

Mechanika teoretyczna

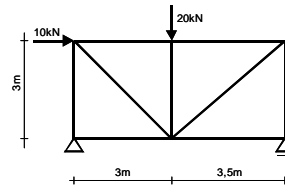
Wykład nr 4

Obliczanie sił wewnętrznych w układach prętowych.

Kratownice.

Kratownica

- Układ prętów prostoliniowych, pryzmatycznych, jednorodnych:
 - połączenia przegubowe w węzłach;
 - obciążenia w postaci sił skupionych przyłożonych w węzłach.

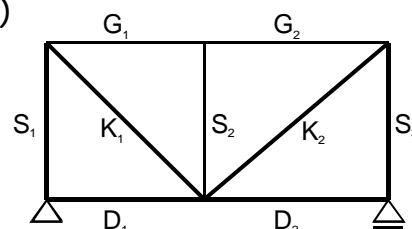


Konsekwencje

- Węzeł doznaje przesuwu (dwie składowe), obrót jest nieistotny.
- W prętach dwustronnie przegubowych, nieobciążonych poprzecznie na długości, jedyną siłą wewnętrzną to normalna (siła osiowa).

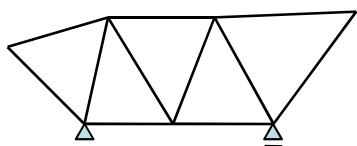
Nazwy prętów

- Pas dolny (D)
- Pas górny (G)
- Krzyżulce (K)
- Słupki (S)



Statyczna wyznaczalność

- Najprostsza kratownica złożona z trzech prętów połączonych przegubowo tworzy tarczę sztywną i jest statycznie wyznaczalna.
- Każda kratownica budowana przez dostawianie pól zamkniętych utworzonych za pomocą kolejnych dwóch prętów jest statycznie wyznaczalna.



Stopień statycznej wyznaczalności

- Statyczna wyznaczalność:
 - zewewnętrzna – możliwość policzenia reakcji:

$$n_z = r - 3$$

- wewnętrzna – możliwość policzenia sił w prętach:

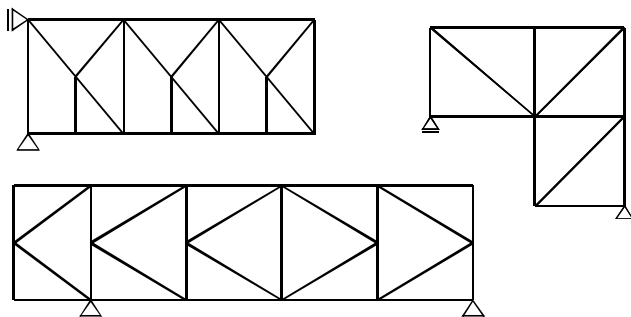
$$n_w = p - 2 \cdot w + 3$$

- całkowita:

$$n = r + p - 2 \cdot w$$

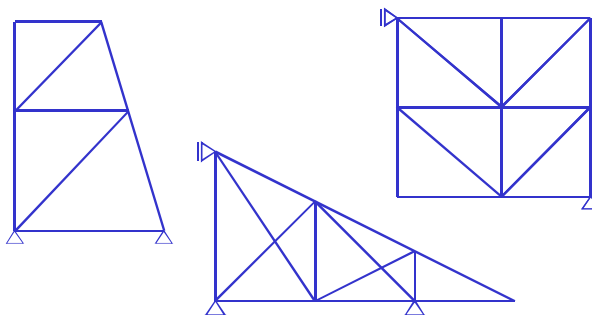
Przykłady ⁽¹⁾

- Kratownice statycznie wyznaczalne



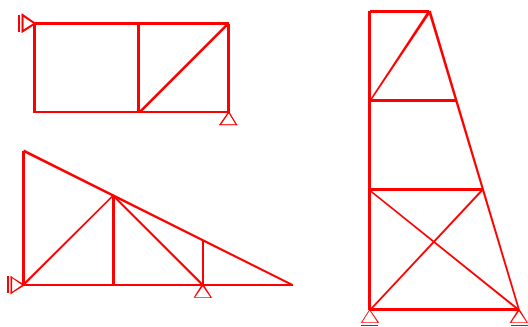
Przykłady ⁽²⁾

- Kratownice statycznie niewyznaczalne



Przykłady ⁽³⁾

n Kratownice geometrycznie zmienne



9

Metody rozwiązywania

n Metoda równoważenia węzłów.

n Metoda Rittera.

n Inne:

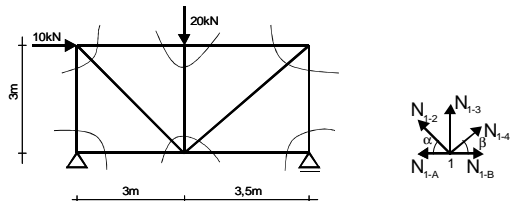
- wykreślna metoda Cremony;
- metoda Culmana;
- metoda Hanneberga (wymiany prętów).

