Mechanika teoretyczna

Wykład nr 1

Wprowadzenie i podstawowe pojęcia.
Rachunek wektorowy.
Wypadkowa układu sił.
Warunki równowagi

Przedmiot

- Mechanika:
  - ogólna, techniczna, teoretyczna.
- Dział fizyki zajmujący się badaniem **ruchu** i **równowagi** ciał materialnych, ustalaniem ogólnych praw ruchu oraz ich stosowaniem do wyidealizowanych ciał rzeczywistych (punkt materialny oraz ciało doskonale sztywne – ramy, kraty).

Program zajęć (1)

- Podstawowe pojęcia.
- Podstawy rachunku wektorowego.
- Układy sił i stan równowagi.
- Reakcje więzów w układach płaskich.
- Siły wewnętrzne
  - w belkach;
  - w ramach.

Program zajęć (2)

- Siły wewnętrzne:
  - w kratownicach;
  - w łukach;
- Reakcje więzów i siły wewnętrzne w układach przestrzennych.
- Zjawisko tarcia i prawa tarcia.
- Elementy kinematyki.
- Podstawy dynamiki.

Literatura

- [1] J. Leyko: *Mechanika ogólna*
- [2] J. Leyko: *Mechanika ogólna w zadaniach*
- [3] J. Misiak: *Mechanika ogólna, T. 1-3 (Statyka, Kinematyka, Dynamika)*
- [4] J. Misiak: Zadania z *mechaniki ogólnej*
- [5] A. Chudzikiewicz: *Statyka budowli* (Tom 1)
- [6] Z. Cywiński: *Mechanika budowli w zadaniach. Układy statycznie wyznaczalne*

Zaliczenie

- Ćwiczenia:
  - obecności;
  - ćwiczenie projektowe;
  - kolokwia.
- Egzamin:
  - część pisemna;
  - część ustna.

Działy mechaniki

- **Statyka** – bada przypadki, kiedy siły działające na ciało nie wywołują sił bezwładności, tj. są przykładane w nieskończenie długim czasie oraz równoważą się wzajemnie.
- **Kinematyka** – zajmuje się badaniem ruchu ciał niezależnie od czynników wywołujących ten ruch. Przedmiotem badań są: droga, prędkość, przyspieszenie itd.
- **Dynamika** – rozpatruje ruch ciał w zależności od sił działających na nie, bada zależności między takimi wielkościami jak: prędkość, przyspieszenie, pęd, siła, energia itd.

Zasady dynamiki Newtona (1)

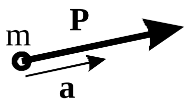
- **Prawo I**

  Punkt materialny, na który nie działa żadna siła lub działające siły równoważą się, pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

Zasady dynamiki Newtona (2)

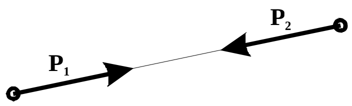
- **Prawo II**
  Przyspieszenie punktu materialnego jest wprost proporcjonalne do siły działającej na ten punkt, a odwrotnie proporcjonalne do masy punktu materialnego. Jego zwrot i kierunek zgodny jest ze zwrotem i kierunkiem wektora siły.

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{a}$$



Zasady dynamiki Newtona (3)

- **Prawo III**
  Dwa punkty materialne działają na siebie dwoma siłami równymi co do wartości, tym samym kierunku, ale o przeciwnym zwrocie.



$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2$$

$$P_1 = P_2$$

Idealizacje (1)

- **Punkt materialny** – ciało o nieskończenie małych wymiarach, ale posiadające masę.
- Modeluje ciała o bardzo małych wymiarach w porównaniu z wymiarami otoczenia.
- Wymiary na tyle małe, aby można było pominąć obrót ciała względem układu odniesienia.

Idealizacje (2)

- **Ciało doskonale sztywne** – odległości między jego punktami nie zmieniają się (nie podlega odkształceniom pod wpływem działających sił).
- Model ciała rzeczywistego, gdy odkształcenia są pomijalnie małe w stosunku do wymiarów.

Idealizacje (3)

- **Zasada zesztywnienia**
  Warunki równowagi sił działających na ciało odkształcalne nie zostaną naruszone przez zesztywnienie tego ciała.
  Punkt przyłożenia siły nie ulega przesunięciu mimo odkształcenia konstrukcji.

Zasada superpozycji

- Działania poszczególnych obciążeń są od siebie niezależne.
- Efekt działania (odkształcenie, siła wewnętrzna) dwóch lub więcej wpływów (obciążeń) może zostać wyznaczony jako suma efektów wywołanych działaniem tych wpływów oddzielnie.

Skalar i wektor

- **Skalar** – do opisania niezbędne jest podanie jednej wartości w odniesieniu do określonego punktu w przestrzeni.
- **Wektor** – do opisania poza miarą (modułem, długością wektora), niezbędne jest podanie:
  - kierunku (ułożenia linii działania),
  - zwrotu (uporządkowania punktów od początku do końca wektora),
  - punktu zaczepienia.

Interpretacja geometryczna, przykłady

- Wektor można przedstawić jako uporządkowaną parę punktów, z których jeden jest początkiem wektora, a drugi jego końcem.
- Skalary:
  - gęstość, masa, temperatura, energia;
- Wektory
  - przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie, siła.

