

Mechanika teoretyczna

Wykład nr 2

Wypadkowa dowolnego układu sił.

Równowaga.

Rodzaje sił i obciążeń.

Rodzaje ustrojów prętowych.

1

Wypadkowa - metoda analityczna

n Składowe poszczególnych sił układu:

$$P_{ix} = P_i \cos \alpha_i \quad P_{iy} = P_i \sin \alpha_i$$

n Składowe siły wypadkowej:

$$W_x = P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} \quad W_y = P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny}$$

n Miara siły wypadkowej:

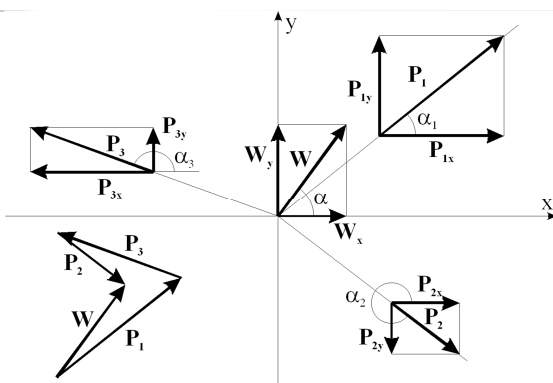
$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$$

n Kierunek wypadkowej:

$$\cos \alpha = \frac{W_x}{W} \quad \sin \alpha = \frac{W_y}{W}$$

2

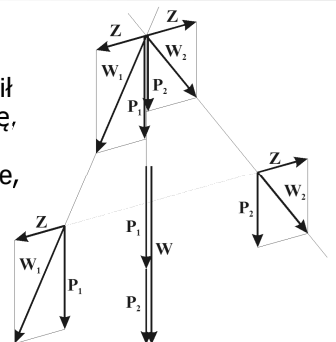
Przykład



3

Wypadkowa układu sił równoległych

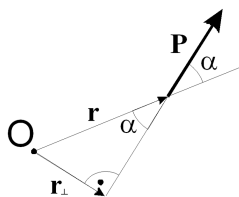
n Przyłożenie lub odjęcie układu zerowego (układ sił równoważących się, np. dwie siły o takiej samej mierze, linii działania i przeciwnych zwrotach) nie wpływa na stan równowagi ciała.



4

Moment siły (1)

n **Moment siły względem punktu** – iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego omawiany punkt i punkt przyłożenia siły, oraz wektora siły:



$$M_O^P = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$M_O^P = r \cdot P \sin \alpha$$

$$r_{\perp} = r \cdot \sin \alpha$$

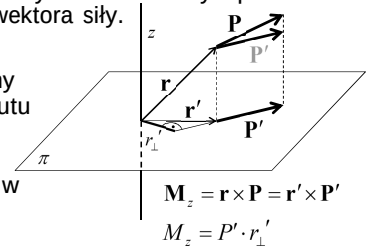
$$M_O^P = r_{\perp} \cdot P$$

5

Moment siły (2)

n **Moment siły względem prostej** - Momentem względem prostej nazywamy iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego punkt prostej najbliższy kierunkowi siły i punkt przyłożenia siły, i wektora siły.

n Moment siły względem osi równy jest momentowi rzutu siły na płaszczyznę prostopadłą do osi względem punktu, w którym oś przebija płaszczyznę.



$$\mathbf{M}_z = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{r}' \times \mathbf{P}'$$

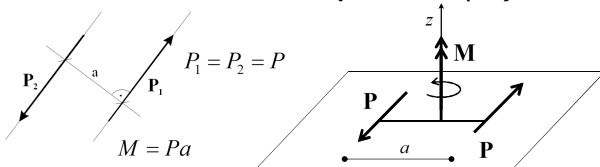
$$M_z = P' \cdot r'_{\perp}$$

6

Para sił

n **Parę sił** stanowią dwie siły o równoległych liniach działania, o przeciwnych zwrotach, zaś o tych samych miarach.

n **Ramię pary sił** – odległość pomiędzy kierunkami sił nosi nazwę ramienia pary sił.



