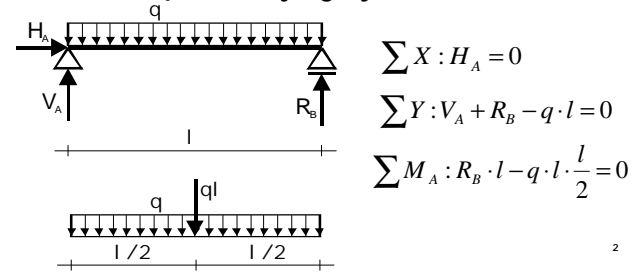


Mechanika teoretyczna

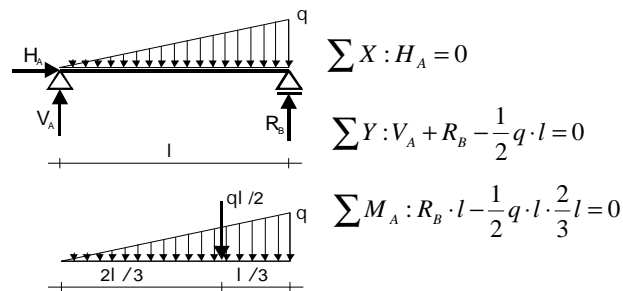
Wykład nr 2
 Wyznaczanie reakcji.
 Belki przegubowe.
 Ramy.
 Siły wewnętrzne.

Obciążenie ciągłe równomierne

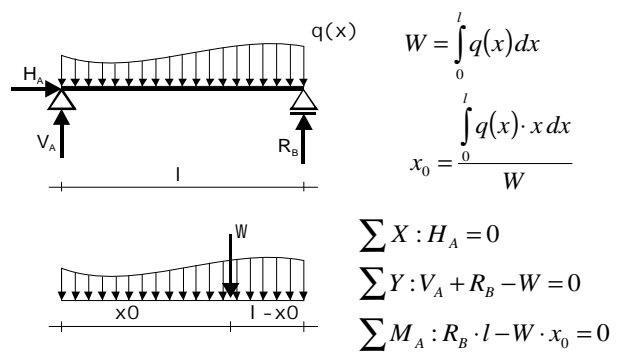
• Miara wypadkowej obciążenia rozłożonego liniowo równa jest polu figury opisującej obciążenie i powinna zostać przyłożona w środku ciężkości tej figury.



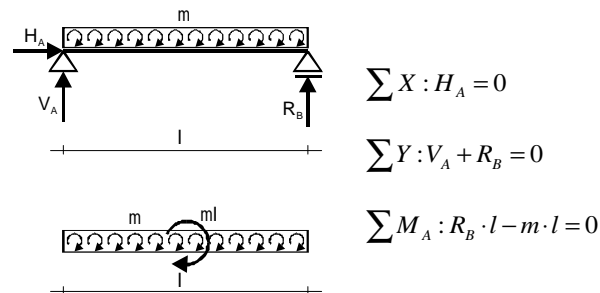
Obciążenie ciągłe trójkątne



Obciążenie ciągłe dowolne



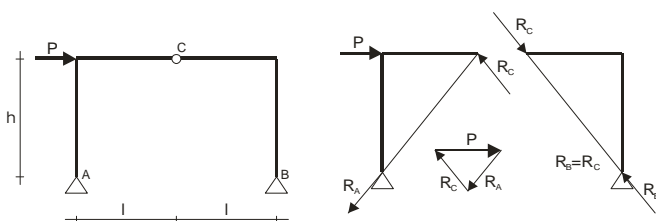
Obciążenie ciągłe momentem



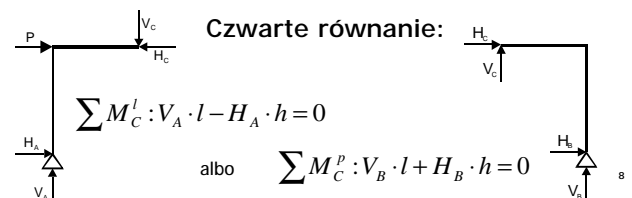
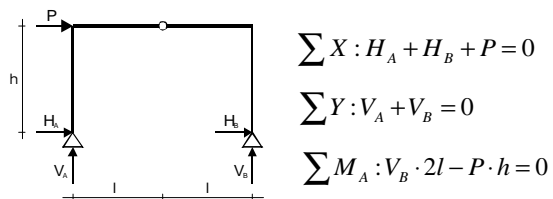
Przegub

- Połączenie elementów prętowych w taki sposób, że mogą się one swobodnie obracać (nie powstaje moment mogący przeciwdziałać obrotowi).
- Uzyskuje się dodatkowy punkt, w którym moment wewnętrzny jest równy zero.
- Moment w przegubie od sił zewnętrznych znajdujących się po jednej ze stron przegubu równy jest 0.

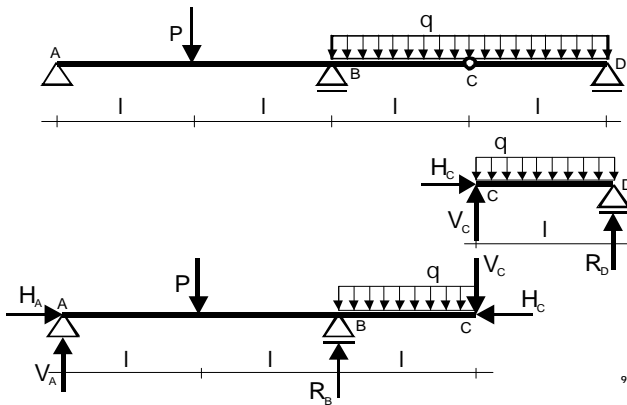
Podział ramy w przegubie



Dodatkowe równanie dla przegubu

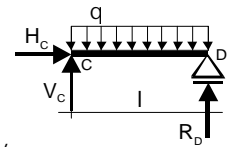


Belki przegubowe – rozkład na belki proste



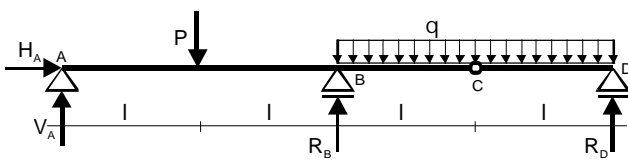
Belki proste – równania równowagi

$$\begin{aligned} \sum X: H_C &= 0 \\ \sum Y: V_C + R_D - q \cdot l &= 0 \\ \sum M_C: R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum X: H_A - H_C &= 0 \\ \sum Y: V_A + R_B - V_C - P - q \cdot l &= 0 \\ \sum M_A: R_B \cdot 2l - P \cdot l - q \cdot l \cdot 2,5l - V_C \cdot 3l &= 0 \end{aligned}$$