Rodzaje wektorów

- Wektory **zaczepione** – związane z punktem przyłożenia;
- Wektory **ślizgające** się – mogące poruszać się wzdłuż linii działania (np. wektory sił w mechanice);
- Wektory **swobodne** – mogą zostać przyłożone w dowolnym punkcie (np. wektory momentów sił).

Podstawowe jednostki

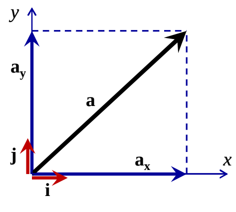
- **Masa**: g (gram); kg = 1000 g (kilogram)
- **Długość**: mm = 0,001 m (milimetr);
  m (metr); km = 1000 m (kilometr)
- **Czas**: s (sekunda); min = 60 s (minuta);
  h = 60 min = 3600 s (godzina)
- **Siła**: N = kg m/s2 (niuton);
  kN = 1000N (kiloniuton)
- **Moment siły**: Nm (Niutonometr);
  kNm = 1000Nn (kiloniutonometr)

Działania na wektorach

- Suma wektorów;
- Różnica wektorów;
- Mnożenie wektora przez skalar;
- Iloczyn wektorów:
  - skalarny;
  - wektorowy;
  - mieszany;
  - inne wielokrotne iloczyny wektorów.

Zapis analityczny i graficzny wektora

- płaszczyzna

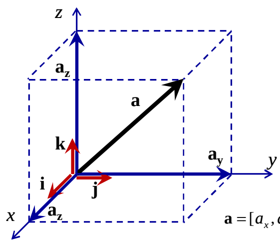


$\mathbf{a} = [a_x, a_y]$

$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

- przestrzeń



$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$

$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

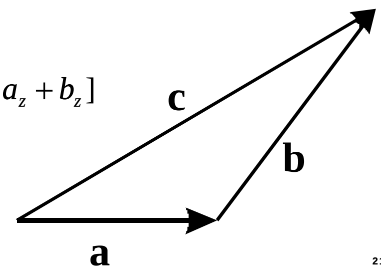
Dodawanie wektorów

- Suma wektorowa wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$:

$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ $\quad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$

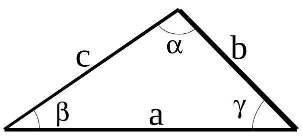
$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

$\mathbf{c} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$



Twierdzenie cosinusów

- Kwadrat długości boku trójkąta leżącego naprzeciw kąta g jest równy sumie kwadratów długości boków leżących przy tym kącie oraz podwojonego iloczynu tych długości boków i cosinusa tego kąta g.



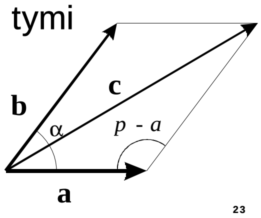
$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos g}$

Zasada równoległoboku

- Suma dwóch wektorów może zostać przedstawiona jako przekątna równoległoboku zbudowanego na bazie sumowanych wektorów przecinająca kąt między tymi wektorami.

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(p - a)} =$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos a}$



Odejmowanie wektorów (1)

- Różnica wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jest równa sumie wektora $\mathbf{a}$ i wektora przeciwnego do $\mathbf{b}$:

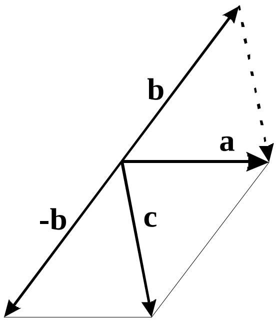
$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ $\quad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$

$-\mathbf{b} = [-b_x, -b_y, -b_z]$ $\quad \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = [a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z]$

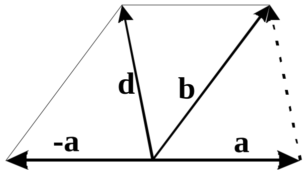
- Różnica wektorów $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a}$ jest równa sumie wektora $\mathbf{b}$ i wektora przeciwnego do $\mathbf{a}$:

$-a = [-a_x, -a_y, -a_z]$ $\quad \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = [b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z]$

Odejmowanie wektorów (2)



$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

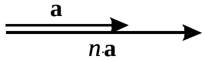


$$\mathbf{d} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

Skalowanie wektora

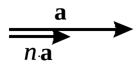
- Mnożenie wektora przez skalar (n) – wyniku otrzymuje się wektor o takim samym kierunku, mierze n razy większej (przy $|n|>1$)

$\boldsymbol{n>1}$



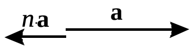
- lub $1/n$ razy mniejszej (przy $|n|<1$) i takim samym zwrocie, jeżeli $n>0$,

$\boldsymbol{0<n<1}$



- zaś przeciwnym, jeżeli $n<0$.

$\boldsymbol{-1<n<0}$



$\boldsymbol{n<-1}$

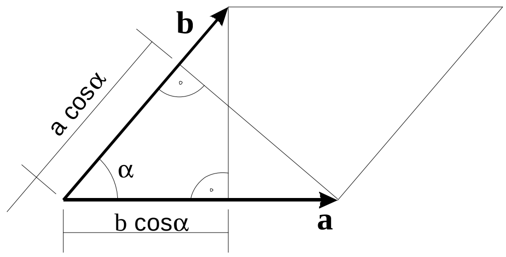
Iloczyn skalarny (1)

- **Iloczyn skalarny** – wielkość <u>skalarna</u> równa iloczynowi modułów mnożonych wektorów i cosinusa kąta zawartego między nimi (iloczyn miary jednego wektora przez rzut prostokątny drugiego na kierunek pierwszego).

