

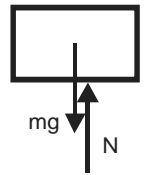
Mechanika ogólna

Wykład nr 13

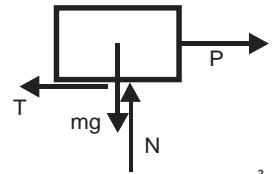
Zjawisko tarcia. Prawa tarcia.

Więzy z tarciem

n W więzach, w których nie występuje tarcie, reakcja jest prostopadła do płaszczyzny styku ciał (nacisk).



n W więzach z tarciem dochodzi jeszcze jedna reakcja, równoległa do płaszczyzny styku.



Prawa tarcia statycznego Coulomba i Morena

n Siła tarcia jest zawsze przeciwna do występującego lub ewentualnego ruchu.

n Wielkość siły tarcia jest niezależna od pola powierzchni stykających się ciał, zależy jedynie od rodzaju powierzchni.

n Zależność między naciskiem i siłą tarcia:

$$T = m \cdot N$$

Współczynnik tarcia

Rodzaj powierzchni	m
Stal-stal	0,15
Stal-żeliwo	0,18
Żeliwo-żeliwo	0,45
Metal-drewno	0,5-0,6
Drewno-drewno	0,65
Skóra-metal	0,6

Tarcie statyczne i kinetyczne

n Tarcie występuje w przypadku układów poruszających (kinetyczne) lub w układach, w których ruch jest potencjalnie możliwy, ale jeszcze do niego nie dochodzi (statyczne).

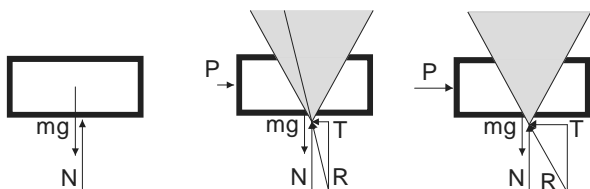
Tarcie statyczne

n Tarcie statyczne przeciwdziałające wystąpieniu ruchu zwiększa się w wyniku przyłożenia siły od 0 do wartości maksymalnej (tarcie całkowicie rozwinięte).

Kąt tarcia

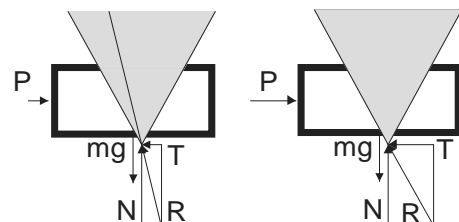
n Kąt między reakcją pionową a siłą tarcia nazywany jest kątem tarcia:

$$m = \frac{T}{N} = \operatorname{tg} f$$

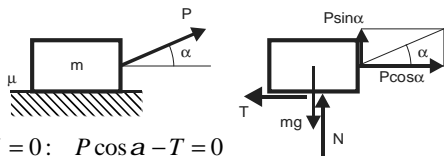


Stożek tarcia

n Linia działania wypadkowej reakcji zawarta jest wewnątrz, lub w przypadku tarcia całkowicie rozwiniętego, na powierzchni stożka nazywanego stożkiem tarcia.



Tarcie ślizgowe - przykład



$$\sum X = 0: P \cos \alpha - T = 0$$

$$\sum Y = 0: P \sin \alpha + N - m \cdot g = 0$$

n Prawo tarcia: $T = m \cdot N$

$$N = m \cdot g - P \sin \alpha$$

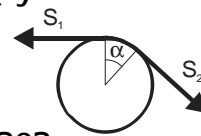
$$m(m \cdot g - P \sin \alpha) = P \cos \alpha \quad P = \frac{m \cdot m \cdot g}{m \sin \alpha + \cos \alpha}$$

9

Tarcie cięgien o bloczek nieruchomy ⁽¹⁾

n Zależność między siłami w cięgnię przy całkowicie rozwiniętym tarcu:

$$S_1 = S_2 \cdot e^{m\alpha}$$



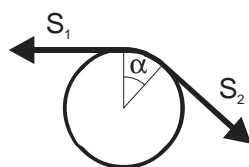
gdzie S_1 jest siłą działającą w cięgnię w kierunku ewentualnego ruchu.

