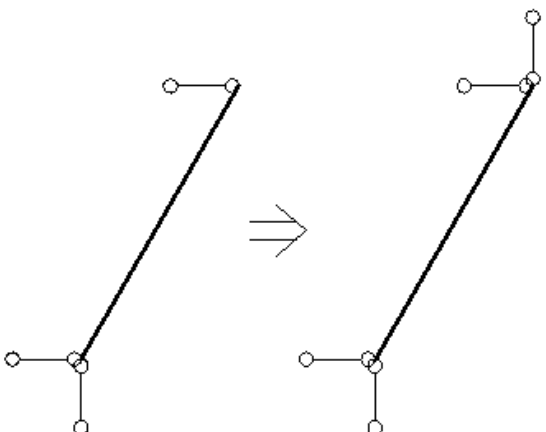
$$\alpha := \arctg\left(\frac{4 \text{ m}}{2 \text{ m}}\right) = 63,4349^\circ$$

$$\sin(\alpha) = 0,8944$$

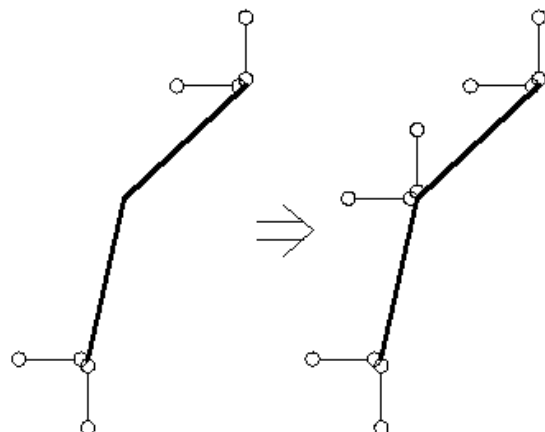
$$\cos(\alpha) = 0,4472$$

Przy dobieraniu blokad przesuwu w UPMP mamy zapewnić, aby każdy węzeł był zablokowany w pionie i w poziomie. Jeżeli są pręty ukośne, to można sugerować się poniższymi dwoma schematami:

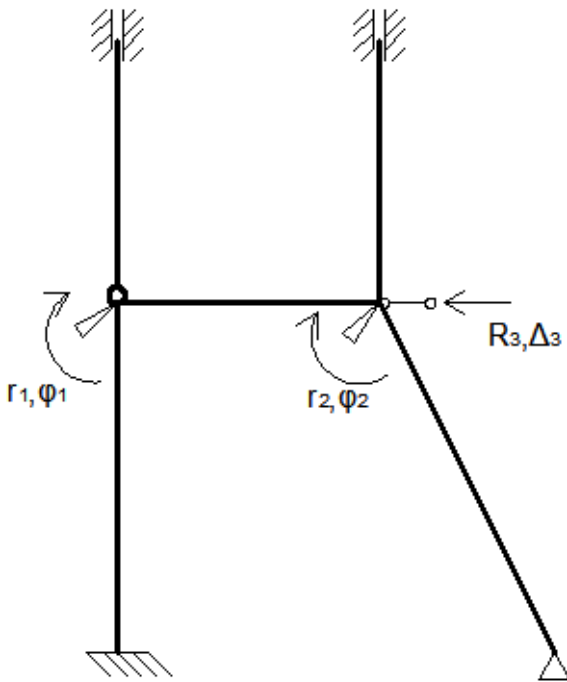
Schemat 1



Schemat 2



# UPMP



Robimy blokadę obrotu w węzłach C i D, ponieważ do obu należą conajmniej dwa pręty sztywno połączone (bez przegubu)

Blokada przesuwu:

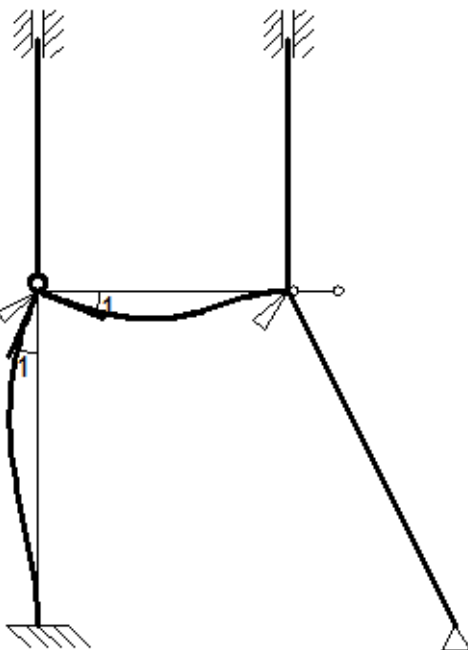
Pręty 1 i 4 jej nie wymagają, bo są zablokowane reakcją pionową w podporze A.

Pręt ukośny - pręt 2 w parze z 5 to nie jest schemat 2 (brak blokady pionowej w węźle F), więc węzeł D nie jest automatycznie zablokowany.

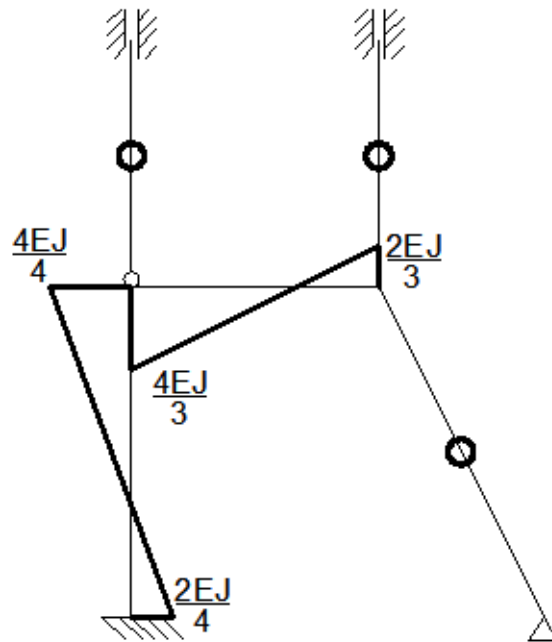
Pręt 2 w parze z 3 to też nie jest schemat 2 (brak blokady poziomej w węźle C), więc węzeł D nie jest automatycznie zablokowany również tą parą prętów.

Trzeba więc zrobić z tego schemat 2, czyli np dodać blokadę w poziomie w węźle C lub dodać blokadę w poziomie w węźle F. Można również zablokować węzeł D w dowolnym kierunku - w tym przypadku wybrano poziomy R3.