Iloczyn skalarny (2)

$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z] \quad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$

$s = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos S(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$



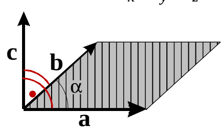
Iloczyn wektorowy (1)

- **Iloczyn wektorowy** (<u>wektor</u>):
  - kierunek prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez mnożone wektory,
  - zwrot określony zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej,
  - miara równa iloczynowi miar mnożonych wektorów i sinusa kąta między nimi (pole powierzchni równoległoboku zbudowanego na mnożonych wektorach).

Iloczyn wektorowy (2)

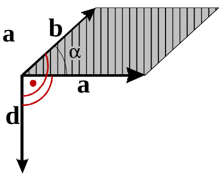
$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z] \quad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$

$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$



$\mathbf{d} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

$\mathbf{d} = -\mathbf{c}$



$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

$$c = d = a \cdot b \cdot \sin S(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}$$

Iloczyn mieszany

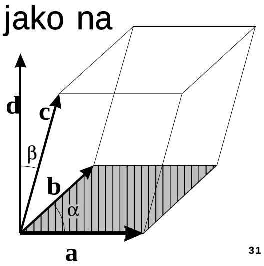
- **Iloczyn mieszany** – wielkość skalarna równa objętości równoległościanu zbudowanego na mnożonych wektorach jako na krawędziach.

$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}$

$V = \mathbf{d} \circ \mathbf{c} = d \cdot c \cos b$

$d = ab \sin a$

$V = ab \sin a \cdot c \cos b$



Przemienność działań

- Suma wektorów i iloczyn skalarny są działaniami przemiennymi, natomiast różnica wektorów i iloczyn wektorowy nie są przemienne.

a – b = c **b – a = d** => **d = -c**

a × b = c **b × a = d** => **d = -c**

Pojęcie siły

- **Siła** – wzajemne oddziaływanie ciał, które przejawia się w wyprowadzeniu ciała ze stanu spoczynku, bądź przez zmianę ruchu już poruszającego się ciała. Aby scharakteryzować siłę należy podać wektor, opisujący tą siłę, oraz punkt przyłożenia siły.

Układy sił

- **Układ sił** – dowolna grupa oddziaływań ciał zewnętrznych na analizowane ciało.
- **Równoważne układy sił**
  Dwa układy sił są równoważne wtedy, gdy zastąpienie jednego układu, działającego na ciało sztywne, przez drugi układ sił **nie wywoła zmiany ruchu**, czyli nie spowoduje zmiany kierunku ruchu, prędkości, przyśpieszenia, itd.

Wypadkowa

- **Siła wypadkowa** – wektor, który jest sumą wszystkich wektorów sił z układu, przyłożonego do punktu materialnego i stanowi układ równoważny, pod warunkiem, że siła wypadkowa jest przyłożona do tego samego punktu materialnego.

Płaski i przestrzenny układ sił

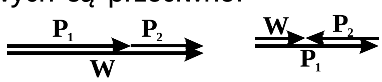
- Układ sił nazywamy **płaskim**, jeżeli kierunki wszystkich sił tego układu położone są w jednej płaszczyźnie.
- W każdym innym przypadku układ nazywamy **przestrzennym**.

Układ sił zbieżnych

- **Układ sił zbieżnych** – linie działania wszystkich sił przecinają się w jednym punkcie, tzw. punkcie zbieżności.
- Określanie wypadkowej układu sił:
  - działających wzdłuż jednej prostej;
  - zbieżnych
    - metoda graficzna;
    - metoda analityczna.

Siły działające wzdłuż jednej prostej

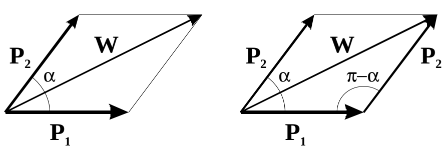
- Wypadkowa układu sił działających wzdłuż jednej prostej jest wektorem o także działającym wzdłuż tej prostej, zwrocie zgodnym z większą ze składanych sił i mierze równej sumie, gdy miary wektorów składowych są zgodne, lub różnicy miar wektorów składowych, gdy zwroty składowych są przeciwne.



$W = P_1 + P_2$ $\qquad$ $W = P_1 - P_2$

Wypadkowa - metoda graficzna

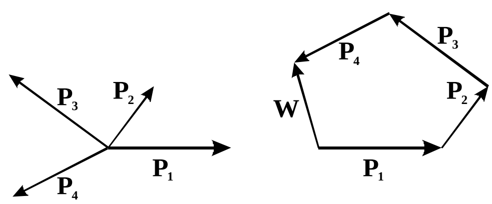
- Wypadkowa układu dwóch sił może zostać wyznaczona jako przekątna równoległoboku zbudowanego w oparciu o wektory składowe przecinająca kąt między tymi wektorami.



$$W = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos(p-a)} =$$
$$= \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos a}$$

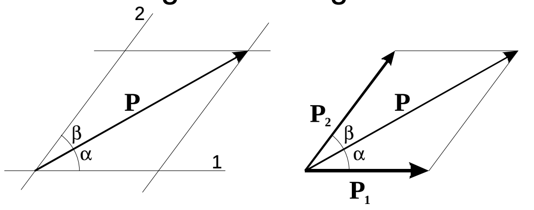
Wielobok sznurowy

- Do końca pierwszej siły przykładany jest początek siły następnej, itd. Początek pierwszej siły połączony z końcem ostatniej określa wypadkową.