10

Metoda równoważenia węzłów

n Każdy z węzłów oddzielony zostaje od prętów za pomocą przekroju przywęzłowego.

n W węzłach otrzymuje się układy sił zbieżnych, w których można zapisać dwa równania równowagi – sumy rzutów sił na dwie osie.



11

Zalety i wady metody równoważenia węzłów

n Zalety:

- łatwość zapisania równań – sumy rzutów sił;
- kontrola wyników: ostatnie trzy równania są sprawdzeniami;

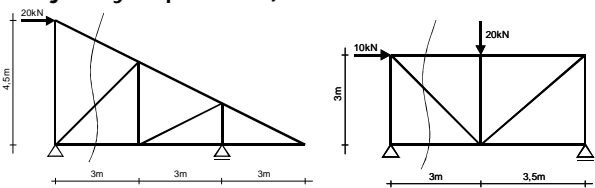
n Wady:

- propagacja błędów;
- duży nakład pracy wymagany do policzenia siły w wybranym przecię.

12

Metoda Rittera ⁽¹⁾

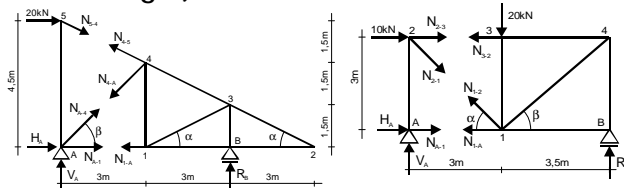
n Kratownicę należy przeciąć przekrojem takim, aby można było zapisać równanie, w którym jedyną niewiadomą będzie szukana siła w przecię (najczęściej przez 3 pręty, z których osie dwóch przecinają się w jednym punkcie).



13

Metoda Rittera ⁽²⁾

n Otrzymany układ sił jest niezbieżny. Równanie równowagi to zazwyczaj suma momentów względem punktu przecięcia osi pozostałych prętów (czasem suma rzutów sił – gdy pozostałe pręty są równoległe).



14

Zalety i wady metody Rittera

n Zalety:

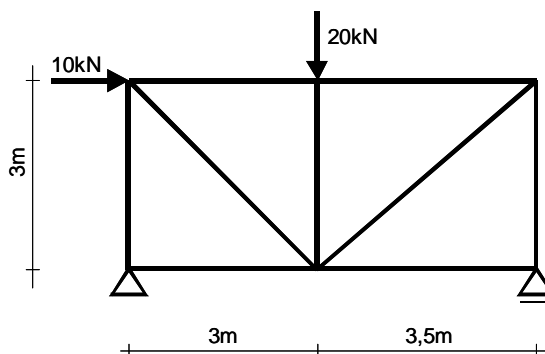
- do znalezienia siły w przecię potrzebne jest zapisanie i rozwiązanie tylko jednego równania;
- brak propagacji błędów;

n Wady:

- konieczność zapisania równań sum momentów;
- brak kontroli błędów (możliwa np. za pomocą metody równoważenia węzłów).

15

Przykład A – kratownica z pasami równoległymi



16

Przykład A – Reakcje

$$\sin a = \cos a = \frac{3m}{\sqrt{(3m)^2 + (3m)^2}} = 0,707$$

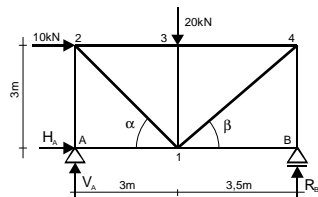
$$\sin b = \frac{3m}{\sqrt{(3m)^2 + (3,5m)^2}} = 0,651$$

$$\cos b = \frac{3,5m}{\sqrt{(3m)^2 + (3,5m)^2}} = 0,759$$

$$\sum X : H_A + 10kN = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - 20kN = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 6,5m - 10kN \cdot 3m - 20kN \cdot 3m = 0$$