Reakcje – belki przegubowe (1)



$$\begin{aligned} \sum X: H_A &= 0 \\ \sum Y: V_A + R_B + R_D - P - q \cdot 2l &= 0 \\ \sum M_A: R_B \cdot 2l + R_D \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l &= 0 \\ \sum M_C^P: R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie

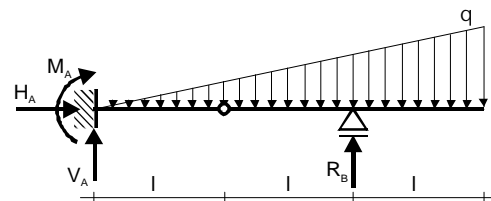
$$\begin{aligned} \sum X: H_A &= 0 \\ \sum M_C^P: R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} &= 0 \Rightarrow R_D = q \cdot \frac{l}{2} \\ \sum M_A: R_B \cdot 2l + R_D \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_B &= \frac{-R_D \cdot 4l + P \cdot l + q \cdot 2l \cdot 3l}{2l} = -2R_D + \frac{P}{2} + q \cdot 3l = \frac{P}{2} + q \cdot 2l \\ \sum Y: V_A + R_B + R_D - P - q \cdot 2l &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow V_A &= P + q \cdot 2l - R_B - R_D = P + q \cdot 2l - \frac{P}{2} - q \cdot 2l - q \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \end{aligned}$$

Podstawienie danych

$$\begin{aligned} q &= 5 \text{ kN/m} \\ P &= 10 \text{ kN} \\ l &= 2 \text{ m} \end{aligned}$$

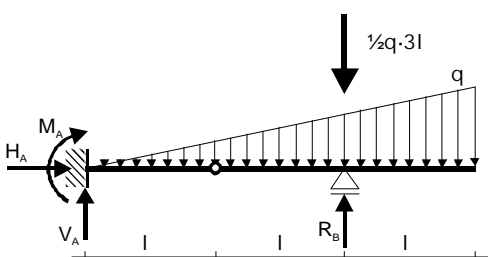
$$\begin{aligned} H_A &= 0 \\ R_D &= q \cdot \frac{l}{2} = 5 \text{ kN/m} \cdot \frac{2 \text{ m}}{2} = 5 \text{ kN} \\ R_B &= \frac{P}{2} + q \cdot 2l = \frac{10 \text{ kN}}{2} + 5 \text{ kN/m} \cdot 2 \cdot 2 \text{ m} = 25 \text{ kN} \\ V_A &= \frac{10 \text{ kN}}{2} - 5 \text{ kN/m} \cdot \frac{2 \text{ m}}{2} = 0 \end{aligned}$$

Reakcje – belki przegubowe (2)



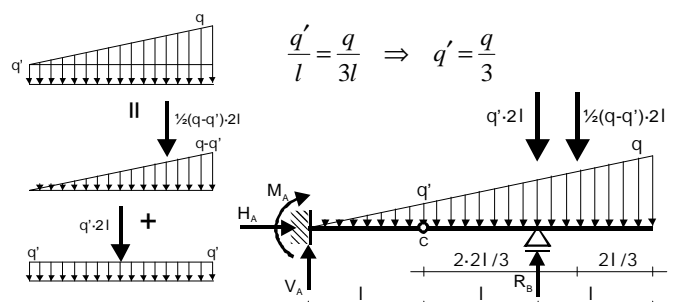
$$\sum X: H_A = 0$$

Wypadkowa obciążenia trójkątnego



$$\begin{aligned} \sum Y: V_A + R_B - \frac{1}{2} q \cdot 3l &= 0 \\ \sum M_A: R_B \cdot 2l - M_A - \frac{1}{2} q \cdot 3l \cdot 2l &= 0 \end{aligned}$$

Suma momentów względem przegubu



$$\sum M_C^P: R_B \cdot l - q' \cdot 2l \cdot l - \frac{1}{2} (q - q') \cdot 2l \cdot 2 \frac{2l}{3} = 0$$

Rozwiązanie

$$\sum X: H_A = 0$$

$$\sum M_C^P: R_B \cdot l - \frac{q}{3} \cdot 2l^2 - \frac{1}{2} \frac{2q}{3} \cdot \frac{8l^2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{2}{3} \cdot ql + \frac{8}{9} \cdot ql = \frac{14}{9} \cdot ql$$

$$\sum Y: V_A + R_B - \frac{1}{2} q \cdot 3l = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{3}{2} \cdot ql - \frac{14}{9} \cdot ql = -\frac{1}{18} \cdot ql$$

$$\sum M_A: R_B \cdot 2l - M_A - \frac{1}{2} q \cdot 3l \cdot 2l = 0$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{14}{9} \cdot 2ql^2 - 3ql^2 = \frac{1}{9} \cdot ql^2 \quad 17$$

Podstawienie danych

$$q = 10 \text{ kN/m}$$

$$l = 1,5 \text{ m}$$

$$H_A = 0$$

$$V_A = -\frac{1}{18} \cdot ql = -\frac{1}{18} \cdot 10 \text{ kN/m} \cdot 1,5 \text{ m} = -0,833 \text{ kN}$$

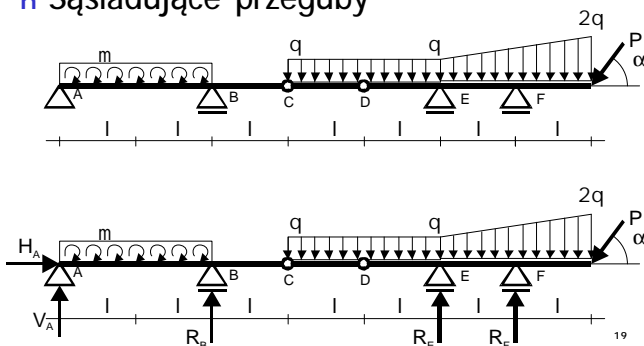
$$R_B = \frac{14}{9} \cdot ql = \frac{14}{9} \cdot 10 \text{ kN/m} \cdot 1,5 \text{ m} = 23,333 \text{ kN}$$

$$M_A = \frac{1}{9} \cdot ql^2 = \frac{1}{9} \cdot 10 \text{ kN/m} \cdot (1,5 \text{ m})^2 = 2,5 \text{ kNm}$$