Rozkładanie siły na składowe

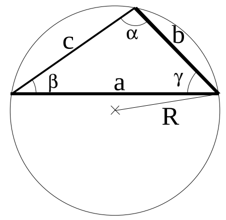
- Przez początek i koniec danej siły przeprowadza się kierunki, na które siła ma zostać rozłożona. Siły składowe mogą zostać wyznaczone jako boki tak zbudowanego równoległoboku.



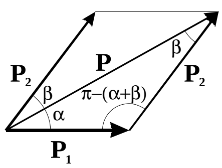
Twierdzenie sinusów

- W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa przeciwległego kąta jest stały i równa się długości średnicy okręgu opisanego na trójkącie.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$



Miary wektorów składowych

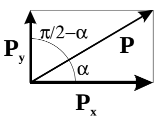


$$\frac{P_1}{\sin\beta}=\frac{P_2}{\sin\alpha}=\frac{P}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))}$$

$$P_1=\frac{P\sin\beta}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))}=\frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$P_2=\frac{P\sin\alpha}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))}=\frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$



$$P_x=\frac{P\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{2}}=P\cos\alpha$$

$$P_y=\frac{P\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}}=P\sin\alpha$$

Wypadkowa - metoda analityczna

- Składowe sił układu:

$$P_{ix}=P_i\cos\alpha_i \qquad P_{iy}=P_i\sin\alpha_i$$

- Składowe wypadkowej:

$$W_x=P_{1x}+P_{2x}+\ldots+P_{nx} \qquad W_y=P_{1y}+P_{2y}+\ldots+P_{ny}$$

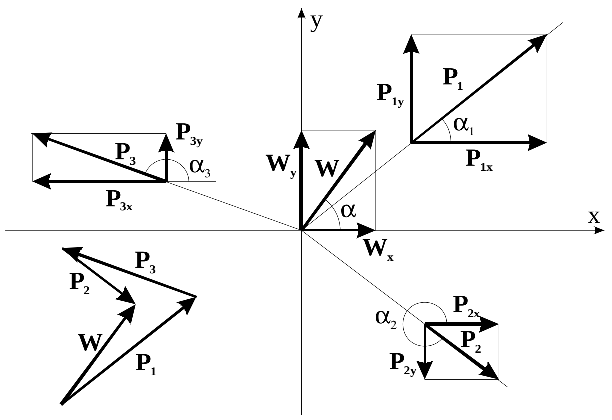
- Siła wypadkowa:

$$W=\sqrt{W_x^{\,2}+W_y^{\,2}}$$

- Kierunek wypadkowej:

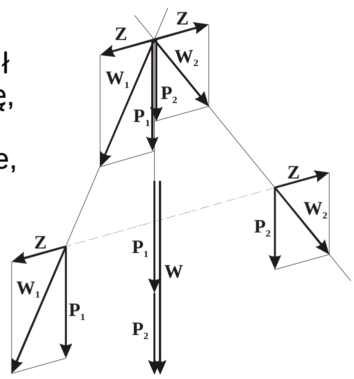
$$\cos\alpha=\frac{W_x}{W} \qquad \sin\alpha=\frac{W_y}{W}$$

Przykład



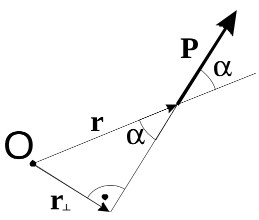
Wypadkowa układu sił równoległych

- Przyłożenie układu zerowego (układ sił równoważących się, np. dwie siły o takiej samej mierze, linii działania i przeciwnych zwrotach) nie wpływa na stan równowagi ciała.



Moment siły (1)

- **Moment siły względem punktu** – iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego omawiany punkt i punkt przyłożenia siły, oraz wektora siły:



$$\mathbf{M}_O^P=\mathbf{r}\times\mathbf{P}$$

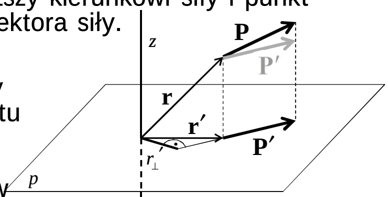
$$M_O^P=r\cdot P\sin\alpha$$

$$r_\perp=r\cdot\sin\alpha$$

$$M_O^P=r_\perp\cdot P$$

Moment siły (2)

- **Moment siły względem prostej** - Momentem względem prostej nazywamy iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego punkt prostej najbliższy kierunkowi siły i punkt przyłożenia siły, i wektora siły.
- Moment siły względem osi równy jest momentowi rzutu siły na płaszczyznę prostopadłą do osi względem punktu, w którym oś przebija płaszczyznę.

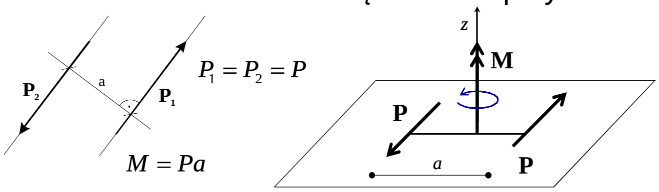


$$\mathbf{M}_z=\mathbf{r}\times\mathbf{P}=\mathbf{r}'\times\mathbf{P}'$$

$$M_z=P'\cdot r'_\perp$$

Para sił

- **Parę sił** stanowią dwie siły o równoległych liniach działania, o przeciwnych zwrotach, zaś o tych samych miarach.
- **Ramię pary sił** – odległość pomiędzy kierunkami sił nosi nazwę ramienia pary sił.