10

Tarcie cięgien o bloczek nieruchomy ⁽²⁾

n Zależność odwrotna:

$$S_2 = S_1 \cdot e^{-m\alpha}$$

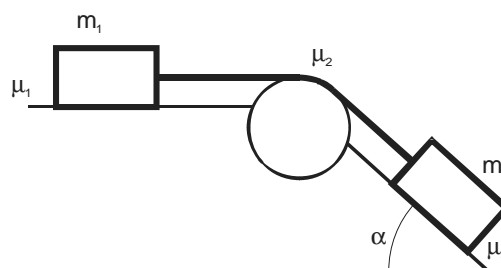


n Kąt α nazywany jest kątem opasania i musi być wyrażony w radianach.

11

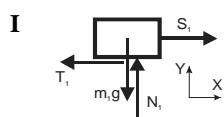
Tarcie cięgien – przykład ⁽¹⁾

n Obliczyć masę graniczną m_2 , po przekroczeniu której rozpocznie się ruch. Miara kąta $\alpha = 30^\circ$.



12

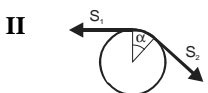
Tarcie cięgien – przykład ⁽²⁾



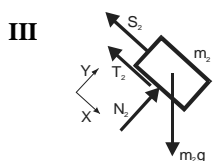
$$\sum X = 0: S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

$$T_1 = m_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{m_2 \alpha}$$



$$\sum X = 0: m_2 g \sin \alpha - S_2 - T_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0$$

$$T_2 = m_3 \cdot N_2$$

13

Przykład – rozwiązanie

I $S_1 = T_1$

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$S_1 = m_1 \cdot N_1 = m_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$T_1 = m_1 \cdot N_1$$

II $S_2 = S_1 \cdot e^{m_2 \alpha}$

$$S_2 = m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\frac{m_2 p}{6}}$$

III $m_2 g \sin \alpha - S_2 - T_2 = 0$

$$m_2 g \sin \alpha - m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\frac{m_2 p}{6}} - m_3 \cdot m_2 g \cos \alpha = 0$$

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha$$

$$T_2 = m_3 \cdot N_2$$

$$m_2 = \frac{m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\frac{m_2 p}{6}}}{g \sin \alpha - m_3 \cdot g \cos \alpha}$$

14

Opór przy toczeniu

n W rzeczywistych układach, w przypadku ciał o przekrojach okrągłych, reakcja pionowa przesunięta jest w kierunku ewentualnego ruchu.

n Wynika to z nierównomiernego rozkładu sił pod ciałem. Mimo założenia kołowości przekroju, w rzeczywistości styk nie jest punktowy.

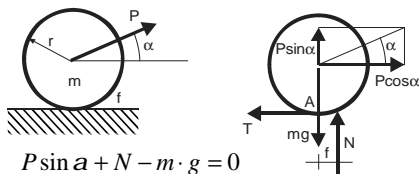
Wartości współczynnika oporu toczenia

Koło	Rodzaj podłoża	f [cm]
Drewno	Drewno	0,05-0,8
Drewno	Stal	0,03-0,04
Stal	Stal	0,001-0,005
Żeliwo	Żeliwo	0,005