## Stan φ1=1



## M1



$$M_1 := \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1,333 \\ -0,666 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{EJ}{m}$$

Pręt 4 się nie obraca, ponieważ jest na przegubie

C

$$\Sigma M = r_{11} - \frac{4 \cdot EJ}{3 m} - \frac{4 \cdot EJ}{4 m}$$

$$r_{11} := \frac{4 \cdot EJ}{3 m} + \frac{4 \cdot EJ}{4 m} = 2,3333 \frac{EJ}{m}$$

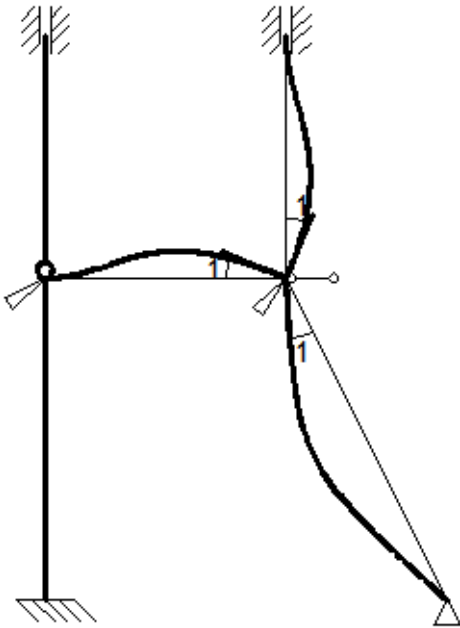
D

$$\Sigma M = r_{21} - \frac{2 \cdot EJ}{3 m}$$

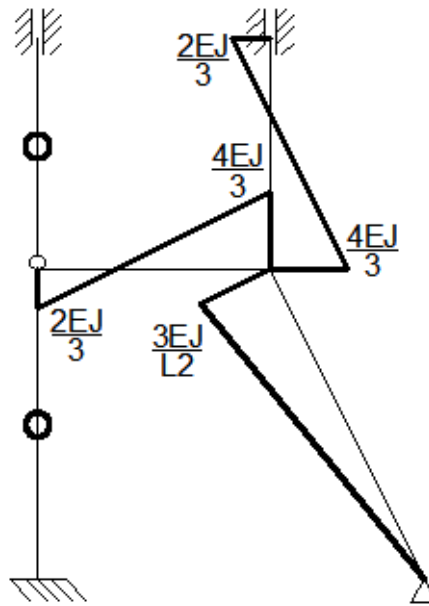
$$r_{21} := \frac{2 \cdot EJ}{3 m}$$

R31 zostanie policzone w stanie 3

Stan  $\phi_2=1$



M2



$$M_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,6708 \\ 0,666 \\ -1,333 \\ 0 \\ 0 \\ -1,333 \\ 0,666 \end{bmatrix} \cdot \frac{EJ}{m}$$

$$\sum M = r_{12} - \frac{2 \cdot EJ}{3 m}$$

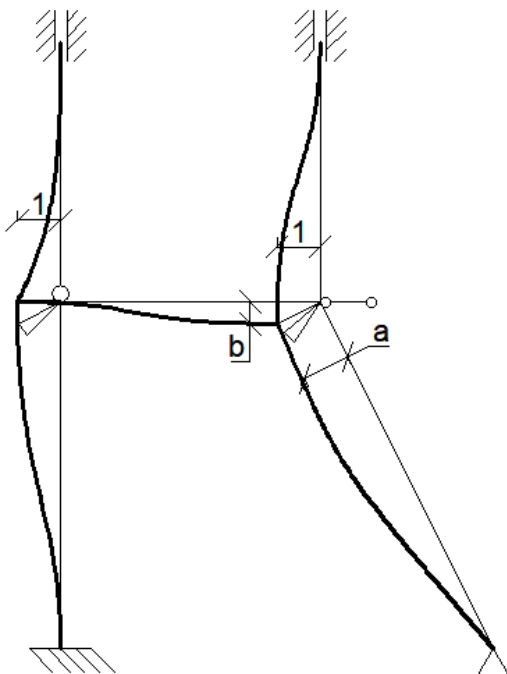
$$r_{12} := \frac{2 \cdot EJ}{3 m}$$

$$\sum M := r_{22} - \frac{4 \cdot EJ}{3 m} - \frac{4 \cdot EJ}{3 m} - \frac{3 \cdot EJ}{L^2}$$

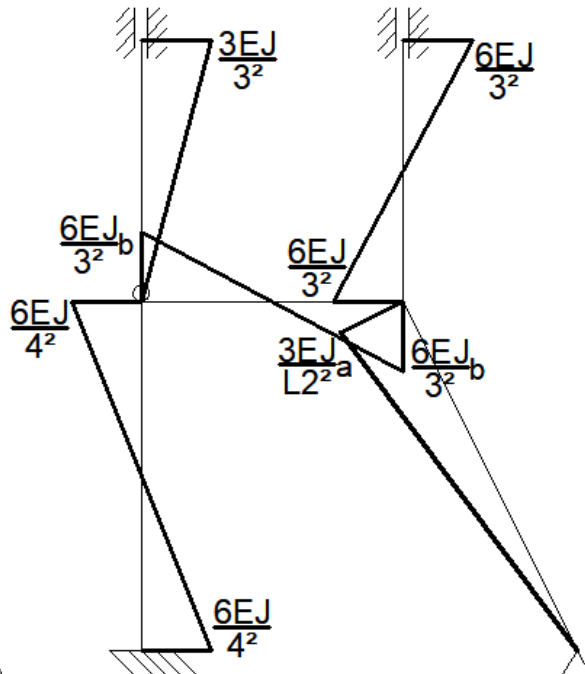
$$r_{22} := \frac{4 \cdot EJ}{3 m} + \frac{4 \cdot EJ}{3 m} + \frac{3 \cdot EJ}{L^2} = 3,3375 \frac{EJ}{m}$$

R32 zostanie policzone w stanie 3

Stan  $\Delta_3=1$



M3



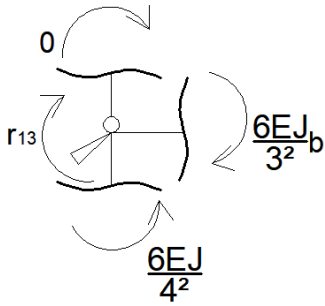
$$M_3 := \begin{bmatrix} 0,375 \\ -0,375 \\ 0 \\ 0,1677 \\ -0,333 \\ 0,333 \\ 0 \\ 0,333 \\ 0,666 \\ -0,666 \end{bmatrix} \cdot \frac{EJ}{m}$$

Węzeł D przesuwa się o 1 w lewo, więc węzeł C również. Węzeł C nie może się przesuwać w pionie, bo trzyma go reakcja pionowa w węźle A. Węzeł D nie może przesuwać się tylko w lewo, ale też w pionie. Może przesuwać się po linii prostopadłej do pręta ukośnego. Powstał więc trójkąt 1-b-a, podobny do trójkąta utworzonego z wymiarów pręta ukośnego.