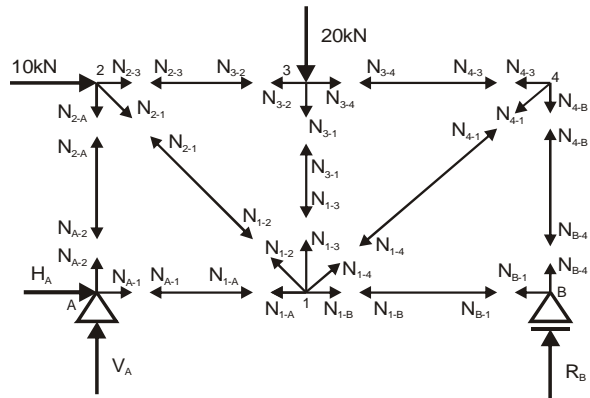
$$H_A = -10kN$$

$$V_A = 6,154kN$$

$$R_B = 13,846kN$$

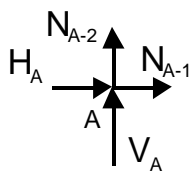
17

Przykład A – metoda równoważenia węzłów



18

Węzeł A



$$\sum X : H_A + N_{A-1} = 0$$

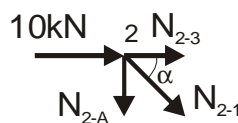
$$N_{A-1} = -H_A = 10kN$$

$$\sum Y : V_A + N_{A-2} = 0$$

$$N_{A-2} = -V_A = -6,154kN$$

19

Węzeł 2



$$\sum Y : N_{2-A} + N_{2-1} \cdot \sin a = 0$$

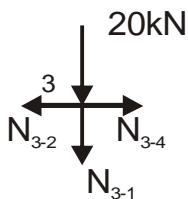
$$N_{2-1} = -\frac{N_{2-A}}{0,707} = 8,704kN$$

$$\sum X : N_{2-3} + N_{2-1} \cdot \cos a + 10kN = 0$$

$$N_{2-3} = -10kN - 8,704kN \cdot 0,707 = -16,154kN$$

20

Węzeł 3



$$\sum Y : N_{3-1} + 20kN = 0$$

$$N_{3-1} = -20kN$$

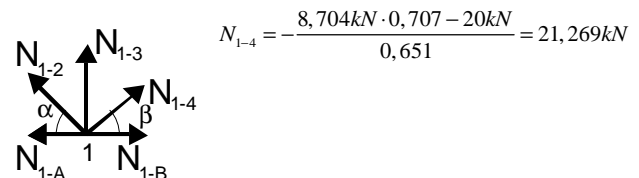
$$\sum X : N_{3-2} - N_{3-4} = 0$$

$$N_{3-4} = N_{3-2} = -16,154kN$$

21

Węzeł 1

$$\sum Y : N_{1-2} \cdot \sin a + N_{1-3} + N_{1-4} \cdot \sin b = 0$$



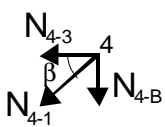
$$N_{1-4} = -\frac{8,704kN \cdot 0,707 - 20kN}{0,651} = 21,269kN$$

$$\sum X : -N_{1-A} - N_{1-2} \cdot \cos a + N_{1-4} \cdot \cos b + N_{1-B} = 0$$

$$N_{1-B} = 10kN + 8,704kN \cdot 0,707 - 21,269kN \cdot 0,759 = 0,011kN$$

22

Węzeł 4



Sprawdzenie:

$$\sum X : N_{4-3} + N_{4-1} \cdot \cos b = 0$$

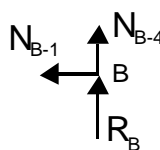
$$N_{4-3} + N_{4-1} \cdot 0,759 = -16,154kN + 21,269kN \cdot 0,759 = -0,011kN \approx 0$$

$$\sum Y : N_{4-B} + N_{4-1} \cdot \sin b = 0$$

$$N_{4-B} = -21,269kN \cdot 0,651 = -13,846kN$$

23

Węzeł B



Sprawdzenie:

$$\sum X : N_{B-1} = 0$$

$$N_{B-1} = 0,011kN \approx 0$$

Sprawdzenie:

$$\sum Y : N_{B-4} + R_B = 0$$

$$N_{B-4} + R_B = -13,864 + 13,864 = 0$$

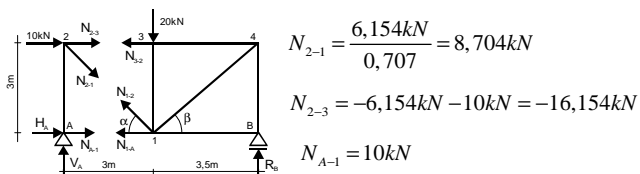
24

Przykład A – metoda Rittera – przekrój 1 (z lewej)

$$\sum Y^l : V_A - N_{2-1} \cdot \sin a = 0$$

$$\sum M_1^l : V_A \cdot 3m + 10kN \cdot 3m + N_{2-3} \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_2^l : H_A \cdot 3m + N_{A-1} \cdot 3m = 0$$