7

Dowolny płaski układ sił (1)

n Redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w biegunie redukcji i wypadkowego momentu względem tego bieguna.

n Siły składowe mogą zostać przeniesione do bieguna redukcji, pod warunkiem przyłożenie momentu od tych sił względem bieguna redukcji.

8

Dowolny płaski układ sił ⁽²⁾

- Wypadkową siłę wyznacza się dla układu zbieżnego przyłożonego w biegunie redukcji.

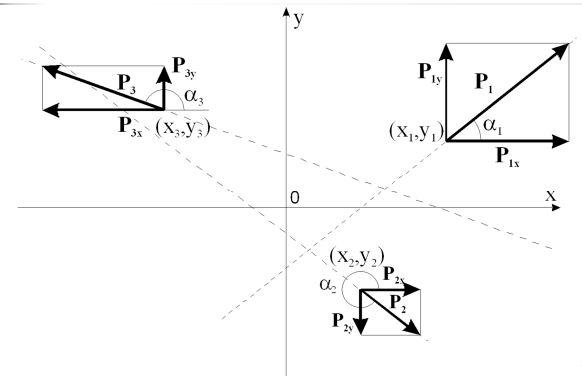
$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i$$

- Wypadkowy moment jest równy sumie momentów od sił składowych.

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{io}$$

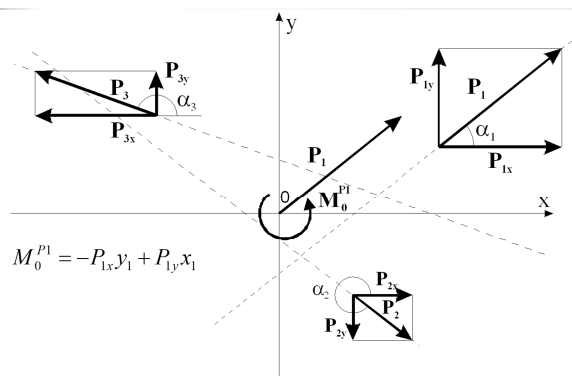
9

Przykład ⁽¹⁾



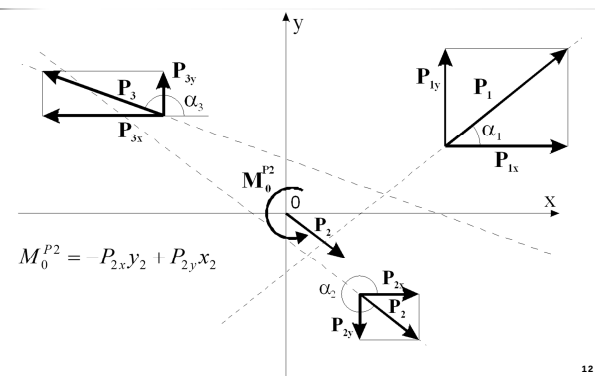
10

Przykład ⁽²⁾



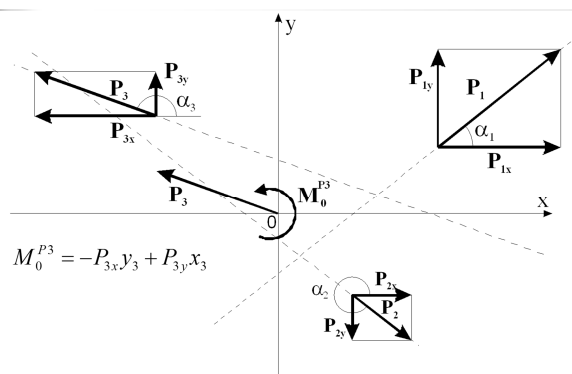
11

Przykład ⁽³⁾



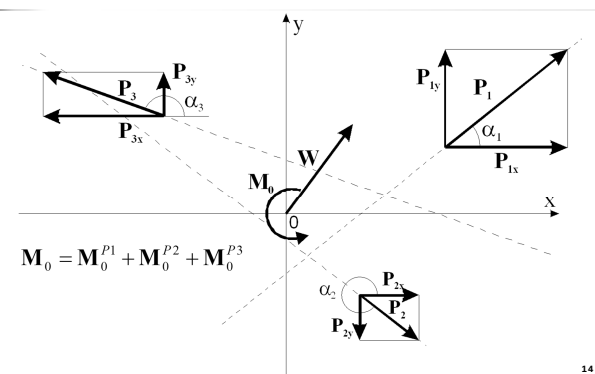
12

Przykład ⁽⁴⁾



13

Przykład ⁽⁵⁾



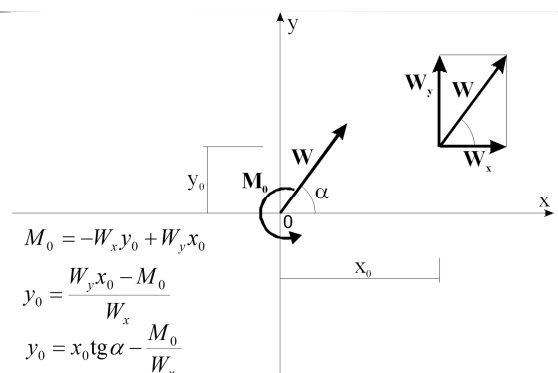
14

Dowolny płaski układ sił ⁽³⁾

- Wypadkowy moment może zostać przedstawiony jako:
 - wektor momentu;
 - para sił;
 - moment od siły wypadkowej przyłożonej nie w biegunie redukcji, a na linii działania wyznaczonej w taki sposób, że moment od siły wypadkowej równy jest momentowi od sił składowych.

15

Moment od wypadkowej



16

Uogólnienie w przestrzeni

- n Układ sił **zbieżnych** – redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w punkcie zbieżności.
- n **Dowolny** przestrzenny układ sił – redukcja do wypadkowej siły i wypadkowego momentu.

17

Klasyfikacja układów sił

Układ sił - układ wypadkowy	Płaszczyzna	Przestrzeń
