

Mechanika ogólna

Wykład nr 5

Pręty o osi zakrzywionej.

Łuki.

Łuki, sklepienia

- Łuk: pręt o osi zakrzywionej (w stanie nieodkształconym) w płaszczyźnie działania sił i podparty na końcach w taki sposób, że podpory nie mogą się względem siebie przemieszczać.
- Sklepienie: łuk, którego szerokość w stosunku do rozpiętości jest znaczna.

Zalety łuków (1)

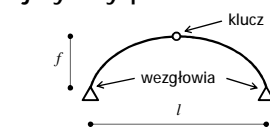
- Jeżeli podpory nie mogą się względem siebie poruszać, to przy obciążeniu wyłącznie pionowym, w łuku występuje znaczna redukcja momentów zginających.
- Poziome siły na podporach nazywane są rozporem łuku.

Zalety łuków (2)

- W przeciwieństwie do belek i ram, które wykonuje się z materiałów sprężystych, przy zapewnieniu nieprzesuwności podpór względem siebie, łuki nawet o dużej rozpiętości mogą być wykonywane z materiałów kruchych (np. mur ceglany lub kamienny, beton niezbrojony).

Geometria łuku (1)

- Wezłowania – punkty podparcia łuku;
- Klucz (zwornik) – najwyższy punkt łuku;
- Strzałka łuku: f
- Rozpiętość łuku: l
- Wyniosłość - stosunek strzałki łuku do rozpiętości:



$$x = \frac{f}{l} = \frac{1}{12} + 1(2)$$

Geometria łuku (2)

- Podział ze względu na wymiary łuku:
 - Strzeliste (wyniosłe, podwyższone);
 - Płaskie (obniżone);
 - Wspięte (podpory na różnych poziomach).
- Podział ze względu na wymiary przekroju:
 - O stałym lub zmiennym przekroju.
- Kształt osi łuku:
 - Kołowe, paraboliczne, sinusoidalne, eliptyczne.

Kształt osi łuku (1)

- Łuki paraboliczne:

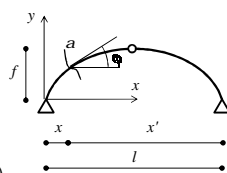
– Równanie łuku:
 $y = \frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x) \quad y = \frac{4f}{l^2} \cdot x \cdot x'$

- Pochodna:

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}j = \frac{4f}{l^2} (l-2x) = \frac{4f}{l^2} (2x'-l)$$

- Funkcje trygonometryczne:

$$\cos j = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2j}} \quad \sin j = \frac{\text{tg}j}{\sqrt{1+\text{tg}^2j}}$$



Kształt osi łuku (2)

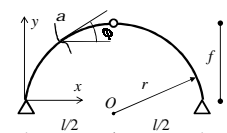
- Łuki kołowe:

– Równanie łuku: $y = f - r + \sqrt{r^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}$

– Pochodna: $\frac{dy}{dx} = \text{tg}j = \frac{l-2x}{2\sqrt{r^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}}$

- Funkcje trygonometryczne:

$$\cos j = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2j}} \quad \sin j = \frac{\text{tg}j}{\sqrt{1+\text{tg}^2j}}$$



Schematy statyczne konstrukcji prętowych zakrzywionych (1)

- Belki zakrzywione (stosowane np. jako układy podstawowe przy rozwiązywaniu metodą sił):

– Belka swobodnie podparta:



– Belka wspornikowa:

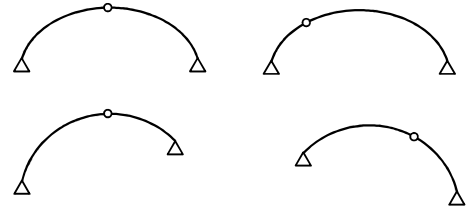


9

Schematy statyczne konstrukcji prętowych zakrzywionych (2)

- Łuki statycznie wyznaczalne:

– Łuk trójprzegubowy:



10

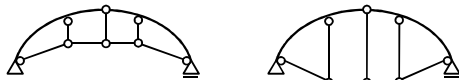
Schematy statyczne konstrukcji prętowych zakrzywionych (2)

- Łuk ze ściągiem

– siła rozporu przejmowana jest przez prostoliniowy rozciągany pręt:



– W celu zapewnienia odpowiedniej przestrzeni pod łukiem wykonuje się także łuki o ściągach w kształcie linii łamanej.