Dowolny płaski układ sił (1)

- Redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w biegunie redukcji i wypadkowego momentu względem tego bieguna.
- Siły składowe mogą zostać przeniesione do bieguna redukcji, pod warunkiem przyłożenie momentu od tych sił względem bieguna redukcji.

Dowolny płaski układ sił (2)

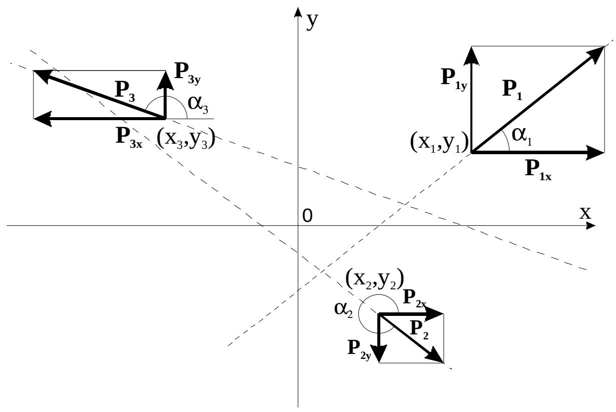
- Wypadkową siłę wyznacza się dla układu zbieżnego przyłożonego w biegunie redukcji.

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i$$

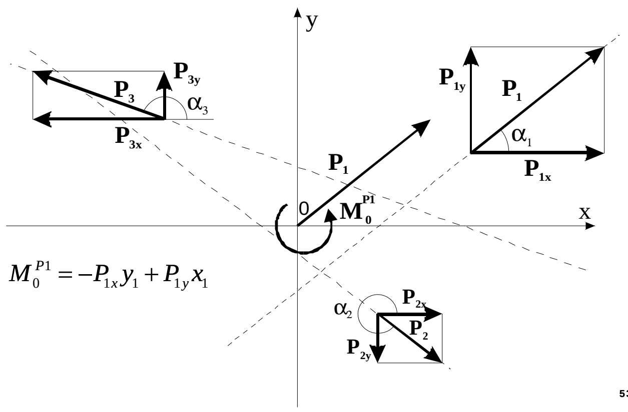
- Wypadkowy moment jest równy sumie momentów od sił składowych.

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{io}$$

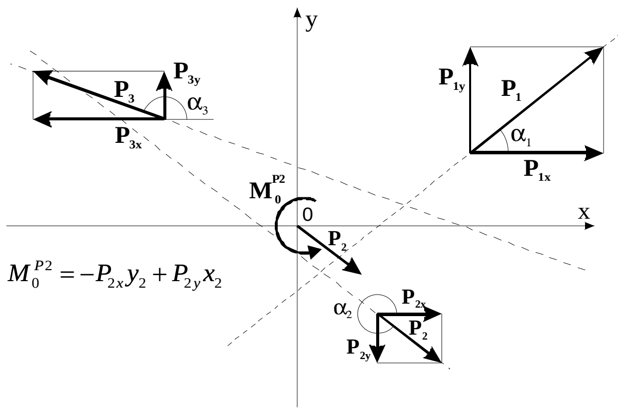
Przykład (1)



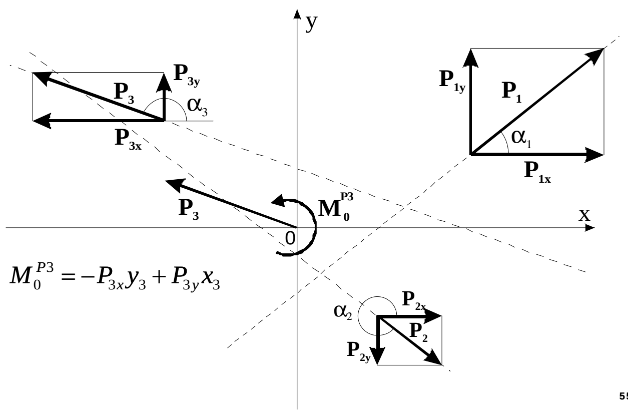
Przykład (2)



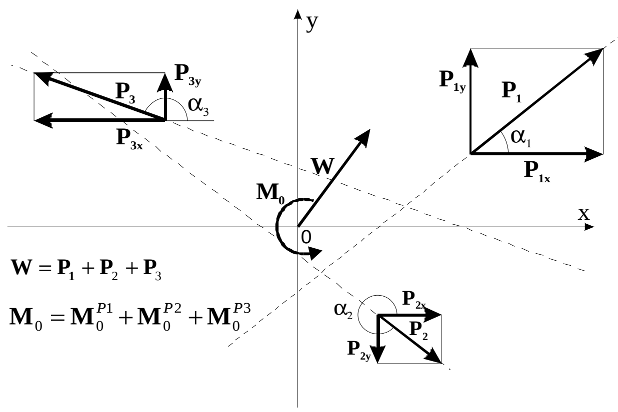
Przykład (3)



Przykład (4)