$$\frac{a}{1} = \frac{L^2}{4 m} \quad a := \frac{L^2}{4 m} = 1,118$$

$$\frac{b}{1} = \frac{2 m}{4 m} \quad b := \frac{2 m}{4 m} = 0,5$$

C

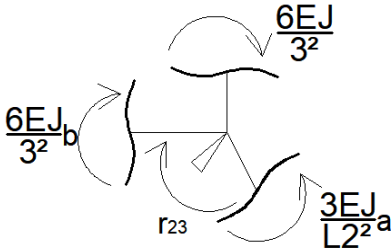


$$\Sigma M := r_{13} + \frac{6 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^2} \cdot b - \frac{6 \cdot EJ}{(4 \text{ m})^2}$$

$$r_{13} := -\frac{6 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^2} \cdot b + \frac{6 \cdot EJ}{(4 \text{ m})^2} = 0,0417 \frac{EJ}{\text{m}^2}$$

$$R_{31} := r_{13}$$

D



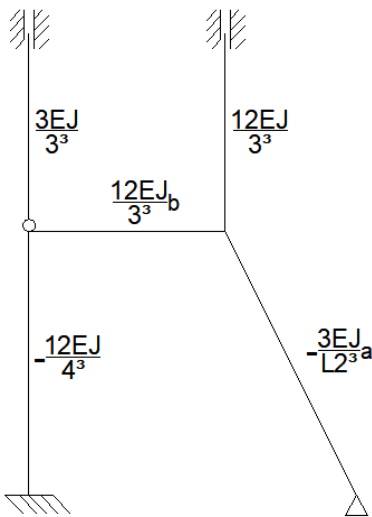
$$\Sigma M := r_{23} + \frac{6 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^2} \cdot b + \frac{6 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^2} - \frac{3 \cdot EJ}{L2^2} \cdot a$$

$$r_{23} := -\frac{6 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^2} \cdot b - \frac{6 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^2} + \frac{3 \cdot EJ}{L2^2} \cdot a = -0,8323 \frac{EJ}{\text{m}^2}$$

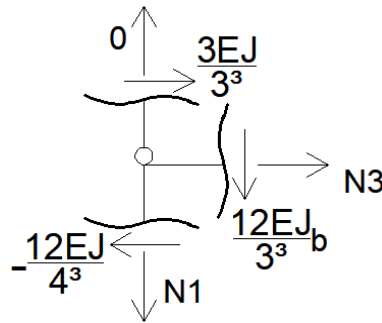
$$R_{32} := r_{23}$$

Do obliczenia R33 potrzebne są tnące i normalne. Do narysowania tnących wykorzystujemy metodę równoważenia prętów, lub korzystamy z tablic. Znak tnącej ustalamy na podstawie tablic. Ale można też ustalić kierunek tnących w węźle na podstawie strzałek na wykresie momentów.

T3



C



Normalna w pręcie 4 jest na pewno 0, ponieważ nie ma reakcji wzdłuż pręta na jego drugim końcu.

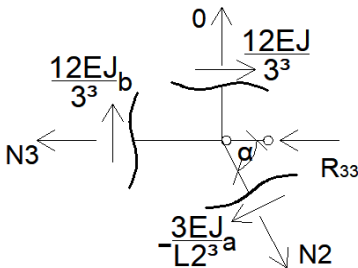
$$\Sigma Y = -N1 - \frac{12 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^3} \cdot b$$

$$N1 := -\frac{12 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^3} \cdot b = -0,2222 \frac{EJ}{\text{m}^3}$$

$$\Sigma X = N3 - \left( -\frac{12 \cdot EJ}{(4 \text{ m})^3} \right) + \frac{3 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^3}$$

$$N3 := -\frac{12 \cdot EJ}{(4 \text{ m})^3} - \frac{3 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^3} = -0,2986 \frac{EJ}{\text{m}^3}$$

D



Normalna w pręcie 5 jest na pewno 0, ponieważ nie ma reakcji wzdłuż pręta na jego drugim końcu.

$$\Sigma Y = \frac{12 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^3} \cdot b - \left( -\frac{3 \cdot EJ}{L2^3} \cdot a \right) \cdot \cos(\alpha) - N2 \cdot \sin(\alpha)$$

$$\frac{12 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^3} \cdot b - \left( -\frac{3 \cdot EJ}{L2^3} \cdot a \right) \cdot \cos(\alpha)$$

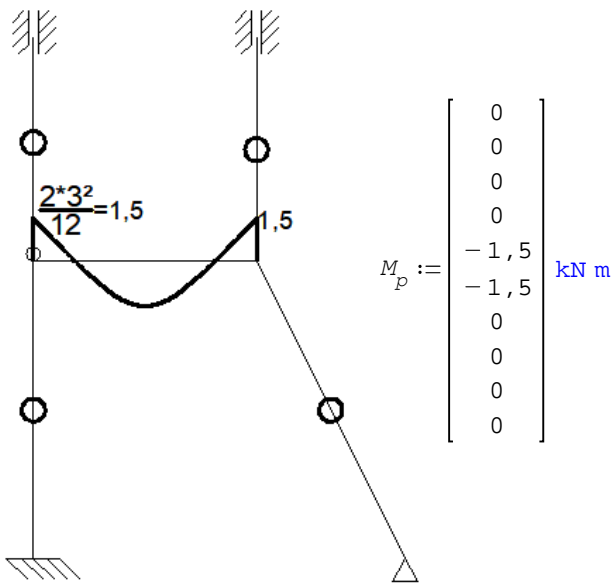
$$N2 := \frac{\frac{12 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^3} \cdot b - \left( -\frac{3 \cdot EJ}{L2^3} \cdot a \right) \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 0,2672 \frac{EJ}{\text{m}^3}$$

$$\Sigma X = -R_{33} - N3 + \frac{12 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^3} - \left( -\frac{3 \cdot EJ}{L2^3} \cdot a \right) \cdot \sin(\alpha) + N2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$R_{33} := -N3 + \frac{12 \cdot EJ}{(3 \text{ m})^3} - \left( -\frac{3 \cdot EJ}{L2^3} \cdot a \right) \cdot \sin(\alpha) + N2 \cdot \cos(\alpha) = 0,8961 \frac{EJ}{\text{m}^3}$$