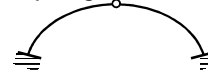
11

Schematy statyczne konstrukcji prętowych zakrzywionych (3)

- Łuki statycznie niewyznaczalne:

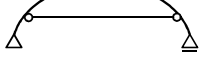
– Łuk z jednym przegubem:

– Łuk bezprzegubowy:



– Łuk dwuprzegubowy:

– Łuk ze ściągiem:



12

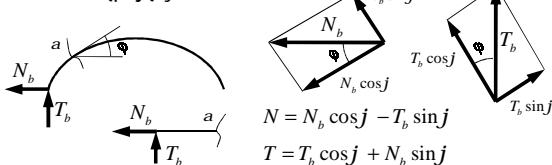
Rozwiązywanie łuków

- Wyznaczanie reakcji:

– Z równań równowagi z ewentualnym wykorzystaniem przegubów.

- Siły wewnętrzne:

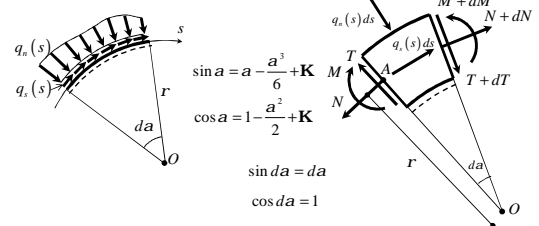
– Na podstawie sił wewnętrznych belkowych z następujących wzorów:



13

Warunki różniczkowe (1)

- Warunki równowagi zapisywane w odniesieniu do zmiennej s odmierzanej wzdłuż osi łuku:



14

Warunki różniczkowe (2)

$$\sum S = -N + (N + dN) \cos da - q_n(s) ds \sin \frac{da}{2} - (T + dT) \sin da + q_t(s) ds \cos \frac{da}{2} = 0$$

$$\frac{dN}{ds} - T \frac{da}{ds} = -q_n(s)$$

$$\sum N = T - (T + dT) \cos da - q_n(s) ds \cos \frac{da}{2} - (N + dN) \sin da - q_t(s) ds \sin \frac{da}{2} = 0$$

$$\frac{dT}{ds} + N \frac{da}{ds} = -q_t(s)$$

$$\sum M_A = -M + (M + dM) - (T + dT) \cos da \cdot ds \cos da - (T + dT) \sin da \cdot ds \sin da +$$

$$-(N + dN) \sin da \cdot ds \cos da + (N + dN) \cos da \cdot ds \sin da +$$

$$+ q_n(s) ds \sin \frac{da}{2} \cdot \frac{ds}{2} \sin \frac{da}{2} - q_t(s) ds \cos \frac{da}{2} \cdot \frac{ds}{2} \cos \frac{da}{2} +$$

$$- q_n(s) ds \sin \frac{da}{2} \cdot \frac{ds}{2} \sin \frac{da}{2} - q_t(s) ds \cos \frac{da}{2} \cdot \frac{ds}{2} \cos \frac{da}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{ds} = T(s)$$

15

Warunki różniczkowe (3)

$$ds = r da \quad \frac{dN}{ds} - T \frac{1}{r} = -q_n(s)$$

$$\frac{dT}{ds} + N \frac{1}{r} = -q_t(s)$$

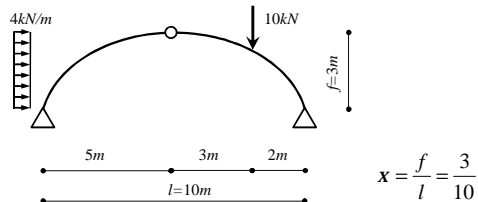
$$\frac{dM}{ds} = T(s)$$

- Ekstremum momentu zginającego występuje w punkcie, w którym równanie siły tnącej ma miejsce zerowe.