18

Belki przegubowe (3)

n Sąsiadujące przeguby



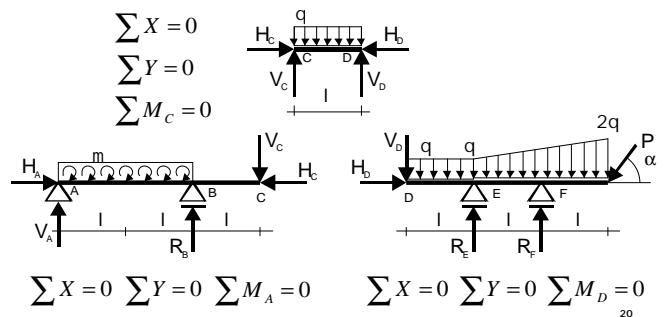
Belki proste – równania równowagi

n 9 niewiadomych – 9 równań

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

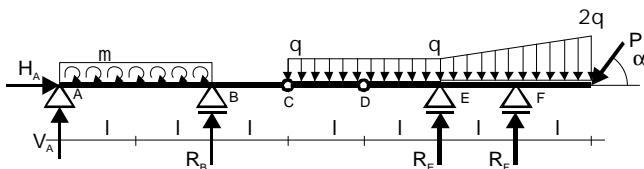
$$\sum M_C = 0$$



$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M_D = 0$$

Reakcje – belki przegubowe (3)



$$\sum X: H_A - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y: V_A + R_B + R_E + R_F - q \cdot 4l - \frac{1}{2} q \cdot 2l - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A: R_B \cdot 2l + R_E \cdot 5l + R_F \cdot 6l - m \cdot 2l - q \cdot 4l \cdot 5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(5l + \frac{2}{3} \cdot 2l\right) - P \sin \alpha \cdot 7l = 0$$

$$\sum M_C^l: V_A \cdot 3l + R_B \cdot l + m \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_D^P: R_E \cdot l + R_F \cdot 2l - q \cdot 3l \cdot 1,5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(l + \frac{2}{3} \cdot 2l\right) - P \sin \alpha \cdot 3l = 0$$

21

Sąsiadujące przeguby – łatwość rozwiązania

n Równania względem sąsiadujących przegubów lepiej zapisać z tej samej strony.

$$\sum X: H_A - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y: V_A + R_B + R_E + R_F - q \cdot 4l - \frac{1}{2} q \cdot 2l - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A: R_B \cdot 2l + R_E \cdot 5l + R_F \cdot 6l - m \cdot 2l - q \cdot 4l \cdot 5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(5l + \frac{2}{3} \cdot 2l\right) - P \sin \alpha \cdot 7l = 0$$

$$\sum M_C^l: V_A \cdot 3l + R_B \cdot l + m \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_D^P: R_E \cdot l + R_F \cdot 2l - q \cdot 3l \cdot 1,5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(l + \frac{2}{3} \cdot 2l\right) - P \sin \alpha \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_D^l: V_A \cdot 4l + R_B \cdot 2l + m \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l = 0$$

22

Rozwiązanie

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$q = 5 \text{ kN/m}$$

$$m = 5 \text{ kNm/m}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$H_A = 5 \text{ kN}$$

$$V_A = -6,25 \text{ kN}$$

$$R_B = 8,75 \text{ kN}$$

$$R_E = 2,173 \text{ kN}$$

$$R_F = 28,987 \text{ kN}$$

23

Zasady pisania dodatkowych równań dla przegubów (1)

n Dodatkowe równanie względem przegubu musi wykorzystywać własność przegubu, tj. że moment w przegubie równy jest 0, a więc dodatkowe równanie nie może być zwykłą sumą momentów względem przegubu, a musi być sumą momentów od sił z jednej strony przegubu.

24

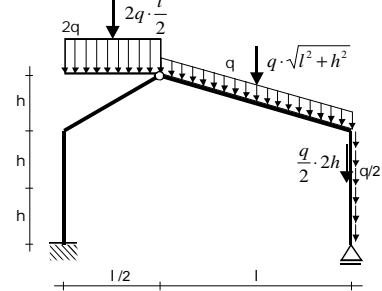
Zasady pisania dodatkowych równań dla przegubów ⁽²⁾

- Każdy przegub musi zostać wykorzystany co najmniej jeden raz.
- Jeżeli chcemy zapisać równanie dla przegubu z drugiej strony, to zastępuje ono jedno z równań podstawowych (sumę momentów względem dowolnego punktu).

25

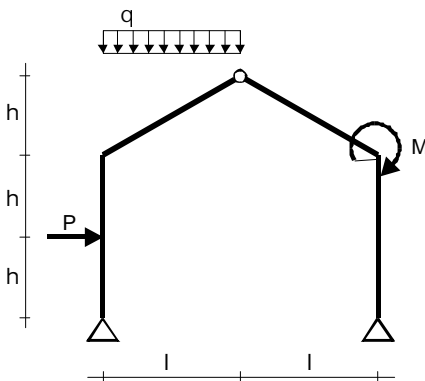
Inne rodzaje obciążeń

- Obciążenie osiowe rozłożone wzdłuż pręta.
- Obciążenie pionowe na pręcie ukośnym:
 - intensywność na jednostkę rzutu;
 - intensywność na jednostkę długości pręta.



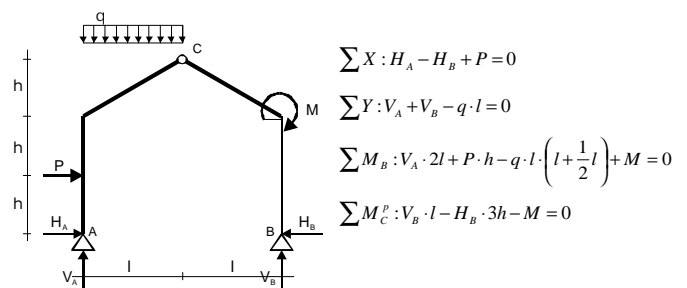
26

Reakcje – rama trójprzegubowa ⁽¹⁾



27

Reakcje – rama trójprzegubowa ⁽²⁾



$$\sum X: H_A - H_B + P = 0$$

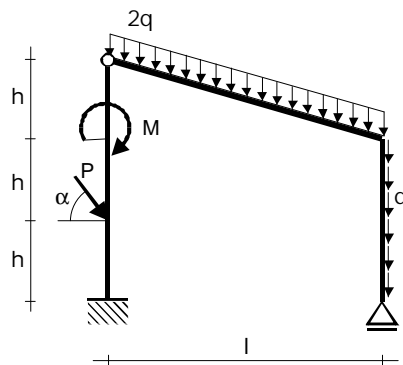
$$\sum Y: V_A + V_B - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_B: V_A \cdot 2l + P \cdot h - q \cdot l \cdot \left(l + \frac{1}{2}l\right) + M = 0$$