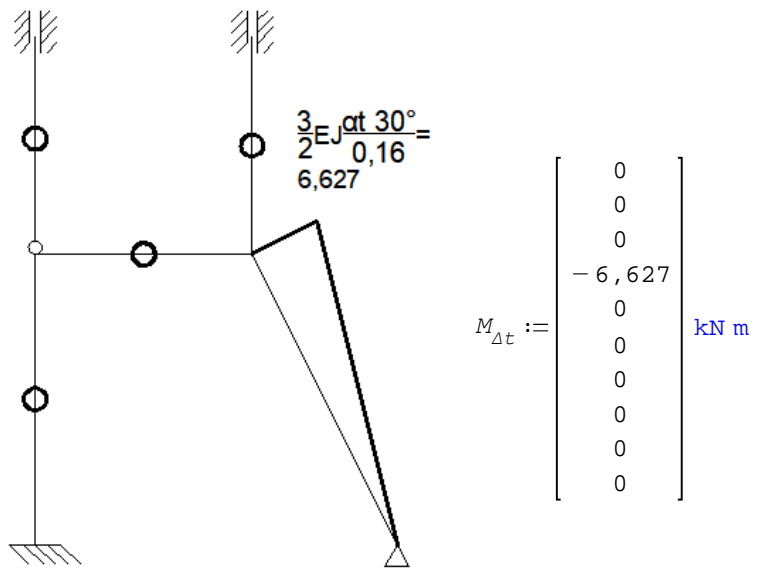
### Stan p

M<sub>p</sub> [kNm]



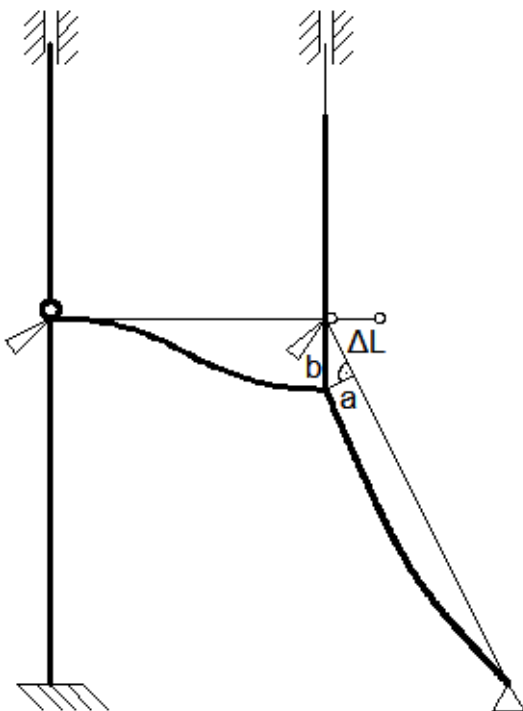
### Stan Δt

MΔt [kNm]

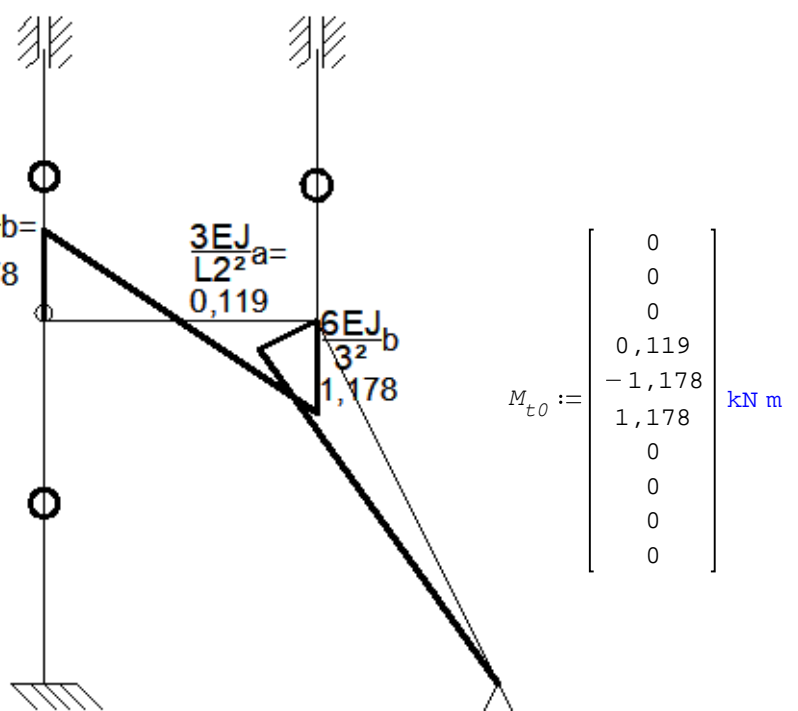


Uwaga, reakcje policzone zostaną po zsumowaniu wszystkich stanów rzeczywistych.

### Stan t0



M<sub>t0</sub> [kNm]



Pręt 2, z temperaturą skrócił się o:

$$\Delta L := \alpha_t \cdot \left( \frac{0 \text{ }^\circ\text{C} - 30 \text{ }^\circ\text{C}}{2} \right) \cdot L2 = -0,0008 \text{ m}$$

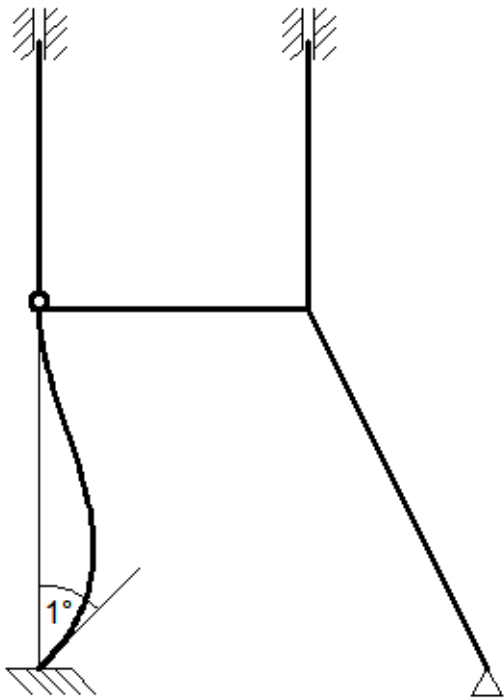
Węzeł 4 nie może przesunąć się tylko pod ukosem, bo jest blokada R3, więc przesunie się tylko w pionie. Pręt skróci się o ΔL ale przesunie się również w bok (prostopadle do osi) tak, żeby węzeł mógł przesunąć się tylko w pionie.

Ogólnie przy przecie ukośnym tworzymy mały trójkąt z trzech linii: rzeczywistego jego przesunięcia, linii wzdłuż pręta i linii prostopadłej do pręta.