15

16

Opór toczenia - przykład



$$\sum Y = 0: P \sin \alpha + N - m \cdot g = 0$$

$$\sum M_A = 0: P \cos \alpha \cdot r - N \cdot f = 0$$

$$N = m \cdot g - P \sin \alpha$$

$$P \cos \alpha \cdot r - (m \cdot g - P \sin \alpha) \cdot f = 0$$

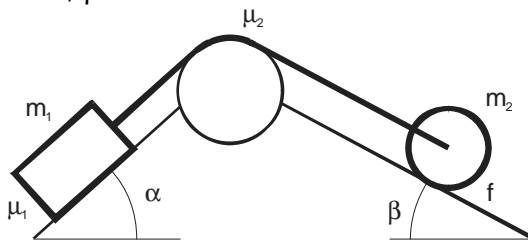
$$P = \frac{m \cdot g \cdot f}{r \cdot \cos \alpha + f \sin \alpha}$$

17

Przykład A

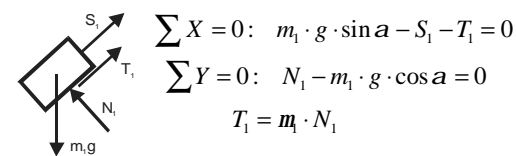
n Określić zakres, w jakim ma mieścić się wielkość masy m_2 , aby nie wystąpił ruch.

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ$$



18

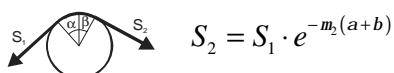
Przykład A – wariant I (ruch w lewo)



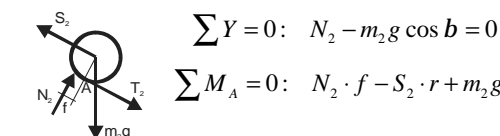
$$\sum X = 0: m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$T_1 = m_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{-m_2(a+b)}$$



$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 g \cos b = 0$$

$$\sum M_A = 0: N_2 \cdot f - S_2 \cdot r + m_2 g \sin a \cdot r = 0$$

19

Wariant I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$T_1 = m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$S_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

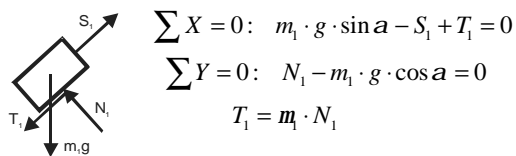
$$S_2 = (m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{-m_2(a+b)}$$

$$N_2 = m_2 g \cos b$$

$$m_{2\min} = \frac{(m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{-m_2(a+b)} \cdot r}{g \cos b \cdot f + g \sin a \cdot r}$$

20

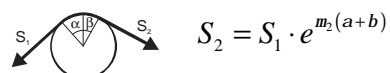
Przykład A – wariant II (ruch w prawo)



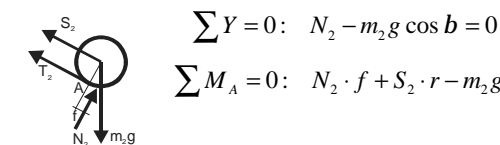
$$\sum X = 0: m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - S_1 + T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$T_1 = m_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{m_2(a+b)}$$



$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 g \cos b = 0$$

$$\sum M_A = 0: N_2 \cdot f + S_2 \cdot r - m_2 g \sin a \cdot r = 0$$

21

Wariant II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$T_1 = m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$S_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$S_2 = (m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{m_2(a+b)}$$

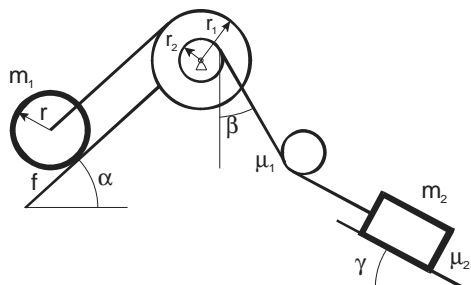
$$N_2 = m_2 g \cos b$$

$$m_{2\max} = \frac{(m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{m_2(a+b)} \cdot r}{g \sin a \cdot r - g \cos b \cdot f}$$

22

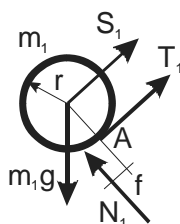
Przykład B-I (1)

n Określić maksimum masy m_1 , przy którym nie wystąpi jeszcze ruch.