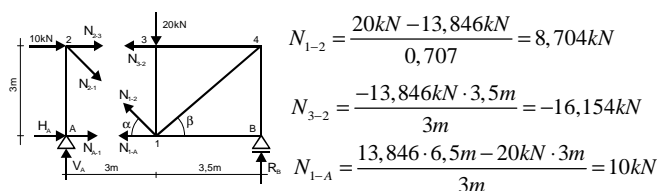
25

Przykład A – metoda Rittera – przekrój 1 (z prawej)

$$\sum Y^p : R_B + N_{1-2} \cdot \sin a - 20kN = 0$$

$$\sum M_1^p : R_B \cdot 3,5m + N_{3-2} \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_2^p : R_B \cdot 6,5m - N_{1-A} \cdot 3m - 20kN \cdot 3m = 0$$



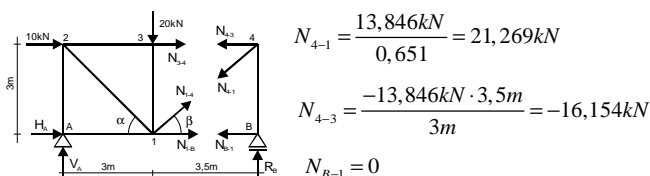
26

Przykład A – metoda Rittera – przekrój 2

$$\sum Y^p : R_B - N_{4-1} \cdot \sin b = 0$$

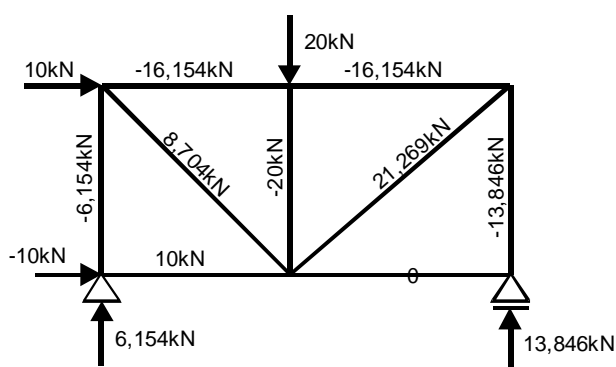
$$\sum M_1^p : R_B \cdot 3,5m + N_{4-3} \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_4^p : N_{B-1} \cdot 3m = 0$$



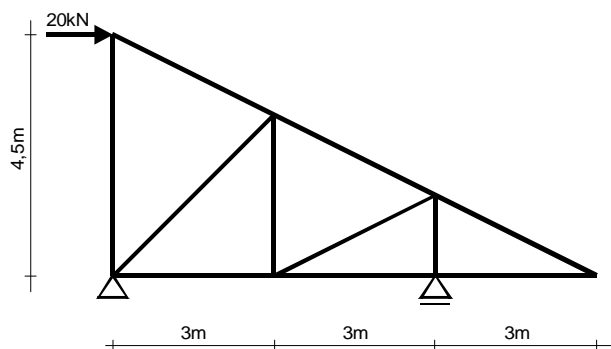
27

Przykład A – Wyniki: zestawienie sił



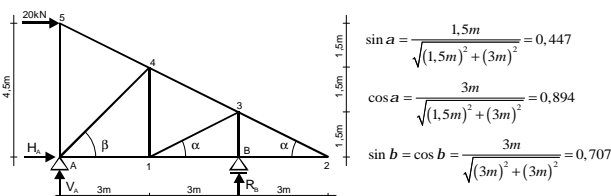
28

Przykład B – kratownica trójkątna



29

Przykład B – reakcje



$$\sum X : H_A + 20kN = 0$$

$$H_A = -20kN$$

$$\sum Y : V_A + R_B = 0$$

$$V_A = -15kN$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 6m - 20kN \cdot 4,5m = 0$$