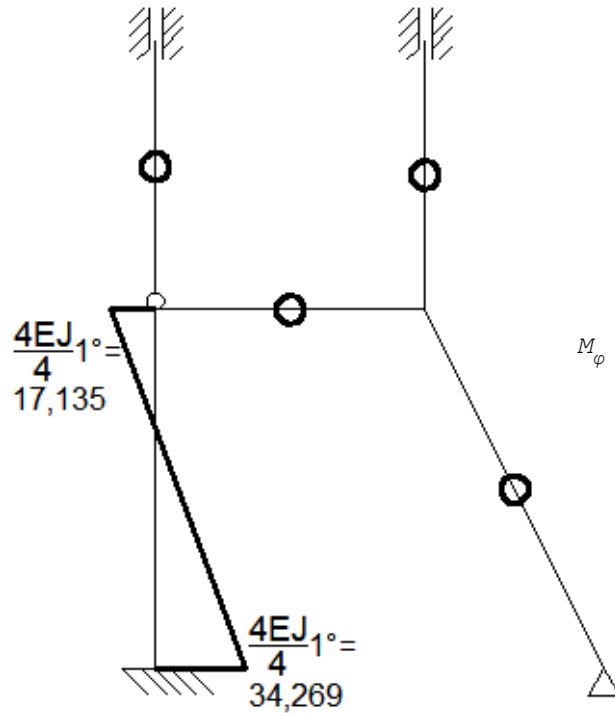
$$\frac{a}{\Delta L} = \frac{2 \text{ m}}{4 \text{ m}} \quad a := \frac{2 \text{ m}}{4 \text{ m}} \cdot \Delta L = -0,0004 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\Delta L} = \frac{L2}{4 \text{ m}} \quad b := \frac{L2}{4 \text{ m}} \cdot \Delta L = -0,0009 \text{ m}$$

Stan  $\phi$

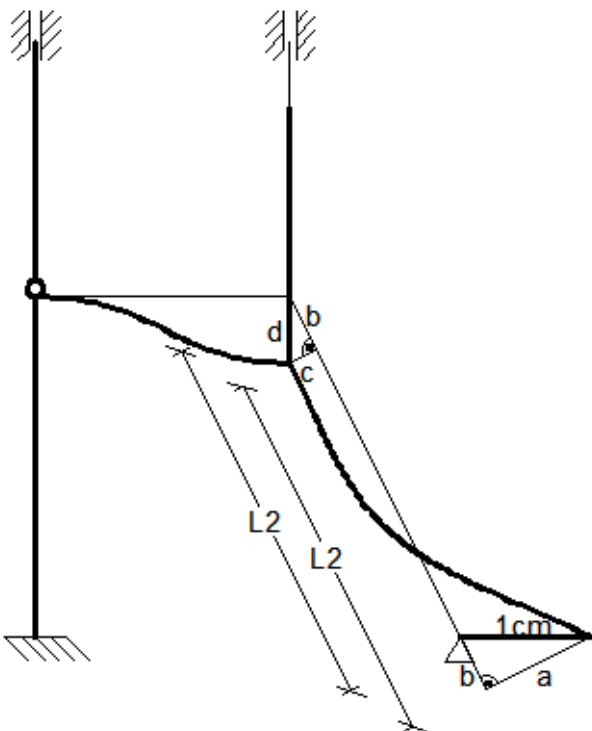


$M_\phi$  [kNm]

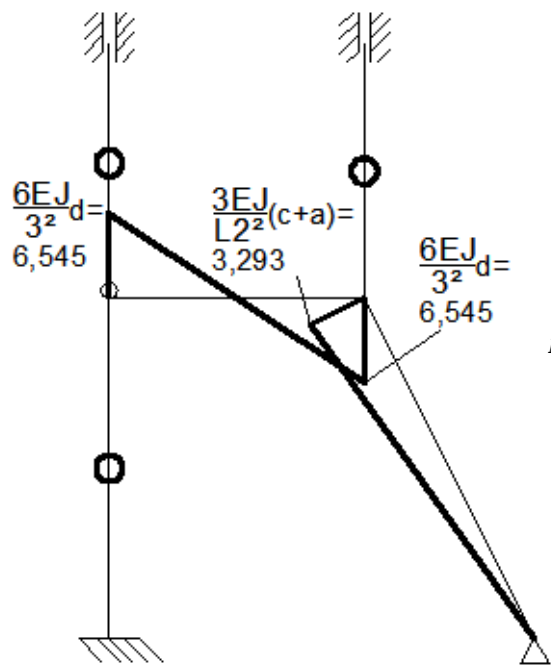


$$M_\phi := \begin{bmatrix} 34,269 \\ -17,135 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN m}$$

Stan  $\Delta$



$M_\Delta$  [kNm]



$$M_\Delta := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3,293 \\ -6,545 \\ 6,545 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN m}$$

Węzeł B przesuwa się w prawo o 1cm, więc w swojej osi przesunął się o "b". Na górze również musi się przesunąć o "b" w swojej osi. Na górze działa to tak samo jak w stanie t0.

$$\frac{a}{1 \text{ cm}} = \frac{4 \text{ m}}{L2} \quad a := \frac{4 \text{ m}}{L2} \cdot 1 \text{ cm} = 0,0089 \text{ m}$$

$$\frac{b}{1 \text{ cm}} = \frac{2 \text{ m}}{L2} \quad b := \frac{2 \text{ m}}{L2} \cdot 1 \text{ cm} = 0,0045 \text{ m}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{2 \text{ m}}{4 \text{ m}} \quad c := \frac{2 \text{ m}}{4 \text{ m}} \cdot b = 0,0022 \text{ m}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{L2}{4 \text{ m}} \quad d := \frac{L2}{4 \text{ m}} \cdot b = 0,005 \text{ m}$$

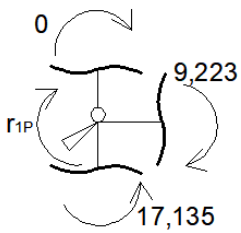
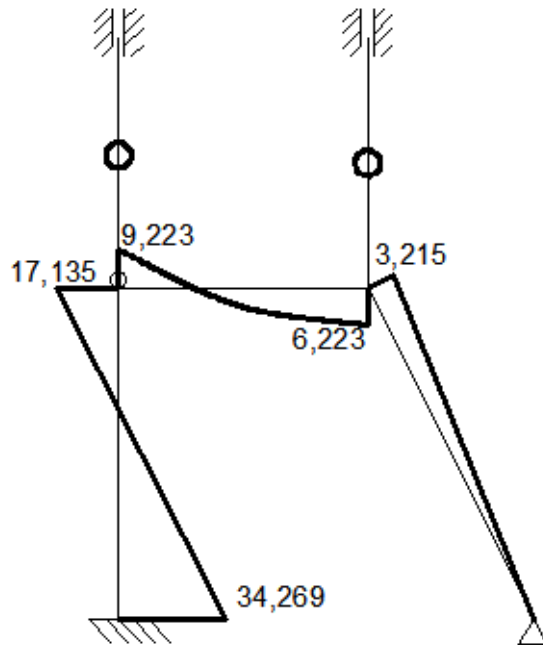
Pręty wyginają się o odległości prostopadłe do nich, czyli: pręt 3 wygiął się o odległość d, pręt 2 wygiął się o c+a, ponieważ na górze odległość prostopadła do pręta to c, a na dole a.