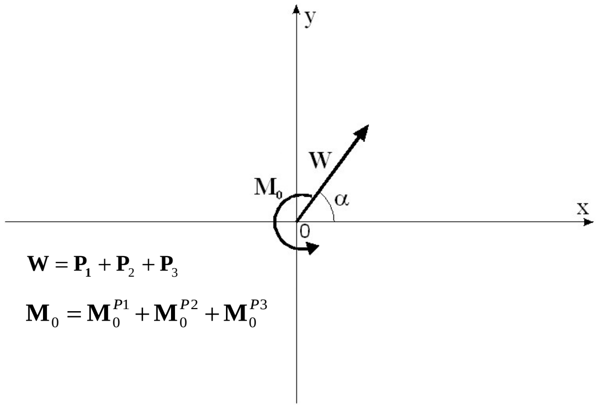
Przykład (5)



Dowolny płaski układ sił (3)

- Wypadkowy moment może zostać przedstawiony jako:
  - wektor momentu;
  - para sił;
  - moment od siły wypadkowej przyłożonej nie w biegunie redukcji, a na linii działania wyznaczonej w taki sposób, że moment od siły wypadkowej równy jest momentowi od sił składowych.

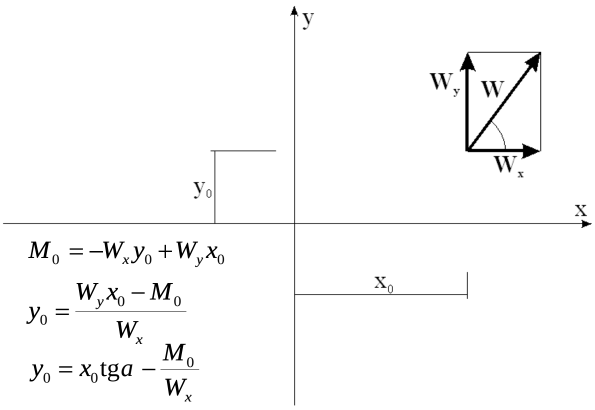
Siła wypadkowa i wypadkowy moment



$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0^{P1} + \mathbf{M}_0^{P2} + \mathbf{M}_0^{P3}$$

Moment od wypadkowej



$$M_0 = -W_x y_0 + W_y x_0$$

$$y_0 = \frac{W_y x_0 - M_0}{W_x}$$

$$y_0 = x_0 \mathrm{tg}a - \frac{M_0}{W_x}$$

Uogólnienie w przestrzeni

- Układ sił **zbieżnych** – redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w punkcie zbieżności.
- **Dowolny** przestrzenny układ sił – redukcja do wypadkowej siły i wypadkowego momentu.

Klasyfikacja układów sił

Układ sił - układ wypadkowy	**Płaszczyzna**	**Przestrzeń**
Zbieżny	Siła wypadkowa w płaszczyźnie	Siła wypadkowa – dowolny kierunek w przestrzeni
Dowolny	Siła wypadkowa w płaszczyźnie i wektor momentu prostopadły do płaszczyzny	Siła wypadkowa (dowolny kierunek w przestrzeni) i wypadkowy wektor momentu (dowolny kierunek w przestrzeni)

Stan równowagi

- **Równowaga statyczna**

  Punkt materialny (ciało sztywne) jest w równowadze, jeżeli pod wpływem układu sił, nie porusza się on lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki układ sił nazywa się zrównoważonym lub równoważnym zeru.

Oswobodzenie z więzów

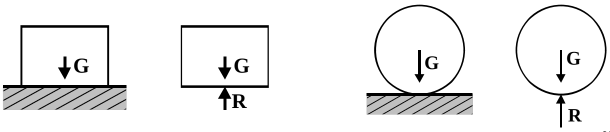
- Ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić z więzów, zastępując ich działanie reakcjami.
- Ciało oswobodzone z więzów można traktować jako swobodne pod działaniem sił czynnych (obciążeń) i biernych (reakcji).

Rodzaje sił w mechanice

- W mechanice wyróżnia się następujące rodzaje sił:
  - **siły zewnętrzne** - obciążenie pochodzące od innych ciał;
  - **reakcje** - siły zewnętrzne wynikające ze sposobu zamocowania konstrukcji;
  - **siły wewnętrzne** - wzajemne oddziaływanie pomiędzy częściami ciała.

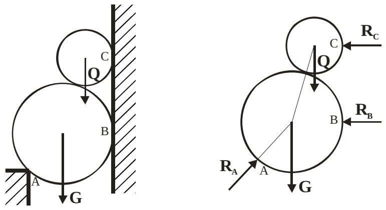
Więzy – nacisk (1)

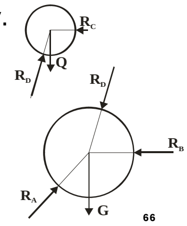
- Powierzchnia płaska na płaszczyźnie:
  - – reakcja prostopadła do płaszczyzny styku;
- Przekrój kołowy na płaszczyźnie:
  - – reakcja prostopadła do płaszczyzny styku (stycznej w punkcie styczności);



Więzy – nacisk (2)

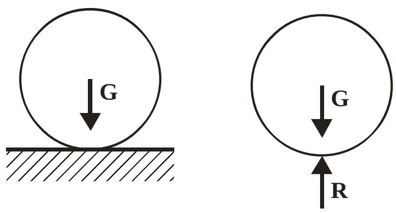
- Przekrój kołowy oparty o przekrój kołowy:
  - – reakcja prostopadła do stycznej obu ciał w punkcie styku (wzdłuż prostej łączącej środki okręgów);
- Punkt na płaszczyźnie:
  - – reakcja prostopadła do płaszczyzny.