16

Przykład 1

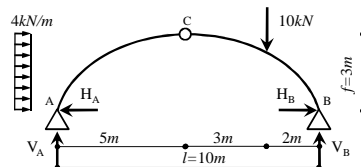
n Wyznaczyć siły wewnętrzne w trójprzegubowym łuku parabolicznym:



$$x = \frac{f}{l} = \frac{3}{10}$$

17

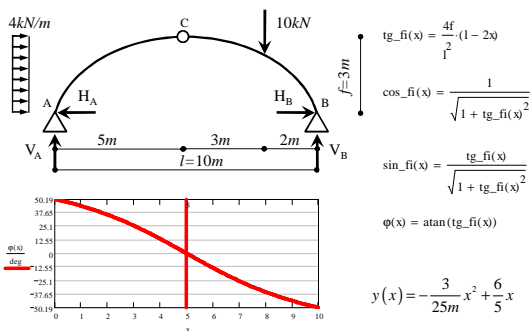
Przykład 1 – reakcje podporowe



$$\begin{aligned} \sum X &= -H_A + H_B + 4 \frac{kN}{m} \cdot 3m = 0 & H_A &= 5,667kN \\ \sum Y &= V_A + V_B - 10kN = 0 & V_A &= 0,2kN \\ \sum M_A &= V_B \cdot 10m - 10kN \cdot 8m - 4 \frac{kN}{m} \cdot 3m \cdot \frac{3m}{2} = 0 & V_B &= 9,8kN \\ \sum M_C^e &= V_B \cdot 5m + H_B \cdot 3m - 10kN \cdot 3m = 0 & H_B &= -6,333kN \end{aligned}$$

18

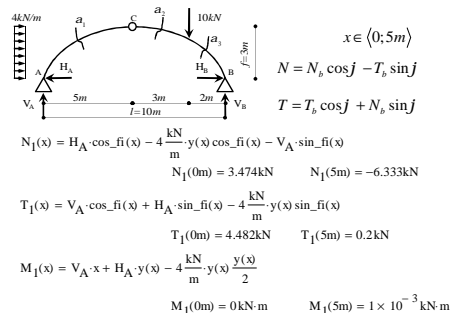
Przykład 1 – geometria łuku



$$\begin{aligned} \text{tg_fi}(x) &= \frac{4f}{l^2}(1-2x) \\ \cos_fi(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg_fi}(x)^2}} \\ \sin_fi(x) &= \frac{\text{tg_fi}(x)}{\sqrt{1+\text{tg_fi}(x)^2}} \\ \varphi(x) &= \text{atan}(\text{tg_fi}(x)) \\ y(x) &= -\frac{3}{25m}x^2 + \frac{6}{5}x \end{aligned}$$

19

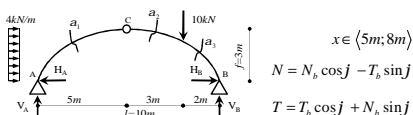
Przykład 1 – przekrój a₁



$$\begin{aligned} x &\in (0; 5m) \\ N &= N_b \cos j - T_b \sin j \\ T &= T_b \cos j + N_b \sin j \\ N_1(x) &= H_A \cdot \cos_fi(x) - 4 \frac{kN}{m} \cdot y(x) \cos_fi(x) - V_A \cdot \sin_fi(x) \\ N_1(0m) &= 3,474kN \quad N_1(5m) = -6,333kN \\ T_1(x) &= V_A \cdot \cos_fi(x) + H_A \cdot \sin_fi(x) - 4 \frac{kN}{m} \cdot y(x) \sin_fi(x) \\ T_1(0m) &= 4,482kN \quad T_1(5m) = 0,2kN \\ M_1(x) &= V_A \cdot x + H_A \cdot y(x) - 4 \frac{kN}{m} \cdot y(x) \cdot \frac{y(x)}{2} \\ M_1(0m) &= 0kN \cdot m \quad M_1(5m) = 1 \times 10^{-3}kN \cdot m \end{aligned}$$