## Stan P - stan zsumowany

dołączamy do siebie wszystkie momenty w stanach rzeczywistych:  $p$ ,  $\Delta t$ ,  $t_0$ ,  $\varphi$ ,  $\Delta$ .

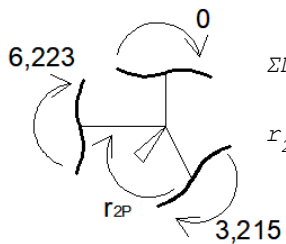
$$M_P := M_p + M_{\Delta t} + M_{t_0} + M_\varphi + M_\Delta = \begin{bmatrix} 34,269 \\ -17,135 \\ 0 \\ -3,215 \\ -9,223 \\ 6,223 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN m}$$

MP [kNm]



$$\Sigma M = r_{1P} + 9,223 \text{ kN m} - 17,135 \text{ kN m}$$

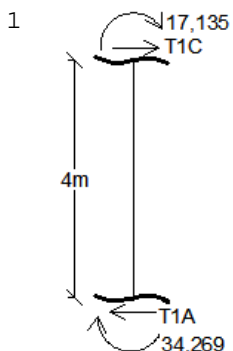
$$r_{1P} := -9,223 \text{ kN m} + 17,135 \text{ kN m} = 7,912 \text{ kN m}$$



$$\Sigma M = r_{2P} + 6,223 \text{ kN m} + 3,215 \text{ kN m}$$

$$r_{2P} := -6,223 \text{ kN m} - 3,215 \text{ kN m} = -9,438 \text{ kN m}$$

Do znalezienia tnących wykorzystano metodę równoważenia prętów,

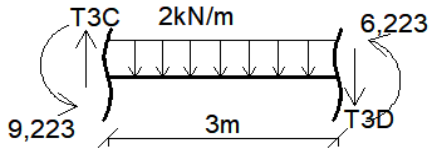


$$\Sigma M_A = 17,135 \text{ kN m} + 34,269 \text{ kN m} + T_{1C} \cdot 4 \text{ m}$$

$$T_{1C} := \frac{-17,135 \text{ kN m} - 34,269 \text{ kN m}}{4 \text{ m}} = -12,851 \text{ kN}$$

$$T_{1A} := T_{1C}$$

3



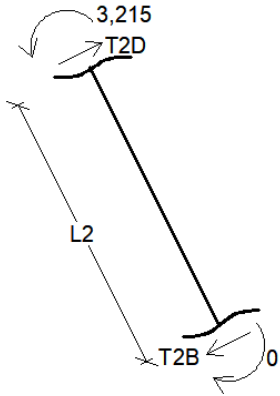
$$\Sigma M_C = -9,223 \text{ kN m} - 6,223 \text{ kN m} + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2} + T_{3D} \cdot 3 \text{ m}$$

$$T_{3D} := \frac{9,223 \text{ kN m} + 6,223 \text{ kN m} - 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2}}{3 \text{ m}} = 2,1487 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = T_{3C} - T_{3D} - 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m}$$

$$T_{3C} := T_{3D} + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} = 8,1487 \text{ kN}$$

2

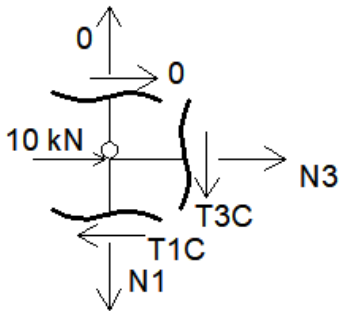


$$\Sigma M_B = -3,215 \text{ kN m} + T_{1D} \cdot L2$$

$$T_{2D} := \frac{3,215 \text{ kN m}}{L2} = 0,7189 \text{ kN}$$

$$T_{2B} := T_{2D}$$

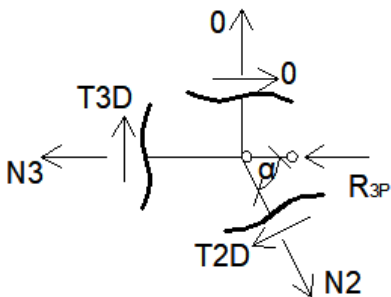
C



$$\Sigma X = N_3 - T_{1C} + 10 \text{ kN}$$

$$N_3 := T_{1C} - 10 \text{ kN} = -22,851 \text{ kN}$$

D



$$\Sigma Y = T_{3D} - N_2 \cdot \sin(\alpha) - T_{2D} \cdot \cos(\alpha)$$

$$N_2 := \frac{T_{3D} - T_{2D} \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2,0428 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = -N_3 - R_{3P} - T_{2D} \cdot \sin(\alpha) + N_2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$R_{3P} := -N_3 - T_{2D} \cdot \sin(\alpha) + N_2 \cdot \cos(\alpha) = 23,1216 \text{ kN}$$

## Układ równań

$$r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot \varphi_2 + r_{13} \cdot \Delta_3 + r_{1P} = 0$$

$$r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot \varphi_2 + r_{23} \cdot \Delta_3 + r_{2P} = 0$$

$$R_{31} \cdot \varphi_1 + R_{32} \cdot \varphi_2 + R_{33} \cdot \Delta_3 + R_{3P} = 0$$

rozwiązanie metodą macierzową

$$X := \begin{bmatrix} \frac{r_{11}}{\text{m}} & \frac{r_{12}}{\text{m}} & r_{13} \\ r_{21} & \frac{r_{22}}{\text{m}} & r_{23} \\ \frac{\text{m}}{\text{m}} & \frac{\text{m}}{\text{m}} & R_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left( - \begin{bmatrix} \frac{r_{1P}}{\text{m}} \\ r_{2P} \\ R_{3P} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0,0008 \\ -0,0022 \\ -0,0151 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0008 \\ -0,0022 \\ -0,0151 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Ze względu na ograniczenia programu (a raczej własności macierzy) konieczne było ustawienie jednakowych jednostek w macierzach, a następnie dopasowanie jednostek do odpowiednich niewiadomych.

$$\varphi_1 = -0,00084 \quad \varphi_2 = -0,00216 \quad \Delta_3 = -0,015108 \text{ m}$$