$$\sum M_C^L: V_B \cdot l - H_B \cdot 3h - M = 0$$

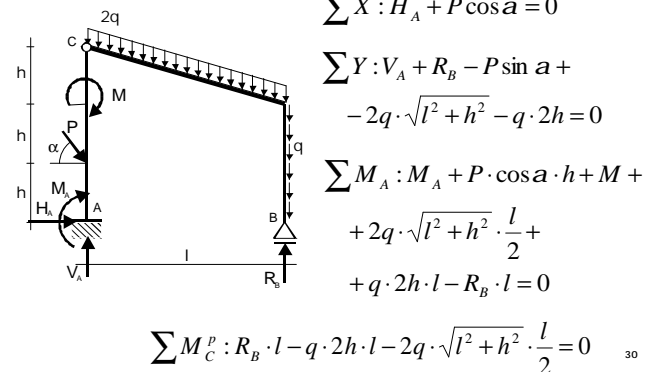
28

Reakcje – rama przegubowa ⁽¹⁾



29

Reakcje – rama przegubowa ⁽²⁾



$$\sum X: H_A + P \cos \alpha = 0$$

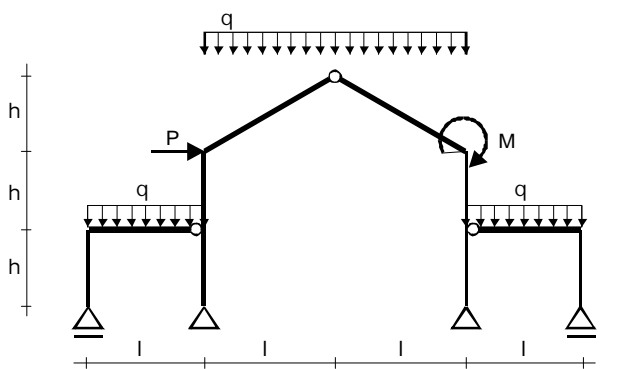
$$\sum Y: V_A + R_B - P \sin \alpha - 2q \cdot \sqrt{l^2 + h^2} - q \cdot 2h = 0$$

$$\sum M_A: M_A + P \cdot \cos \alpha \cdot h + M + 2q \cdot \sqrt{l^2 + h^2} \cdot \frac{l}{2} + q \cdot 2h \cdot l - R_B \cdot l = 0$$

$$\sum M_C^P: R_B \cdot l - q \cdot 2h \cdot l - 2q \cdot \sqrt{l^2 + h^2} \cdot \frac{l}{2} = 0$$

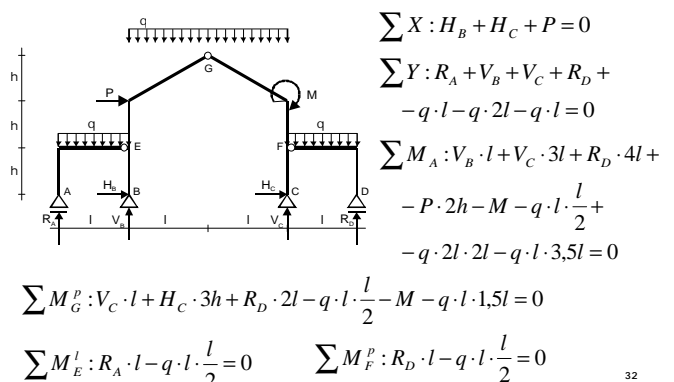
30

Rama nawowa



31

Rama nawowa – równania równowagi



$$\sum X: H_B + H_C + P = 0$$

$$\sum Y: R_A + V_B + V_C + R_D - q \cdot l - q \cdot 2l - q \cdot l = 0$$

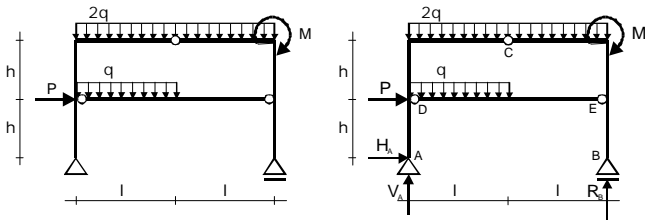
$$\sum M_A: V_B \cdot l + V_C \cdot 3l + R_D \cdot 4l - P \cdot 2h - M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - q \cdot 2l \cdot 2l - q \cdot l \cdot 3,5l = 0$$

$$\sum M_G^P: V_C \cdot l + H_C \cdot 3h + R_D \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - M - q \cdot l \cdot 1,5l = 0$$

$$\sum M_E^L: R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad \sum M_F^P: R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

32

Rama ze ściągiem – reakcje podporowe (3 niewiadome)



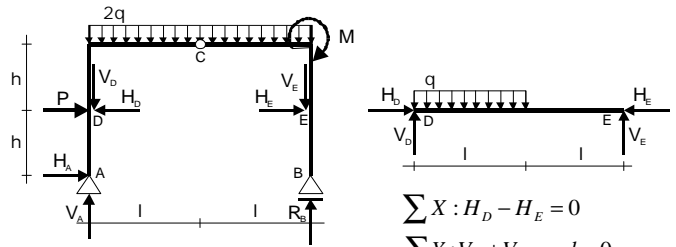
$$\sum X: H_A + P = 0$$

$$\sum Y: V_A + R_B - q \cdot l - 2q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_A: R_B \cdot 2l - P \cdot h - M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - 2q \cdot 2l \cdot l = 0$$

33

Siły w ściągu – cztery dodatkowe równania



$$\sum X: H_D - H_E = 0$$

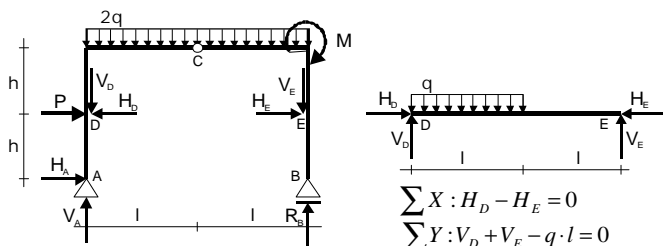
$$\sum Y: V_D + V_E - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_D: V_E \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\sum M_C: V_E \cdot l - H_E \cdot h - R_B \cdot l + M + 2q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

34

Rama ze ściągiem – 7 niewiadomych



$$\sum X: H_D - H_E = 0$$

$$\sum Y: V_D + V_E - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_D: V_E \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\sum X: H_A - H_D + H_E + P = 0$$

$$\sum Y: V_A + R_B - V_D - V_E - 2q \cdot 2l = 0$$

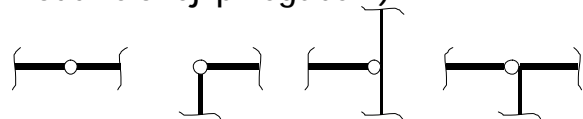
$$\sum M_A: R_B \cdot 2l - P \cdot h - M - 2q \cdot 2l \cdot l - V_E \cdot 2l - H_E \cdot h + H_D \cdot h = 0$$

$$\sum M_C: V_E \cdot l - H_E \cdot h - R_B \cdot l + M + 2q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

35

Przeguby pojedyncze

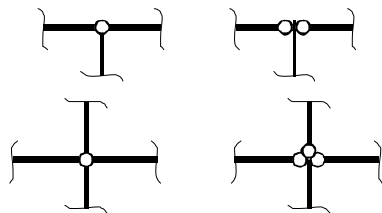
- Przeguby, w których jeden pręt łączy się z drugim ze swobodą obrotu.
- Pozwala na zapisanie jednego dodatkowego równania (sumy momentów względem przegubu od sił na jednej części konstrukcji oddzielonej przegubem).