$$R_B = 15kN$$

30

Węzeł 2

$$\sum Y : N_{2-3} \cdot \sin a = 0$$

$$N_{2-3} = 0$$

$$\sum X : N_{2-B} + N_{2-3} \cdot \cos a = 0$$

$$N_{2-B} = 0$$

Węzeł B

$$\sum X : N_{B-2} - N_{B-1} = 0$$

$$N_{B-1} = 0$$

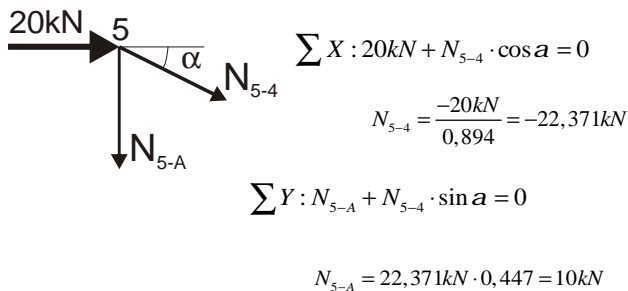
$$\sum Y : R_B + N_{B-3} = 0$$

$$N_{B-3} = -15kN$$

31

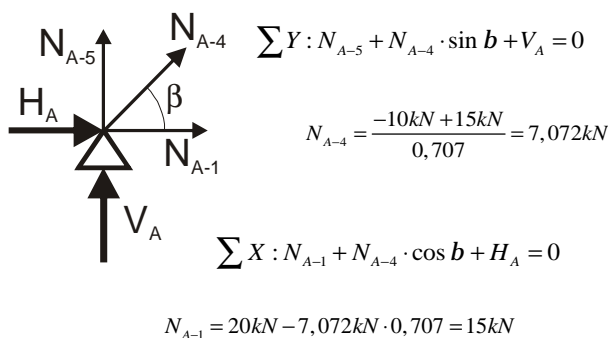
32

Węzeł 5



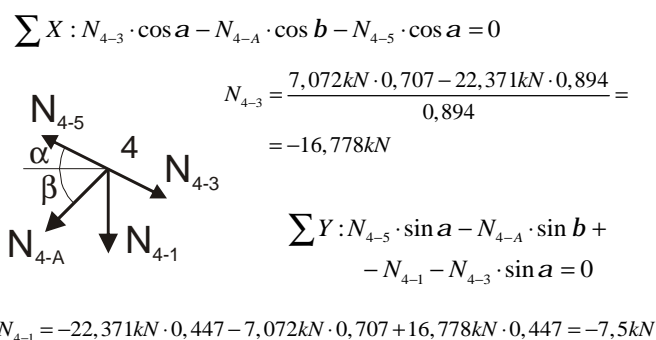
33

Węzeł A



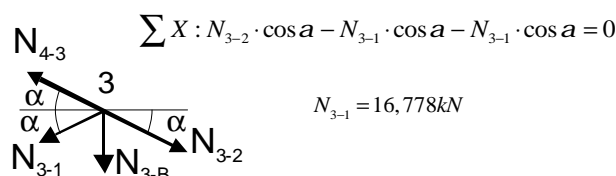
34

Węzeł 4



35

Węzeł 3

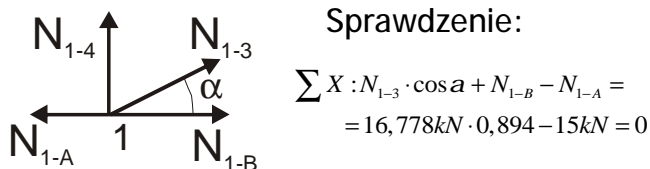


Sprawdzenie:

$$\sum Y : N_{4-3} \cdot \sin a - N_{3-B} - N_{3-1} \cdot \sin a - N_{3-2} \cdot \sin a = -16,778kN \cdot 0,447 - 16,778kN \cdot 0,447 + 15kN = 0$$

36

Węzeł 1



Sprawdzenie:

$$\sum Y : N_{1-4} - N_{1-3} \cdot \sin a = -7,5kN + 16,778kN \cdot 0,447 = 0$$

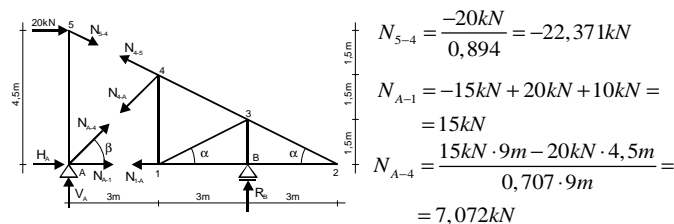
37

Przykład B – metoda Rittera – przekrój 1 (z lewej)

$$\sum M_A^I : N_{5-4} \cdot \cos a \cdot 4,5m + 20kN \cdot 4,5m = 0$$

$$\sum M_4^I : V_A \cdot 3m - H_A \cdot 3m + 20kN \cdot 1,5m - N_{A-1} \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_2^I : V_A \cdot 9m + 20kN \cdot 4,5m + N_{A-4} \cdot \sin b \cdot 9m = 0$$