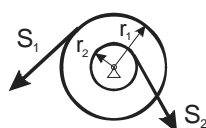
23

Przykład B-I (2)



$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$$

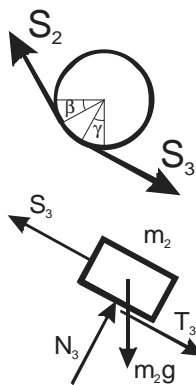
$$\sum M_A = 0: N_1 \cdot f + S_1 \cdot r - m_1 g \sin \alpha \cdot r = 0$$



$$\sum M_O = 0: S_1 \cdot r_1 - S_2 \cdot r_2 = 0$$

24

Przykład B-I (3)



$$S_3 = S_2 \cdot e^{-m_1 \left(\frac{p}{2} - (a+b) \right)}$$

$$\sum X = 0: m_2 \cdot g \cdot \sin g - S_3 + T_3 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_3 - m_2 \cdot g \cdot \cos g = 0$$

$$T_3 = m_2 \cdot N_3$$

25

Przykład B-I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 g \cos a \quad S_1 = \frac{m_1 g \sin a \cdot r - m_1 g \cos a \cdot f}{r}$$

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{m_1 g \sin a \cdot r - m_1 g \cos a \cdot f}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_3 = S_2 \cdot e^{-m_1 \left(\frac{p}{2} - (a+b) \right)} = \frac{m_1 g \sin a \cdot r - m_1 g \cos a \cdot f}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{-m_1 \left(\frac{p}{2} - (a+b) \right)}$$

$$N_3 = m_2 \cdot g \cdot \cos g$$

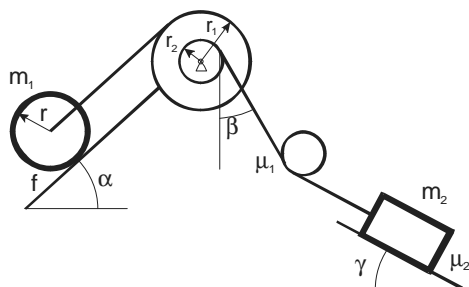
$$T_3 = m_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos g$$

$$m_1 = \frac{(m_2 \cdot g \cdot \sin g + m_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos g) \cdot r \cdot r_2}{(g \sin a \cdot r - g \cos a \cdot f) \cdot r_1} \cdot e^{m_1 \left(\frac{p}{2} - (a+b) \right)}$$

26

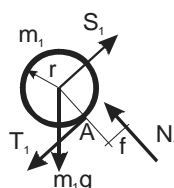
Przykład B-II (1)

Określić minimum masy m_1 , przy którym nie wystąpi jeszcze ruch.



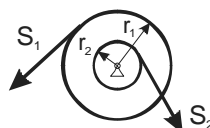
27

Przykład B-II (2)



$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 g \cos a = 0$$

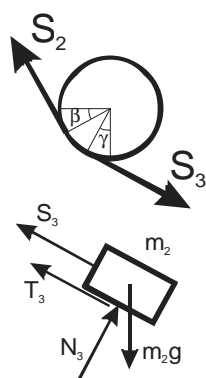
$$\sum M_A = 0: N_1 \cdot f - S_1 \cdot r + m_1 g \sin a \cdot r = 0$$



$$\sum M_O = 0: S_1 \cdot r_1 - S_2 \cdot r_2 = 0$$

28

Przykład B-II (3)



$$S_3 = S_2 \cdot e^{m_1 \left(\frac{p}{2} - (a+b) \right)}$$

$$\sum X = 0: m_2 \cdot g \cdot \sin g - S_3 - T_3 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_3 - m_2 \cdot g \cdot \cos g = 0$$

$$T_3 = m_2 \cdot N_3$$

29

Przykład B-II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 g \cos a \quad S_1 = \frac{m_1 g \cos a \cdot f + m_1 g \sin a \cdot r}{r}$$