36

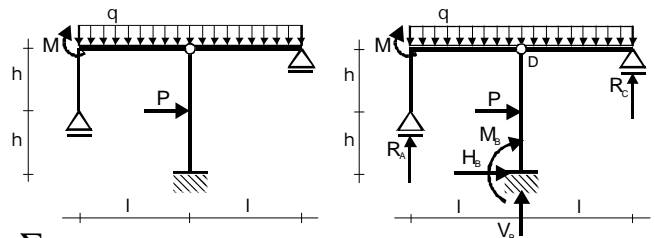
Przeguby wielokrotne

- Przeguby, w których łączą się ze sobą więcej niż dwa pręty ze swobodą obrotu względem pozostałych prętów.
- Pozwalają na zapisanie więcej niż jednego dodatkowego równania równowagi.



37

Rama z przegubem dwukrotnym



$$\sum X: H_B + P = 0$$

$$\sum Y: R_A + V_B + R_C - q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_B: R_A \cdot l + M_B - R_C \cdot l + M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + P \cdot h = 0$$

$$\sum M_D: R_C \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad \sum M_D': R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M = 0$$

38

Stopień statycznej wyznaczalności

- Stopień zewnętrznej statycznej wyznaczalności n:

- Belka: $n = r - g - rs$;
- Rama: $n = r + 3o - g - rs$;
- Kratownica: $n = r - rs$ lub $n = p - 2w$.

- Oznaczenia:

- r – liczba reakcji;
- g – liczba przegubów pojedynczych;
- o – liczba pól zamkniętych;
- rs=3 – liczba równań statyki;
- p – liczba prętów;
- w – liczba węzłów.

39

Stopień statycznej wyznaczalności

- Określenie stopnia statycznej wyznaczalności odnośnie do reakcji:

- Układ jest statycznie wyznaczalny, jeżeli współczynnik $n = 0$;
- Układ jest statycznie niewyznaczalny, jeżeli współczynnik $n > 0$;
- Układ jest geometrycznie zmienny, jeżeli współczynnik $n < 0$.

40

Sposób podparcia a statyczna wyznaczalność

- n Nie zawsze stopień statycznej wyznaczalności $n=0$ gwarantuje statyczną wyznaczalność.
- n Niewłaściwe rozmieszczenie podpór może powodować, że układ będzie geometrycznie zmienny (np. reakcje równoległe – płaszczyzna przesuwu) lub chwilowo geometrycznie zmienny (reakcje przecinające się w jednym punkcie – chwilowy środek obrotu).

41

Układy geometrycznie zmiennie (przykłady) ⁽¹⁾

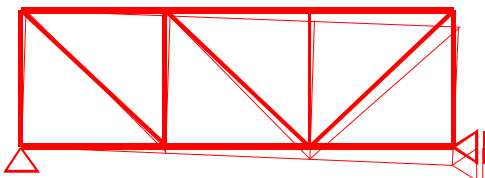
- n Niedostateczna liczba podpór.
- n Belka na trzech podporach przesuwnych.
- n Trzy niepodparte przeguby obok siebie.



42

Układy geometrycznie zmiennie (przykłady) ⁽²⁾

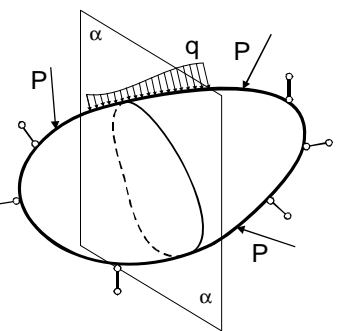
- n Belka z niepodpartym przęśłem przegubowym.
- n Trzy reakcje kratownicy przecinające się w jednym punkcie.



43

Siły wewnętrzne ⁽¹⁾

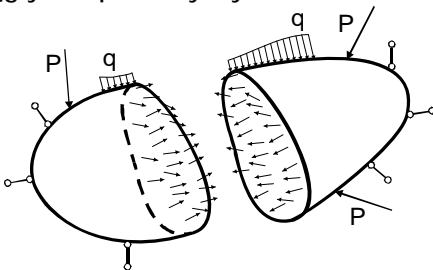
- n Mamy bryłę materialną obciążoną układem sił (siły zewnętrzne, reakcje), będących w równowadze. Rozetniemy myślowo tę bryłę na dwie części przekrojem $\alpha-\alpha$.



44

Siły wewnętrzne ⁽²⁾

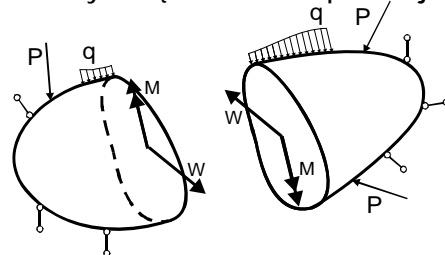
- n Aby fragment bryły był w równowadze musimy zastąpić wzajemne oddziaływanie fragmentów bryły przez przyłożenie w sposób ciągły do płaszczyzny $\alpha-\alpha$ układu sił.



45

Siły wewnętrzne ⁽³⁾

- n Siły te można zastąpić przez ich wypadkowe \bar{W} i \bar{M} , przyłożone w dowolnym punkcie przekroju $\alpha-\alpha$. W przypadku naszych rozważań punktem tym będzie środek przekroju.