Zbieżny	Siła wypadkowa w płaszczyźnie	Siła wypadkowa – dowolny kierunek w przestrzeni
Dowolny	Siła wypadkowa w płaszczyźnie i wektor momentu prostopadły do płaszczyzny	Siła wypadkowa (dowolny kierunek w przestrzeni) i wypadkowy wektor momentu (dowolny kierunek w przestrzeni)

18

Stan równowagi

- n **Równowaga statyczna**
Punkt materialny (ciało sztywne) jest w równowadze, jeżeli pod wpływem układu sił, nie porusza się on lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki układ sił nazywa się zrównoważonym lub równoważnym zeru.

19

Oswobodzenie z więzów

- n Ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić z więzów, zastępując ich działanie reakcjami.
- n Ciało oswobodzone z więzów można traktować jako swobodne pod działaniem sił czynnych (obciążeń) i biernych (reakcji).

20

Rodzaje sił w mechanice

- n W mechanice wyróżnia się następujące rodzaje sił:
 - **siły zewnętrzne** - obciążenie pochodzące od innych ciał;
 - **reakcje** - siły zewnętrzne wynikające ze sposobu zamocowania konstrukcji;
 - **siły wewnętrzne** - wzajemne oddziaływanie pomiędzy częściami ciała.

21

Więzy – nacisk ⁽¹⁾

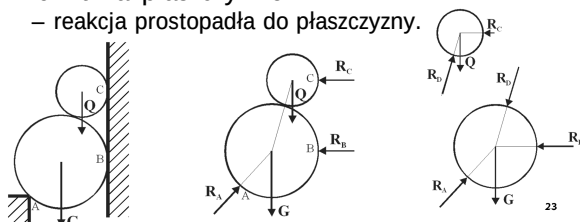
- n Powierzchnia płaska na płaszczyźnie:
 - reakcja prostopadła do płaszczyzny styku;
- n Przekrój kołowy na płaszczyźnie:
 - reakcja prostopadła do płaszczyzny styku (stycznej w punkcie styczności);



22

Więzy – nacisk ⁽²⁾

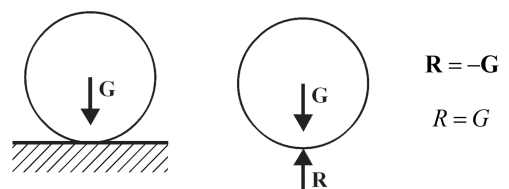
- n Przekrój kołowy oparty o przekrój kołowy:
 - reakcja prostopadła do stycznej obu ciał w punkcie styku (wzdłuż prostej łączącej środki okręgów);
- n Punkt na płaszczyźnie:
 - reakcja prostopadła do płaszczyzny.