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{m_1 g \cos a \cdot f + m_1 g \sin a \cdot r}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_3 = S_2 \cdot e^{m_1 \left(\frac{p}{2} - (a+b) \right)} = \frac{m_1 g \cos a \cdot f + m_1 g \sin a \cdot r}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{m_1 \left(\frac{p}{2} - (a+b) \right)}$$

$$N_3 = m_2 \cdot g \cdot \cos g$$

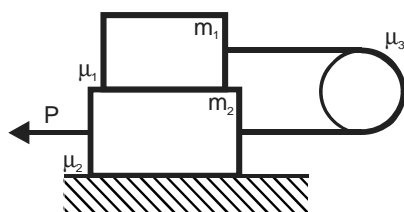
$$T_3 = m_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos g$$

$$m_1 = \frac{(m_2 \cdot g \cdot \sin g - m_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos g) \cdot r \cdot r_2}{(g \cos a \cdot f + g \sin a \cdot r) \cdot r_1} \cdot e^{-m_1 \left(\frac{p}{2} - (a+b) \right)}$$

30

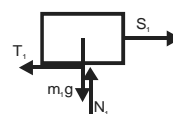
Przykład C-I (1)

Określić graniczną wartość siły, przy przekroczeniu której może wystąpić ruch.



31

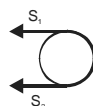
Przykład C-I (2)



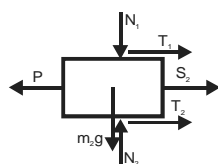
$$\sum X = 0: S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

$$T_1 = m_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{m_3 P}$$



$$\sum X = 0: P - T_1 - T_2 - S_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 \cdot g - N_1 = 0$$

$$T_2 = m_2 \cdot N_2$$

32

Przykład C-I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = m_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$S_1 = m_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$S_2 = m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{m_3 P}$$

$$N_2 = m_2 \cdot g + m_1 \cdot g$$

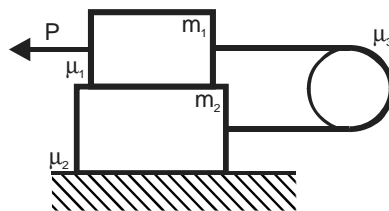
$$T_2 = m_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)$$

$$P = m_1 \cdot m_1 \cdot g + m_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g) + m_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{m_3 P}$$

33

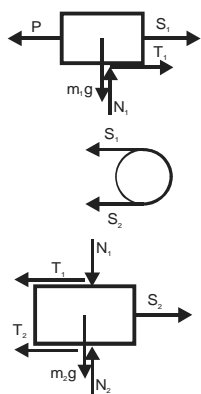
Przykład C-II (1)

n Określić graniczną wartość siły, przy przekroczeniu której może wystąpić ruch.



34

Przykład C-II (2)



$$\sum X = 0: P - S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

$$T_1 = m_1 \cdot N_1$$

$$S_2 = S_1 \cdot e^{-m_3 P}$$

$$\sum X = 0: S_2 - T_1 - T_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 \cdot g - N_1 = 0$$

$$T_2 = m_2 \cdot N_2$$

35

Przykład C-II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = m_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$N_2 = m_2 \cdot g + m_1 \cdot g$$

$$T_2 = m_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)$$

$$S_2 = m_1 \cdot m_1 \cdot g + m_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)$$

$$S_1 = (m_1 \cdot m_1 \cdot g + m_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)) \cdot e^{m_3 P}$$

$$P = (m_1 \cdot m_1 \cdot g + m_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)) \cdot e^{m_3 P} + m_1 \cdot m_1 \cdot g$$

36