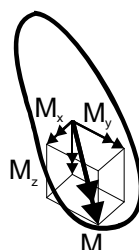
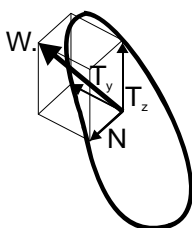
46

Siły przekrojowe

- n Wypadkową siłę \bar{W} i moment \bar{M} można wyrazić przez ich składowe:

$$\bar{W} = \bar{N} + \bar{T}_y + \bar{T}_z$$

$$\bar{M} = \bar{M}_x + \bar{M}_y + \bar{M}_z$$



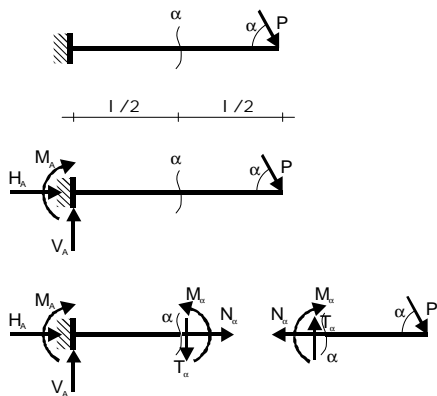
47

Nazwy sił przekrojowych

- n Wielkości te nazwano:
 - N – siła podłużna (normalne) – wywołuje rozciąganie lub ściskanie;
 - T_y, T_z (lub Q_y, Q_z) – siły poprzeczne (tnące) – wywołują ścinanie;
 - M_x – moment skręcający – wywołuje skręcanie;
 - M_y, M_z – momenty zginające – wywołują zginanie.

48

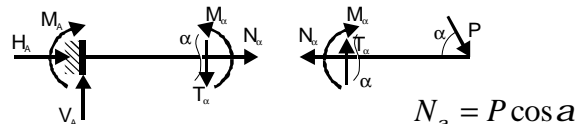
Przykład



49

Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje ⁽¹⁾

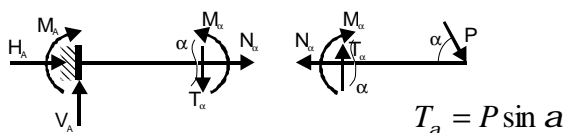
- Siła normalna (osiowa, podłużna) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się wzdłuż osi pręta w rozważanym punkcie.



50

Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje ⁽²⁾

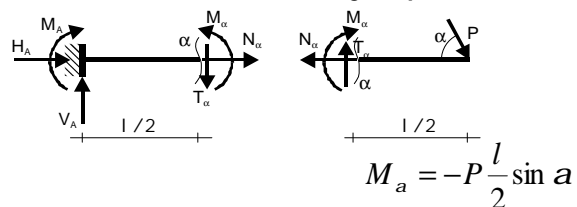
- Siła poprzeczna (tnąca) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się poprzecznie do osi pręta w rozważanym punkcie.



51

Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje ⁽³⁾

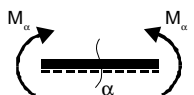
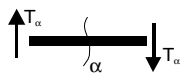
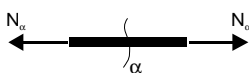
- Moment zginający – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich wzajemnemu obrotowi w rozważanym punkcie.



52

Siły wewnętrzne – konwencja znaków

- Siła normalna rozciągająca pręt jest dodatnia.
- Siła poprzeczna powodowana przez obciążenie działające po lewej stronie przekroju do góry lub po prawej stronie do dołu jest dodatnia.
- Moment rozciągający włókna dolne jest dodatni.



spodły (włókna dolne) 53

Siły wewnętrzne – wykresy ⁽¹⁾

- Kreskowanie (rzędne wykresu) należy zaznaczać prostopadle do osi pręta.
- Rzędne dodatnie wykresów sił normalnych i tnących odkłada się zazwyczaj u góry.
- Wykresy sił podłużnych i poprzecznych rysujemy ze znakiem.

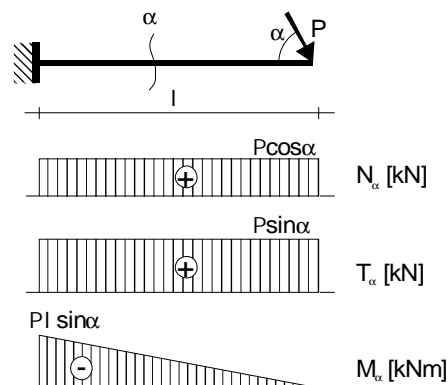
54

Siły wewnętrzne – wykresy ⁽²⁾

- Wykresy momentów nie muszą być znakowane, ale należy zwracać uwagę, aby rzędne momentu odkładać po stronie włókien rozciąganych.
- Rzędne dodatnie wykresu momentów zginających odkłada się u dołu (moment dodatni, gdy rozciągane są włókna dolne).
- Wykres momentu wskazuje jak odkształci się pręt i gdzie, w poszczególnych elementach, włókna są rozciągane.

55

Wykresy sił wewnętrznych



56

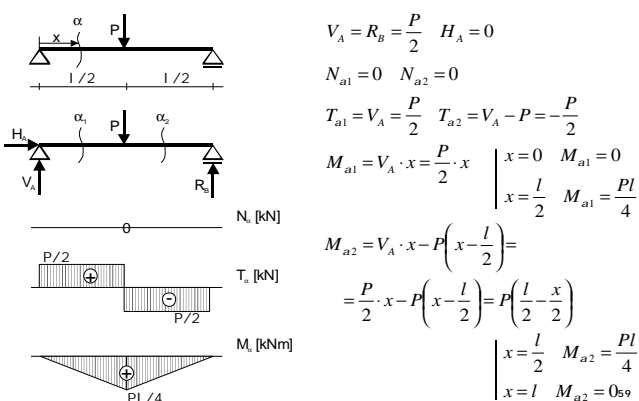
Punkty charakterystyczne, przekroje

- Ze względu na konieczność modyfikacji równań sił wewnętrznych:
 - w belkach i ramach – końce prętów, punkty przyłożenia sił:
 - czynnych: siła skupiona, moment skupiony, początek lub koniec obciążenia ciągłego;
 - biernych: punkty podporowe;
 - w ramach – dodatkowo węzły (połączenia prętów o różnej krzywiznie).

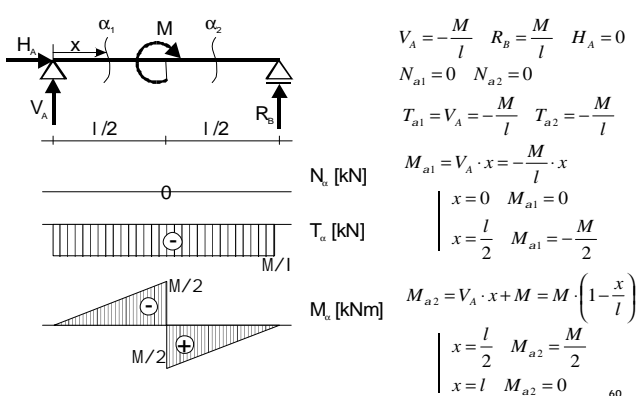
Przegub

- Przegub jest jedynie punktem kontrolnym (moment równy jest 0). Nie powoduje on konieczności wprowadzenia dodatkowego przekroju.