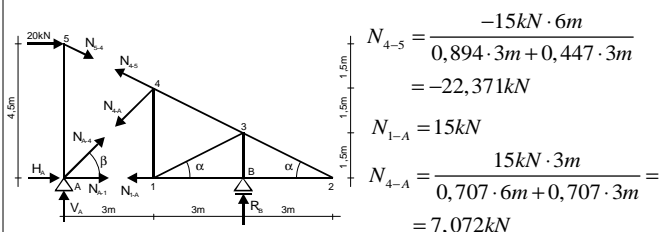
38

Przykład B – metoda Rittera – przekrój 1 (z prawej)

$$\sum M_A^P : N_{4-5} \cdot \cos a \cdot 3m + N_{4-5} \cdot \sin a \cdot 3m + R_B \cdot 6m = 0$$

$$\sum M_4^P : R_B \cdot 3m - N_{1-A} \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_2^P : R_B \cdot 3m - N_{4-A} \cdot \sin b \cdot 6m - N_{4-A} \cdot \cos b \cdot 3m = 0$$



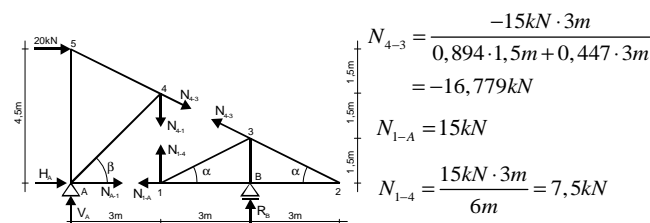
39

Przykład B – metoda Rittera – przekrój 2

$$\sum M_1^P : N_{4-3} \cdot \cos a \cdot 1,5m + N_{4-3} \cdot \sin a \cdot 3m + R_B \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_4^P : R_B \cdot 3m - N_{1-A} \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_2^P : R_B \cdot 3m - N_{1-4} \cdot 6m = 0$$



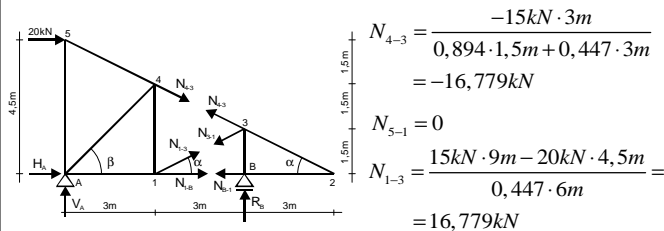
40

Przykład B – metoda Rittera – przekrój 3

$$\sum M_1^P : N_{4-3} \cdot \cos a \cdot 1,5m + N_{4-3} \cdot \sin a \cdot 3m + R_B \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_3^P : N_{5-1} \cdot 1,5m = 0$$

$$\sum M_2^I : V_A \cdot 9m + 20kN \cdot 4,5m + N_{1-3} \cdot \sin a \cdot 6m = 0$$



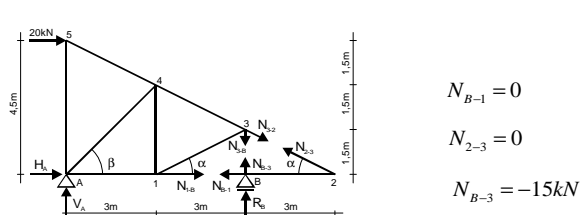
41

Przykład B – metoda Rittera – przekrój 4

$$\sum M_3^P : N_{B-1} \cdot 1,5m = 0$$

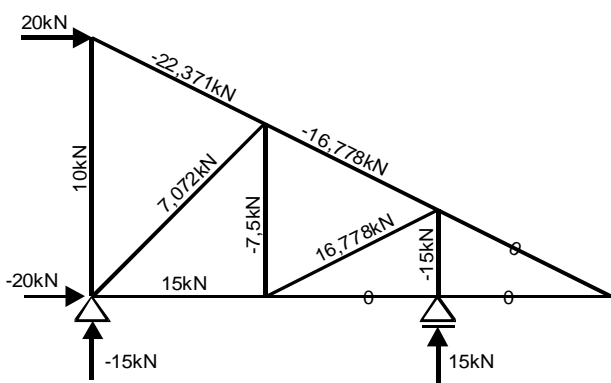
$$\sum M_B^P : N_{2-3} \cdot \sin a \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_2^P : R_B \cdot 3m + N_{B-3} \cdot 3m = 0$$