Równowaga dwóch sił

- Układ dwóch sił pozostaje w równowadze, jeżeli siły te działają wzdłuż jednej prostej, mają przeciwne zwroty i takie same miary.

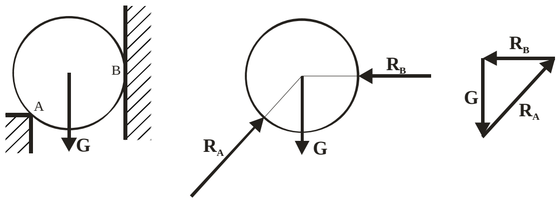


$$\mathbf{R} = -\mathbf{G}$$

$$R = G$$

Równowaga trzech sił

- Układ trzech sił jest zrównoważony, jeżeli siły te tworzą płaski układ sił, ich linie działania przecinają się w jednym punkcie (układ zbieżny), zaś wielobok sił jest zamknięty.



Równania równowagi punktu materialnego

- II zasada dynamiki Newtona:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a}$$

- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = 0$$

Równania równowagi ciała sztywnego (siły zbieżne)

- II zasada dynamiki Newtona:

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \ldots\ldots \mathbf{P}_n = m\mathbf{a}$$

- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i = 0$$

Układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **przecinają się w jednym punkcie**. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zeru lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \ldots\ldots \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i = 0$$

Płaski układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **leżą w jednej płaszczyźnie** i przecinają się w jednym punkcie. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zeru lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \ldots\ldots \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i = 0$$

Równania równowagi układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zeru.

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0.$$

Równania równowagi płaskiego układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne, leżące w jednej płaszczyźnie, były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zeru.

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0.$$

Warunki równowagi układu zbieżnego (podsumowanie)

Wypadkowa układu sił musi być równa 0, tj. zamyka się wielobok sznurowy sił (graficznie), a sumy rzutów sił układu na osie układu współrzędnych muszą być równe zeru (analitycznie).

- **Przestrzenny układ sił**

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$$

- **Płaski układ sił**

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;$$

Równania równowagi ciała sztywnego (dowolny układ sił)

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$$

- Jeżeli ciało sztywne jest w stanie równowagi statycznej, to dodatkowo:

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_o = 0$$

Warunki równowagi dowolnego układu sił (1)

- **Płaski układ sił**

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iO} = 0$$

lub

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0 \qquad AB \not\angle x$$

lub

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0 \qquad A, B, C \notin l$$

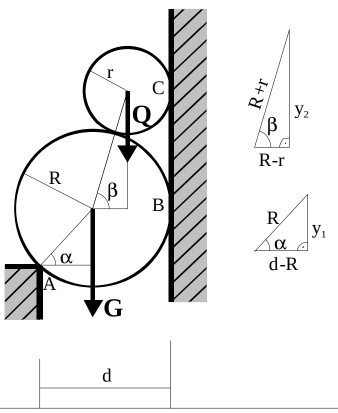
Warunki równowagi dowolnego układu sił (2)

- **Przestrzenny układ sił**

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0$$

Przykład (dwa układy zbieżne) (1)



$$y_2 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}$$

$$\sin b = \frac{y_2}{R+r}$$

$$\cos b = \frac{R-r}{R+r}$$

$$y_1 = \sqrt{R^2 - (d-R)^2}$$

$$\sin a = \frac{y_1}{R}$$

$$\cos a = \frac{d-r}{R}$$

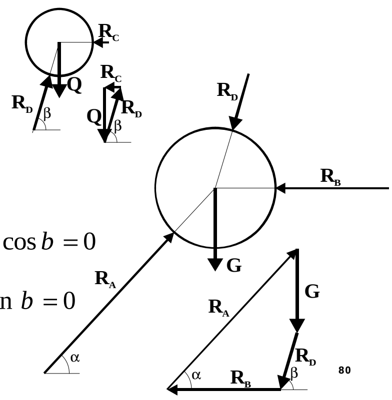
Przykład (dwa układy zbieżne) (2)

$$\sum X = R_D \cos b - R_C = 0$$

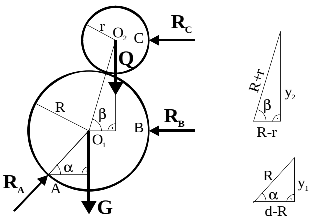
$$\sum Y = R_D \sin b - Q = 0$$

$$\sum X = R_A \cos a - R_B - R_D \cos b = 0$$

$$\sum Y = R_A \sin a - G - R_D \sin b = 0$$



Przykład (układ niezbieżny)



$$\sum X = R_A \cos a - R_B - R_C = 0$$

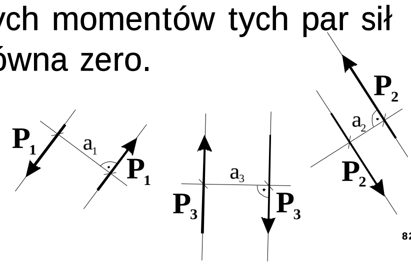
$$\sum Y = R_A \sin a - Q - G = 0$$

$$\sum M_{o1} = R_C \cdot y_2 - Q \cdot (R - r) = 0$$

Równowaga par sił

- Aby układ par sił, działających w jednej płaszczyźnie na ciało sztywne, znajdował się w równowadze, suma wypadkowych momentów tych par sił musi być równa zero.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i = 0$$