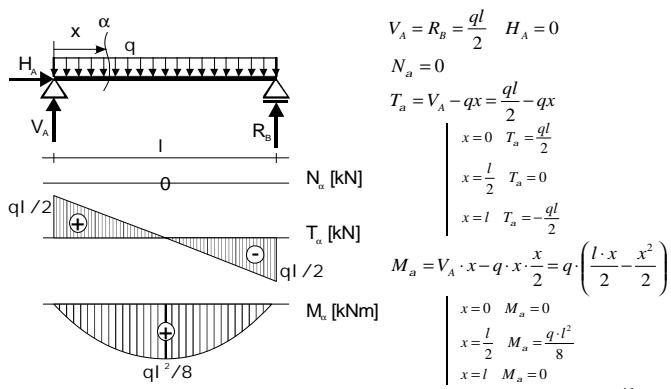
Siła skupiona



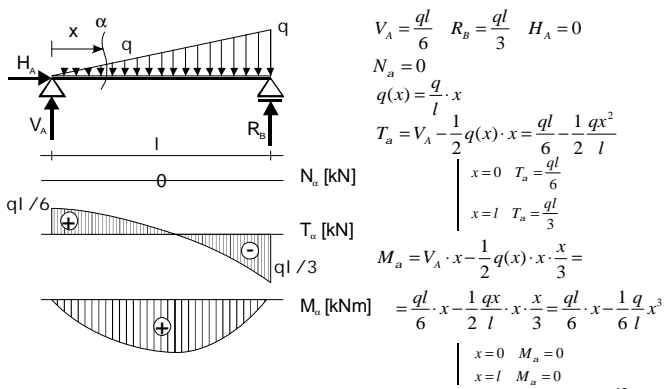
Moment skupiony



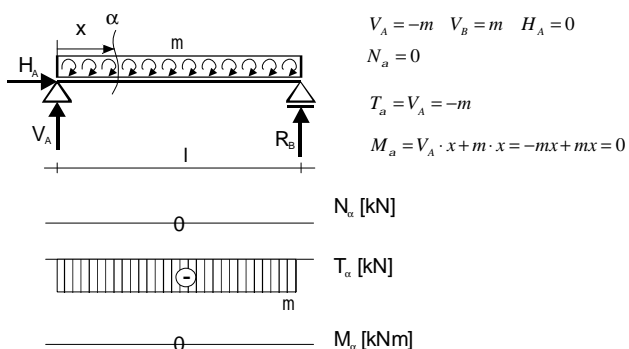
Obciążenie ciągłe równomierne



Obciążenie ciągłe liniowo zmienne

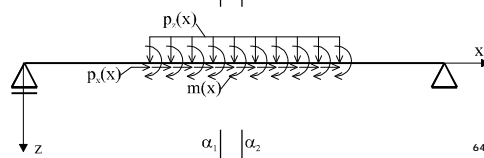


Obciążenie ciągłe momentem



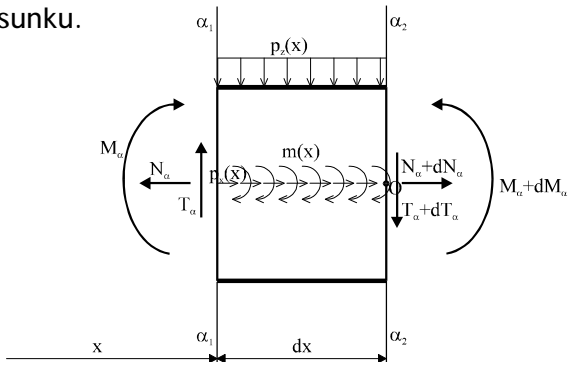
Warunki różniczkowe (1)

- Zależności różniczkowe między M_α , T_α , N_α i $p_x(x)$, $p_x(x)$, $m(x)$.
- Aby wyznaczyć te zależności rozważymy belkę swobodnie podpartą, obciążoną obciążeniami ciągłymi i ciągłym momentem na fragmencie belki.



Warunki różniczkowe (2)

Z tej belki wycinamy fragment przedstawiony na rysunku.



65

Warunki różniczkowe (3)

n Suma rzutów wszystkich sił na oś poziomą x :

$$\sum X = 0 \quad -N_\alpha + p_x(x)dx + (N_\alpha + dN_\alpha) = 0$$

n Suma rzutów wszystkich sił na oś pionową z :

$$\sum Z = 0 \quad -T_\alpha + p_z(x)dx + (T_\alpha + dT_\alpha) = 0$$

n Suma momentów wszystkich sił względem punktu O :

$$\sum M_o = 0$$

$$M_\alpha + T_\alpha dx + m_x(x)dx - p_z(x)dx \frac{dx}{2} - (M_\alpha + dM_\alpha) = 0$$

66

Warunki różniczkowe (4)

n Po odrzuceniu wielkości małej w porównaniu z pozostałymi $p_z(x)dx \frac{dx}{2}$, otrzymujemy:

$$\frac{dN_\alpha}{dx} = -p_x(x) \quad \frac{dT_\alpha}{dx} = -p_z(x) \quad \frac{dM_\alpha}{dx} = T_\alpha + m(x)$$

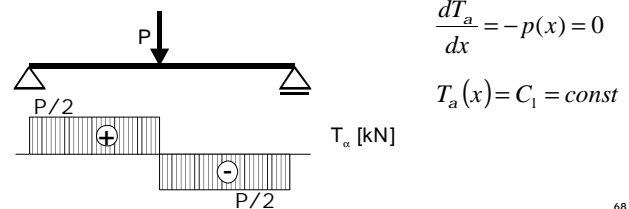
n Z powyższych równań wynika, że:

$$\frac{d^2 M_\alpha}{dx^2} = \frac{dT_\alpha}{dx} = -p_z(x)$$

67

Zależności między M_α , T_α oraz q (1)

n Jeżeli w przedziale nie ma obciążenia ciągłego poprzecznego to wykres sił tnących jest stały, równoległy do osi pręta.



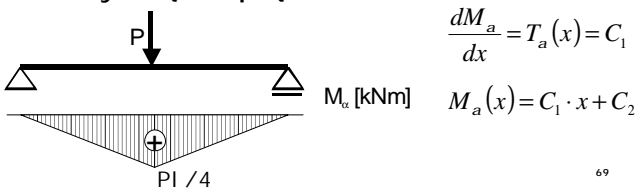
$$\frac{dT_\alpha}{dx} = -p(x) = 0$$

$$T_\alpha(x) = C_1 = const$$

68

Zależności między M_α , T_α oraz q (2)

n Jeżeli w przedziale nie ma obciążenia ciągłego poprzecznego i nie występuje obciążenie ciągłe momentem to wykres momentu jest linią prostą nachyloną do pręta.