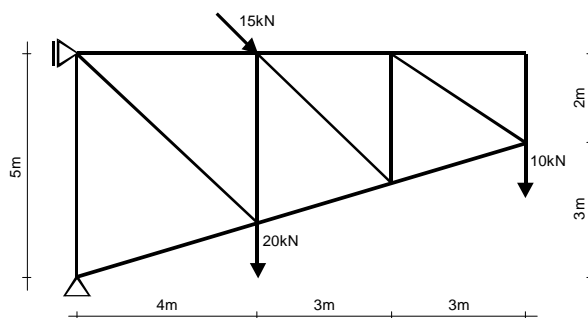
42

Przykład B – wyniki: zestawienie sił



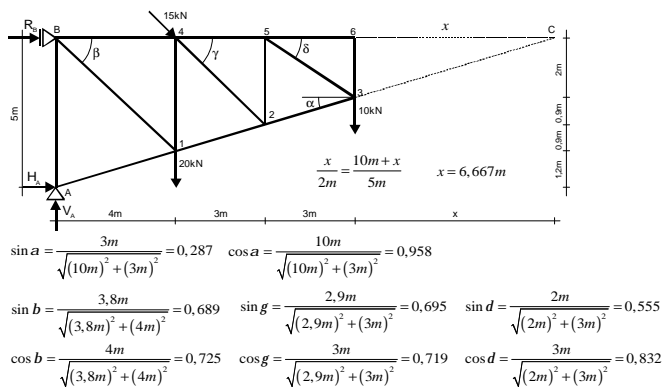
43

Przykład C – kratownica z pasami zbieżnymi



44

Przykład C – wymiary



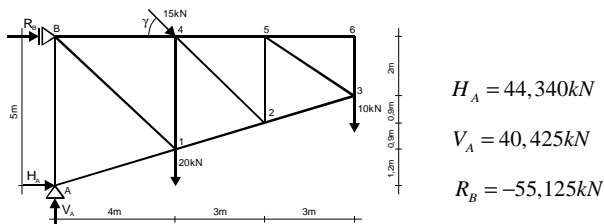
45

Przykład C - reakcje

$$\sum X : H_A + R_B + 15kN \cdot \cos g = 0$$

$$\sum Y : V_A - 20kN - 10kN - 15kN \cdot \sin g = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 5m + 20kN \cdot 4m + 10kN \cdot 10m + 15kN \cdot \sin g \cdot 4m + 15kN \cdot \cos g \cdot 5m = 0$$



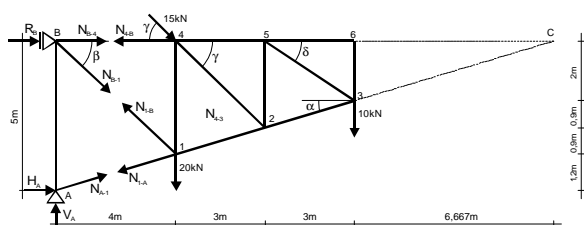
46

Przykład C – metoda Rittera – przekrój 1

$$\sum M_1^P : N_{4-B} \cdot 3,8m - 15kN \cdot \cos g \cdot 3,8m - 10kN \cdot 6m = 0 \quad N_{4-B} = 26,574kN$$

$$\sum M_B^I : N_{A-1} \cdot \cos a \cdot 5m + H_A \cdot 5m = 0 \quad N_{A-1} = -46,284kN$$

$$\sum M_C^I : V_A \cdot 16,667m - H_A \cdot 5m - N_{B-1} \cdot \sin b \cdot 16,667m = 0 \quad N_{4-B} = 39,366kN$$



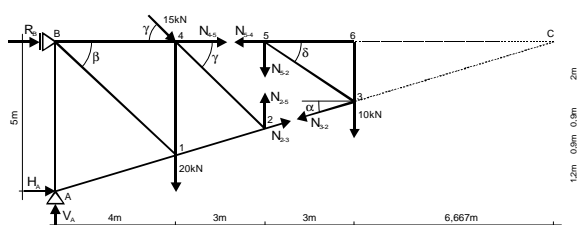
47

Przykład C – metoda Rittera – przekrój 2

$$\sum M_2^P : N_{3-4} \cdot 2,9m - 10kN \cdot 3m = 0 \quad N_{3-4} = 10,345kN$$

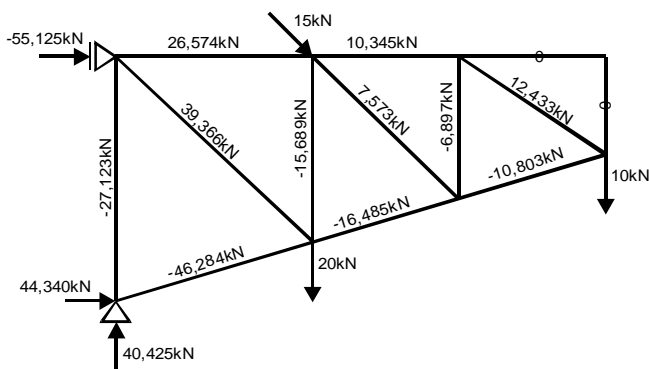
$$\sum M_5^P : N_{3-2} \cdot \cos a \cdot 2m + N_{3-2} \cdot \sin a \cdot 3m + 10kN \cdot 3m = 0 \quad N_{3-2} = -10,803kN$$

$$\sum M_C^P : N_{5-2} \cdot 9,667m + 10kN \cdot 6,667m = 0 \quad N_{5-2} = -6,897kN$$