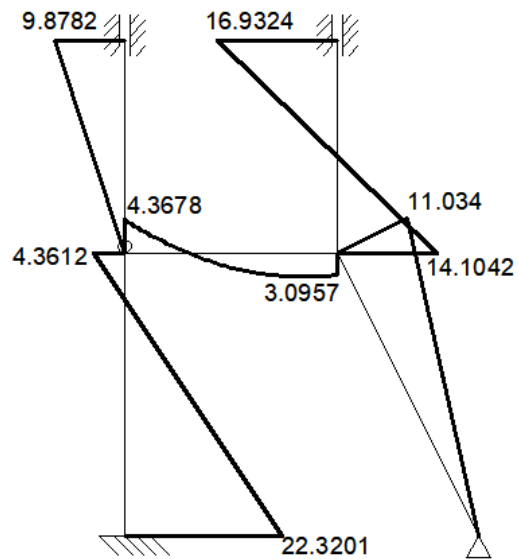


## Liczenie momentów ostatecznych

$$M_{ost} := M_1 \cdot \varphi_1 + M_2 \cdot \varphi_2 + M_3 \cdot \Delta_3 + M_P$$

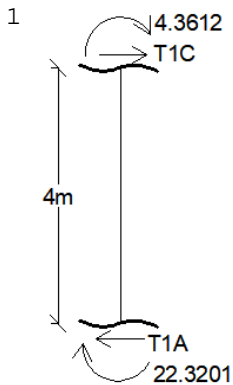
$$M_{ost} = \begin{bmatrix} 22,3201 \\ -4,3612 \\ 0 \\ -11,034 \\ -4,3678 \\ 3,0957 \\ 0 \\ -9,8782 \\ -14,1042 \\ 16,9324 \end{bmatrix} \text{ kN m}$$

## Most [kNm]



## Liczenie tnących ostatecznych

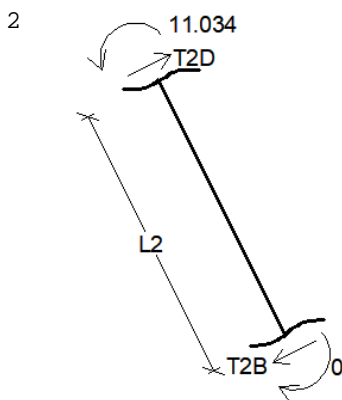
Metoda równoważenia prętów



$$\Sigma M_A = 22,3201 \text{ kN m} + 4,3612 \text{ kN m} + T_{1C} \cdot 4 \text{ m}$$

$$T_{1C} := \frac{-22,3201 \text{ kN m} - 4,3612 \text{ kN m}}{4 \text{ m}} = -6,6703 \text{ kN}$$

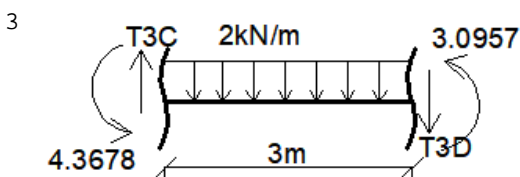
$$T_{1A} := T_{1C}$$



$$\Sigma M_D = -11,034 \text{ kN m} + T_{2B} \cdot L2$$

$$T_{2B} := \frac{11,034 \text{ kN m}}{L2} = 2,4673 \text{ kN}$$

$$T_{2D} := T_{2B}$$



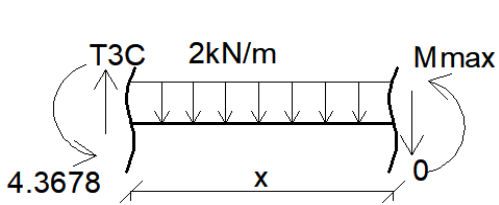
$$\Sigma M_C = -4,3678 \text{ kN m} - 3,0957 \text{ kN m} + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2} + T_{3D} \cdot 3 \text{ m}$$

$$T_{3D} := \frac{4,3678 \text{ kN m} + 3,0957 \text{ kN m} - 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot \frac{3 \text{ m}}{2}}{3 \text{ m}} = -0,5122 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = T_{3C} - T_{3D} - 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m}$$

$$T_{3C} := T_{3D} + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} = 5,4878 \text{ kN}$$

Szukanie ekstremum momentów:



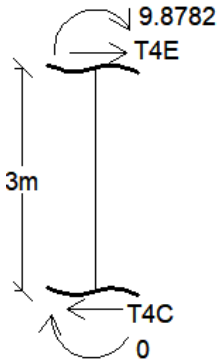
$$\Sigma Y = T_{3C} - 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot x$$

$$x := \frac{T_{3C}}{2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} = 2,7439 \text{ m}$$

$$\Sigma M_C = -4,3678 \text{ kN m} - M_{max} + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_{max} := -4,3678 \text{ kN m} + 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 3,1613 \text{ kN m}$$

4

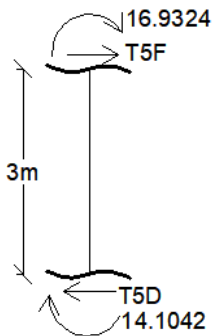


$$\Sigma M_C = 9,8782 \text{ kN m} + T_{4E} \cdot 3 \text{ m}$$

$$T_{4E} := \frac{-9,8782 \text{ kN m}}{3 \text{ m}} = -3,2927 \text{ kN}$$

$$T_{4C} := T_{4E}$$

5

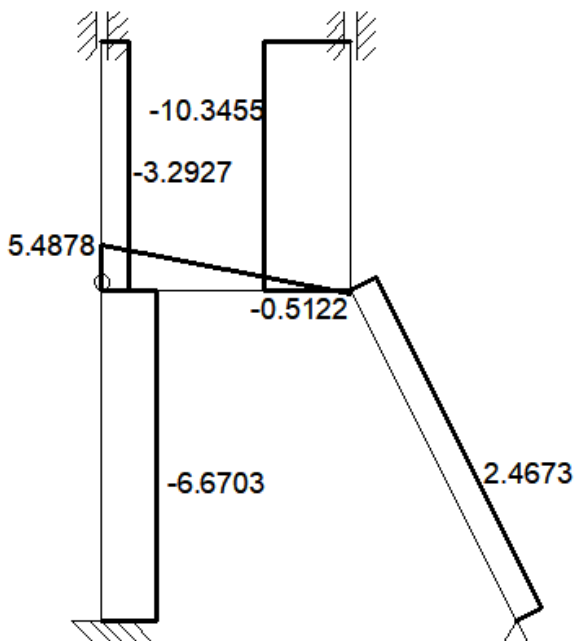


$$\Sigma M_D = 14,1042 \text{ kN m} + 16,9324 \text{ kN m} + T_{5F} \cdot 3 \text{ m}$$

$$T_{5F} := \frac{-14,1042 \text{ kN m} - 16,9324 \text{ kN m}}{3 \text{ m}} = -10,3455 \text{ kN}$$