Podstawowe typy ustrojów prętowych

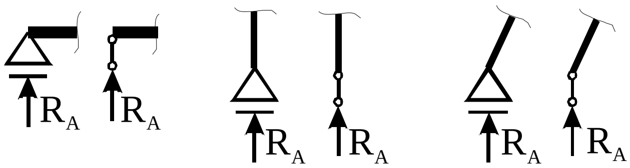
- **Pręt** – element o wymiarach poprzecznych (np. grubość i szerokość) znacznie mniejszych od trzeciego wymiaru (długość)
- **Belka** – ustrój prętowy z prętami rozmieszczonymi w jednej linii. Siły często są prostopadłe do osi belki.
- **Rama** – ustrój prętowy
- **Krata** – ustrój prętowy, który składa się z prętów połączonych przegubami. Siły mogą być przykładane tylko w węzłach.

Stopnie swobody

- Liczba niezależnych ruchów, jakie ciało jest w stanie zrealizować w przestrzeni.
- Punkt materialny:
  - w przestrzeni – 3 (3 składowe przesuwu);
  - na płaszczyźnie – 2 (2 składowe przesuwu);
- Ciało sztywne
  - w przestrzeni – 6 (3 składowe przesuwu i 3 składowe obrotu);
  - na płaszczyźnie – 3 (2 składowe przesuwu i obrót).

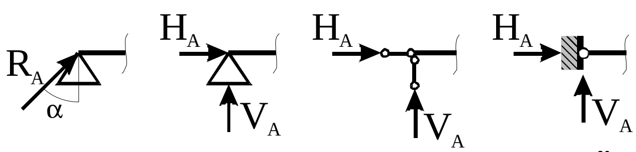
Podpory, pręty podporowe (1)

- Podpora przegubowa przesuwna – zablokowana jedna składowa przesuwu, jeden pręt podporowy, jedna reakcja.



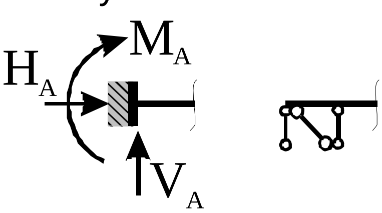
Podpory, pręty podporowe (2)

- Podpora przegubowa nieprzesuwna – zablokowane obie składowe przesuwu, dwa pręty podporowe, dwie niewiadome: reakcja i kierunek lub dwie składowe reakcji.



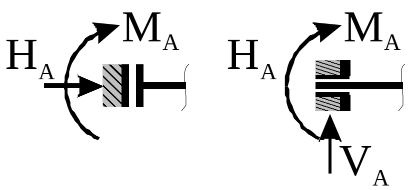
Podpory, pręty podporowe (3)

- Sztywne zamocowanie – zablokowane wszystkie przemieszczenia (dwie składowe przesuwu i obrót), trzy pręty podporowe, trzy niewiadome – dwie składowe siły i moment.



Inne sposoby podparcia

- Sztywne zamocowanie z możliwością przesuwu:
  - poprzecznie do osi pręta;
  - wzdłuż pręta.



Rodzaje obciążeń – układy płaskie

- Siły skupione;
- Momenty skupione;
- Obciążenia liniowo rozłożone;
- Obciążenia momentem liniowo rozłożone.

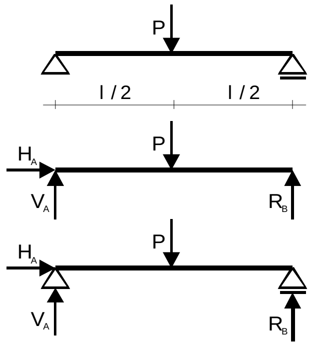
Rodzaje obciążeń – układy przestrzenne

- Siły skupione;
- Momenty skupione;
- Obciążenia liniowo rozłożone;
- Obciążenia momentem liniowo rozłożone;
- Obciążenia rozłożone na powierzchni;
- Obciążenia rozłożone w objętości.

Jednostki obciążeń

- Obciążenie ciągłe – kN/m
- Siła skupiona - kN
- Moment skupiony - kNm
- Obciążenie ciągłe momentem – kNm/m

Reakcje – belka swobodnie podparta

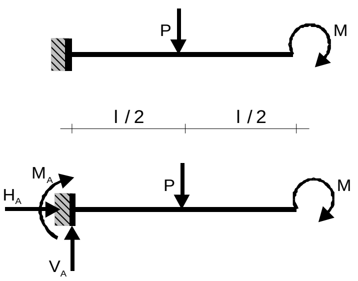


$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - P = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Reakcje – belka wspornikowa

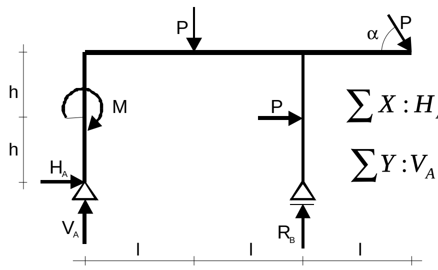


$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A - P = 0$$

$$\sum M_A : M_A + P \cdot \frac{l}{2} + M = 0$$

Reakcje – rama bezprzegubowa



$$\sum X : H_A + P + P\cos a = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - P - P\sin a = 0$$

$$\sum M_A : M + P \cdot l + P \cdot h + P\cos a \cdot 2h + P\sin a \cdot 3l - R_B \cdot 2l = 0$$