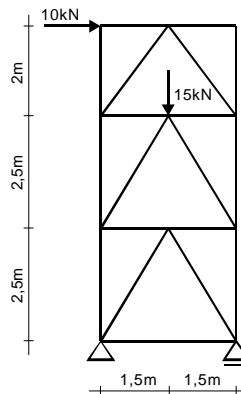
48

Przykład C – wyniki: zestawienie sił



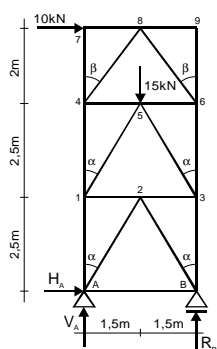
49

Przykład D – kratownica typu „K”



50

Przykład D – reakcje



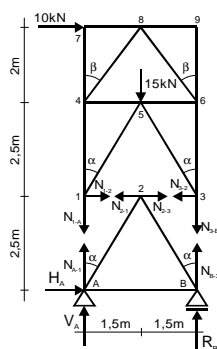
$$\begin{aligned} \sum X: H_A + 10kN &= 0 & H_A &= -20kN \\ \sum Y: V_A + R_B - 15kN &= 0 & V_A &= -15,833kN \\ \sum M_A: R_B \cdot 3m - 15kN \cdot 1,5m - 10kN \cdot 7m &= 0 & R_B &= 30,833kN \end{aligned}$$

$$\sin a = \frac{1,5m}{\sqrt{(1,5m)^2 + (2,5m)^2}} = 0,514 \quad \cos a = \frac{2,5m}{\sqrt{(1,5m)^2 + (2,5m)^2}} = 0,857$$

$$\sin b = \frac{1,5m}{\sqrt{(1,5m)^2 + (2m)^2}} = 0,6 \quad \cos b = \frac{2m}{\sqrt{(1,5m)^2 + (2m)^2}} = 0,8$$

51

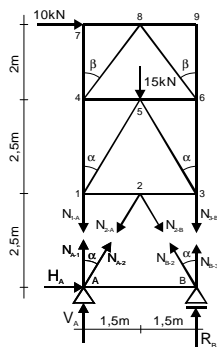
Przykład D – metoda Rittera – przekrój 1



$$\begin{aligned} \sum M_1^g: N_{3-B} \cdot 3m + 15kN \cdot 1,5m + 10kN \cdot 4,5m &= 0 & N_{3-B} &= -22,500kN \\ \sum M_3^g: N_{1-A} \cdot 3m + 15kN \cdot 1,5m - 10kN \cdot 4,5m &= 0 & N_{1-A} &= 7,500kN \end{aligned}$$

52

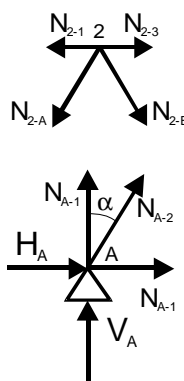
Przykład D – metoda Rittera – przekrój 2



$$\begin{aligned} \sum X^g: N_{2-A} \cdot \sin a - N_{2-B} \cdot \sin a - 10kN &= 0 \\ N_{2-A} - N_{2-B} &= \frac{10kN}{\sin a} \end{aligned}$$

53

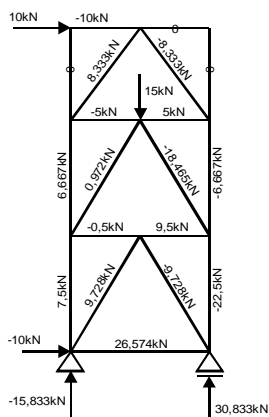
Przykład D – metoda równoważenia węzłów



$$\begin{aligned} \sum Y: N_{2-A} \cdot \cos a + N_{2-B} \cdot \cos a &= 0 \\ N_{2-B} &= -N_{2-A} & 2N_{2-A} &= \frac{10kN}{\sin a} \\ N_{2-A} &= \frac{10kN}{2 \sin a} = \frac{10kN}{2 \cdot 0,514} = 9,728kN \\ N_{2-B} &= -9,728kN \\ \sum X: N_{A-2} \cdot \sin a + N_{A-1} + H_A &= 0 \\ N_{A-1} &= 10kN - 9,728kN \cdot 0,514 = 5kN \end{aligned}$$

54

Przykład D – wyniki: zestawienie sił



55