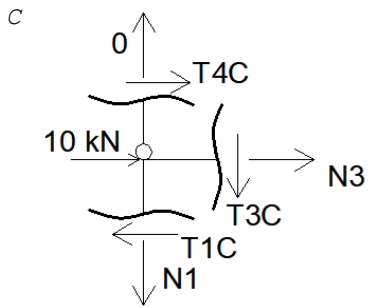
$$T_{5D} := T_{5F}$$

Tost [kN]



## Liczenie normalnych ostatecznych

Metoda równowagi węzłów

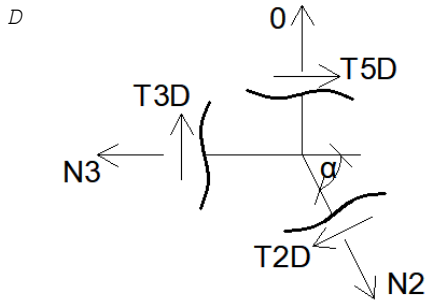


$$\Sigma Y = -N_1 - T_{3C}$$

$$N_1 := -T_{3C} = -5,4878 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = T_{4C} - T_{1C} + N_3 + 10 \text{ kN}$$

$$N_3 := -T_{4C} + T_{1C} - 10 \text{ kN} = -13,3776 \text{ kN}$$



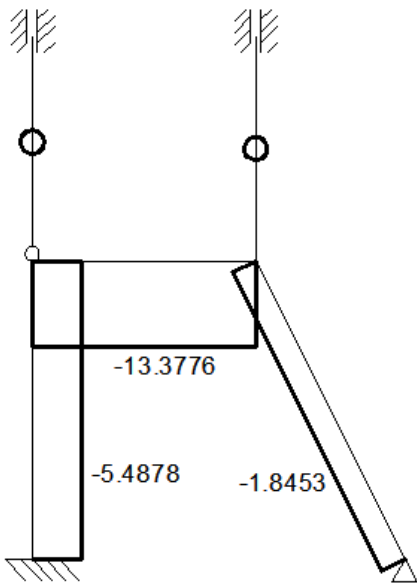
$$\Sigma X = -N_3 + T_{5D} - T_{2D} \cdot \sin(\alpha) + N_2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$N_2 := \frac{N_3 - T_{5D} + T_{2D} \cdot \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -1,8453 \text{ kN}$$

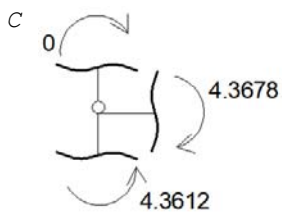
Sprawdzenie:

$$\Sigma Y := T_{3D} - N_2 \cdot \sin(\alpha) - T_{2D} \cdot \cos(\alpha) = 0,0349 \text{ kN} \approx 0$$

Warunek spełniony

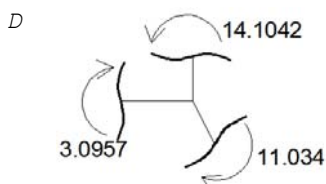


## Sprawdzenie równowagi momentów w węzłach



$$\Sigma M := 0 + 4,3678 \text{ kN m} - 4,3612 \text{ kN m} = 0,0066 \text{ kN m} \approx 0$$

Warunek spełniony



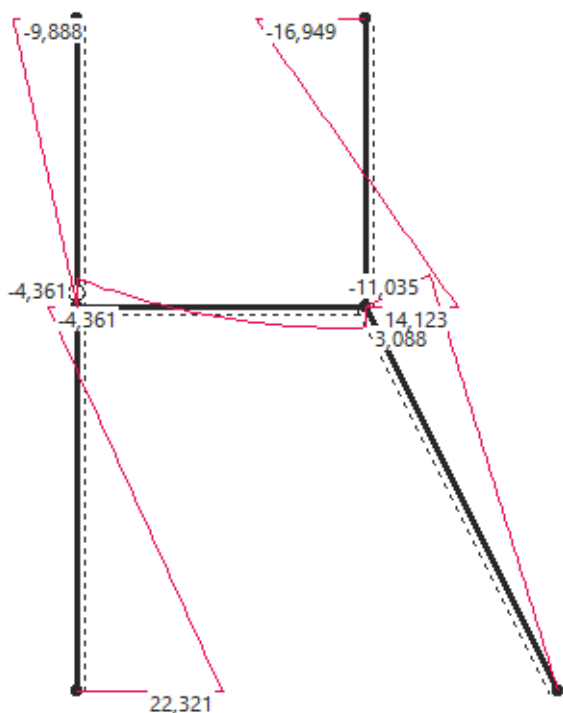
$$\Sigma M := 3,0957 \text{ kN m} - 14,1042 \text{ kN m} + 11,034 \text{ kN m} = 0,0255 \text{ kN m} \approx 0$$

Warunek spełniony

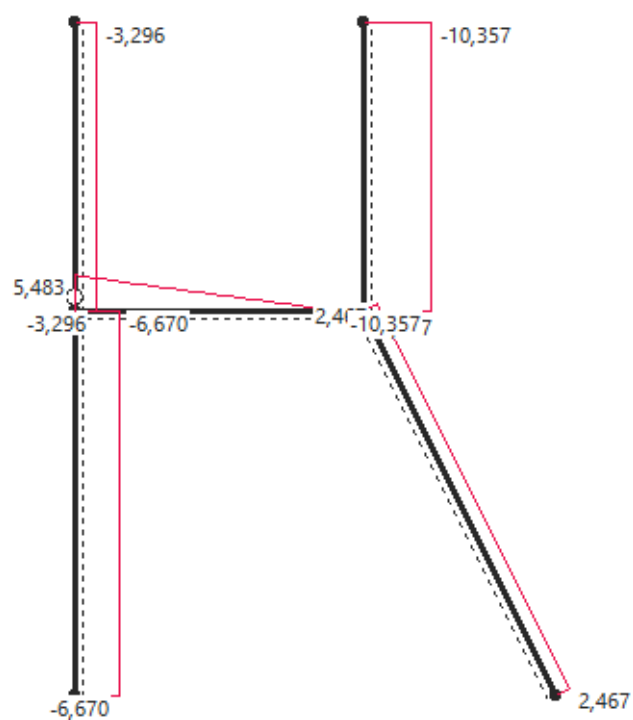
# Sprawdzenie w Soldisie

lub innym programie MES

**M [kNm]**



**T [kN]**



**N [kN]**