23

Równowaga dwóch sił

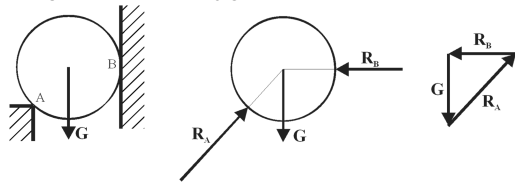
- n Układ dwóch sił pozostaje w równowadze, jeżeli siły te działają wzdłuż jednej prostej, mają przeciwne zwroty i takie same miary.



24

Równowaga trzech sił

- Układ trzech sił jest zrównoważony, jeżeli siły te tworzą płaski układ sił, ich linie działania przecinają się w jednym punkcie (układ zbieżny), zaś wielobok sił jest zamknięty.



25

Równania równowagi punktu materialnego

- II zasada dynamiki Newtona:
 $P = ma$
- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$a = 0 \Rightarrow P = 0$$

26

Równania równowagi ciała sztywnego (siły zbieżne)

- II zasada dynamiki Newtona:
 $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n = ma$
- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$a = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n P_i = 0$$

27

Układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **przecinają się w jednym punkcie**. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zero lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$W = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i = 0$$

28

Płaski układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie**. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zero lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$W = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i = 0$$

29

Równania równowagi układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zero.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0.$$

30

Równania równowagi płaskiego układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne, leżące w jednej płaszczyźnie, były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zero.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0.$$

31

Warunki równowagi układu zbieżnego (podsumowanie)

Wypadkowa układu sił musi być równa 0, tj. zamyka się wielobok sznurowy sił (graficznie), a sumy rzutów sił układu na osie układu współrzędnych muszą być równe zero (analitycznie).

- Przestrzenny układ sił**

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

- Płaski układ sił**

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0;$$

32

Równania równowagi ciała sztywnego (dowolny układ sił)

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

n Jeżeli ciało sztywne jest w stanie równowagi statycznej, to dodatkowo:

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_o = 0$$

33

Warunki równowagi dowolnego układu sił ⁽¹⁾

n Płaski układ sił

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iO} = 0$$

lub

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad AB \not\perp x$$

lub

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iC} = 0 \quad A, B, C \notin l$$

34

Warunki równowagi dowolnego układu sił ⁽²⁾

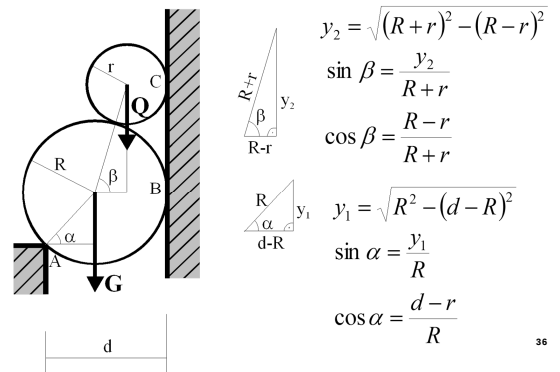
n Przestrzenny układ sił

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

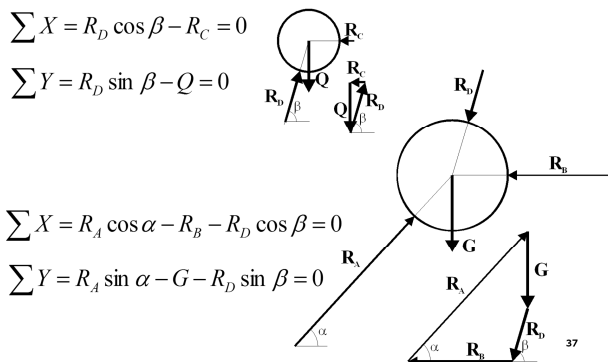
35

Przykład (dwa układy zbieżne) ⁽¹⁾



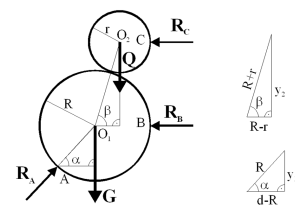
36

Przykład (dwa układy zbieżne) ⁽²⁾



37

Przykład (układ niezbieżny)