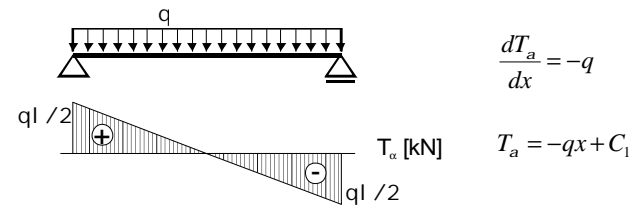
$$\frac{dM_\alpha}{dx} = T_\alpha(x) = C_1$$

$$M_\alpha(x) = C_1 \cdot x + C_2$$

69

Zależności między M_α , T_α oraz q (3)

n Jeżeli w przedziale działa stałe obciążenie ciągłe to wykres sił tnących jest nachylony do pręta, rzędne maleją wraz ze wzrostem x.



$$\frac{dT_\alpha}{dx} = -q$$

$$T_\alpha = -qx + C_1$$

70

Zależności między M_α , T_α oraz q (4)

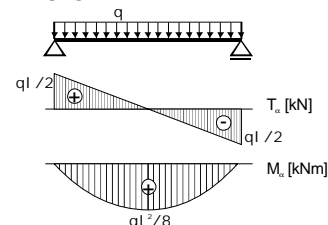
n Jeżeli w przedziale działa stałe obciążenie ciągłe i nie ma obciążenia ciągłego momentem, to wykres momentów zginających jest parabolą (krzywą drugiego stopnia).

à

Zależności między M_α , T_α oraz q (5)

n Jeżeli w przedziale zeruje się równanie siły tnącej to wykres momentów osiąga ekstremum w tym punkcie.

à

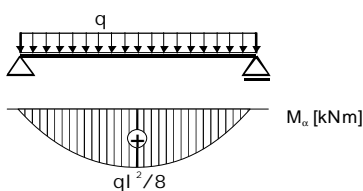


71

72

Zależności między M_a , T_a oraz q ⁽⁶⁾

n Jeżeli obciążenie ciągłe jest skierowane do dołu, to wypukłość wykresu jest skierowana w dół i odwrotnie.

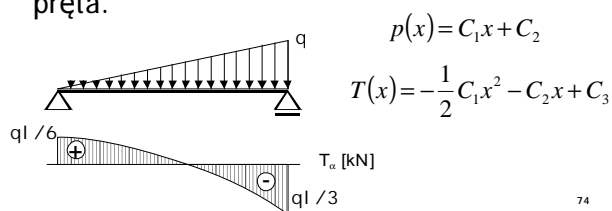


$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_a}{dx^2} &= -p(x) = -q \\ \frac{dM_a}{dx} &= -qx + C_1 \\ M(x) &= -\frac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

73

Zależności między M_a , T_a oraz q ⁽⁷⁾

n Jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe liniowo zmienne i nie ma obciążenia ciągłego momentem to wykres sił poprzecznych jest parabolą. W punkcie, gdzie obciążenie ciągłe się zeruje parabola jest styczna do osi do przęta.



$$\begin{aligned} p(x) &= C_1x + C_2 \\ T(x) &= -\frac{1}{2}C_1x^2 - C_2x + C_3 \end{aligned}$$

74

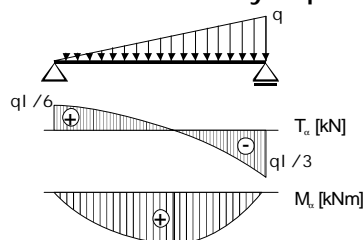
Zależności między M_a , T_a oraz q ⁽⁸⁾

n Jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe liniowe to wykres momentów zginających jest krzywą trzeciego stopnia.

à

Zależności między M_a , T_a oraz q ⁽⁹⁾

n Jeżeli równanie sił tnących zeruje się w przedziale, to wykres momentów osiąga ekstremum w tym punkcie. à

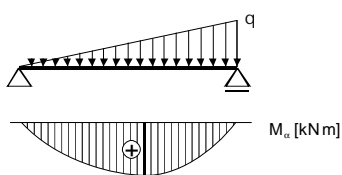


75

76

Zależności między M_a , T_a oraz q ⁽¹⁰⁾

n Jeżeli obciążenie ciągłe jest skierowane do dołu, to wypukłość wykresu jest skierowana w dół i odwrotnie.

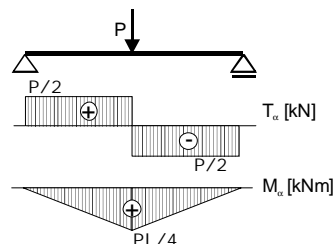


$$\begin{aligned} p(x) &= C_1x + C_2 \\ \frac{d^2 M_a}{dx^2} &= -p(x) = -C_1x - C_2 \\ \frac{dM_a}{dx} &= -\frac{1}{2}C_1x^2 - C_2x + C_3 \\ M(x) &= -\frac{1}{6}C_1x^3 - \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4 \end{aligned}$$

77

Zależności między M_a , T_a oraz q ⁽¹¹⁾

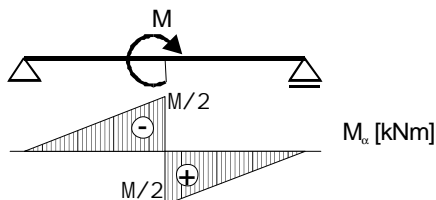
n Jeżeli na przęcie występuje siła skupiona, to na wykresie sił poprzecznych wystąpi „skok” o tę wartość, a na wykresie momentów zginających wystąpi „załamanie” wykresu.



78

Zależności między M_a , T_a oraz q ⁽¹²⁾

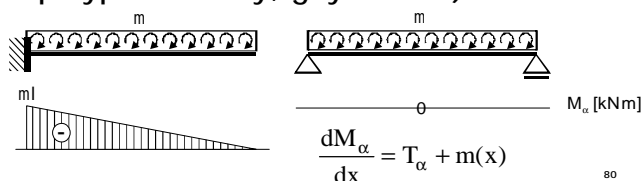
n Jeżeli na przęcie występuje moment skupiony, to na wykresie momentów zginających wystąpi „skok” o wartość tego momentu.



79

Zależności między M_a , T_a oraz q i m ⁽¹³⁾

n Jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe momentem to wykres momentów zginających jest liniowy (liniowo zmienny lub w szczególnym przypadku stały, gdy $T_\alpha = -m$).



80

Zależności między M_a , T_a oraz q ⁽¹⁴⁾

| Obciążenie | Wykres T | Wykres M |
|-----------------------|-------------|-------------|
| Brak obc. ciągłego | stały | prosta |
| Obc. ciągle stałe | prosta | parabola 2° |
| Obc. ciągle trójkątne | parabola 2° | krzywa 3° |
| Sila skupiona | skok | załamanie |
| Moment skupiony | – | skok |
| Obc. ciągle momentem | – | prosta |