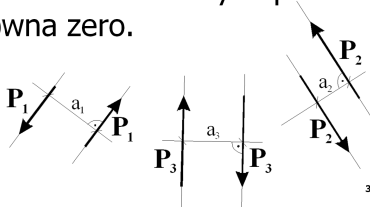
$$\begin{aligned} \sum X &= R_A \cos \alpha - R_B - R_C = 0 \\ \sum Y &= R_A \sin \alpha - Q - G = 0 \\ \sum M_{O1} &= R_C \cdot y_2 - Q \cdot (R-r) = 0 \end{aligned}$$

38

Równowaga par sił

n Aby układ par sił, działających w jednej płaszczyźnie na ciało sztywne, znajdował się w równowadze, suma wypadkowych momentów tych par sił musi być równa zero.

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$



39

Podstawowe typy ustrojów prętowych

- n **Pręt** – element o wymiarach poprzecznych (np. grubość i szerokość) znacznie mniejszych od trzeciego wymiaru (długość)
- n **Belka** – ustrój prętowy z prętami rozmieszczonymi w jednej linii. Siły często są prostopadłe do osi belki.
- n **Rama** – ustrój prętowy
- n **Krata** – ustrój prętowy, który składa się z prętów połączonych przegubami. Siły mogą być przykładane tylko w węzłach.

40

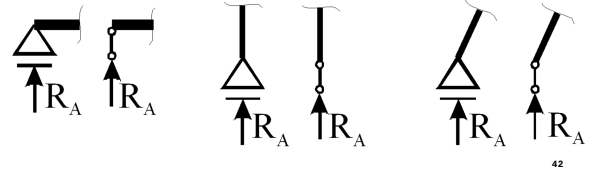
Stopnie swobody

- n Liczba niezależnych ruchów, jakie ciało jest w stanie zrealizować w przestrzeni.
- n Punkt materialny:
 - w przestrzeni – 3 (3 składowe przesuwu);
 - na płaszczyźnie – 2 (2 składowe przesuwu);
- n Ciało sztywne
 - w przestrzeni – 6 (3 składowe przesuwu i 3 składowe obrotu);
 - na płaszczyźnie – 3 (2 składowe przesuwu i obrót).

41

Podpory, pręty podporowe ⁽¹⁾

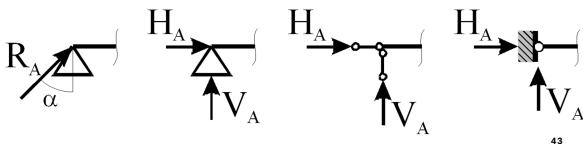
- n Podpora przegubowa przesuwna – zablokowana jedna składowa przesuwu, jeden pręt podporowy, jedna reakcja.



42

Podpory, pręty podporowe ⁽²⁾

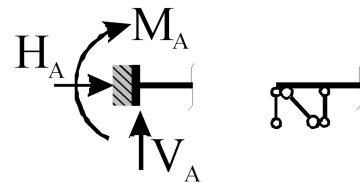
- n Podpora przegubowa nieprzesuwna – zablokowane obie składowe przesuwu, dwa pręty podporowe, dwie niewiadome: reakcja i kierunek lub dwie składowe reakcji.



43

Podpory, pręty podporowe ⁽³⁾

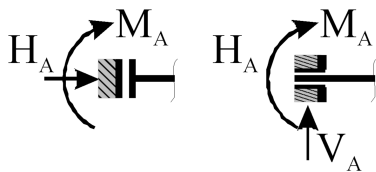
- n Szttywne zamocowanie – zablokowane wszystkie przemieszczenia (dwie składowe przesuwu i obrót), trzy pręty podporowe, trzy niewiadome – dwie składowe siły i moment.



44

Inne sposoby podparcia

- n Szttywne zamocowanie z możliwością przesuwu:
 - poprzecznie do osi pręta;
 - wzdłuż pręta.



45