20

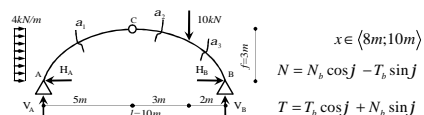
Przykład 1 – przekrój a₂



$$\begin{aligned} x &\in (5m; 8m) \\ N &= N_b \cos j - T_b \sin j \\ T &= T_b \cos j + N_b \sin j \\ N_2(x) &= H_A \cdot \cos_fi(x) - 4 \frac{kN}{m} \cdot f \cos_fi(x) - V_A \cdot \sin_fi(x) \\ N_2(5m) &= -6,333kN \quad N_2(8m) = -5,023kN \\ T_2(x) &= V_A \cdot \cos_fi(x) + H_A \cdot \sin_fi(x) - 4 \frac{kN}{m} \cdot f \sin_fi(x) \\ T_2(5m) &= 0,2kN \quad T_2(8m) = 3,863kN \\ M_2(x) &= V_A \cdot x + H_A \cdot y(x) - 4 \frac{kN}{m} \cdot f \left(y(x) - \frac{f}{2} \right) \\ M_2(5m) &= 1 \times 10^{-3}kN \cdot m \quad M_2(8m) = 7,441kN \cdot m \end{aligned}$$

21

Przykład 1 – przekrój a₃



$$\begin{aligned} x &\in (8m; 10m) \\ N &= N_b \cos j - T_b \sin j \\ T &= T_b \cos j + N_b \sin j \\ N_3(x) &= H_A \cdot \cos_fi(x) - 4 \frac{kN}{m} \cdot f \cos_fi(x) - V_A \cdot \sin_fi(x) + 10kN \cdot \sin_fi(x) \\ N_3(8m) &= -10,866kN \quad N_3(10m) = -11,583kN \\ T_3(x) &= V_A \cdot \cos_fi(x) - 10kN \cdot \cos_fi(x) + H_A \cdot \sin_fi(x) - 4 \frac{kN}{m} \cdot f \sin_fi(x) \\ T_3(8m) &= -4,253kN \quad T_3(10m) = -1,409kN \\ M_3(x) &= V_A \cdot x + H_A \cdot y(x) - 4 \frac{kN}{m} \cdot \left(y(x) - \frac{f}{2} \right) - 10kN \cdot (x - 8m) \\ M_3(8m) &= 7,441kN \cdot m \quad M_3(10m) = 0kN \cdot m \end{aligned}$$

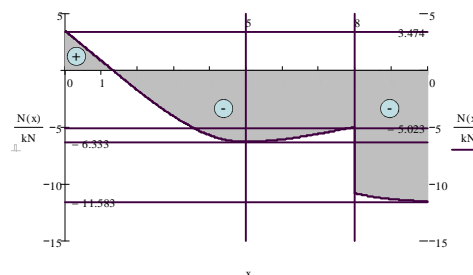
22

Przykład 1 – zestawienie wyników

x [m]	y [m]	tg fi(x)	cos fi(x)	sin fi(x)	j [rad]	j [deg]	N(x) [kN]	T(x) [kN]	M(x) [kNm]
0	0,000	1,200	0,640	0,768	0,876	50,194	3,474	4,482	0,000
0,5	0,570	1,080	0,679	0,734	0,924	47,203	2,154	2,621	2,680
1	1,080	0,960	0,721	0,693	0,765	43,831	0,833	1,077	3,988
1,5	1,530	0,840	0,766	0,643	0,699	40,030	-0,476	-0,138	4,289
2	1,920	0,720	0,812	0,584	0,624	35,754	-1,750	-1,014	3,908
2,5	2,250	0,600	0,857	0,514	0,540	30,964	-2,961	-1,543	3,126
3	2,520	0,480	0,902	0,433	0,448	25,641	-4,065	-1,729	2,180
3,5	2,730	0,360	0,941	0,339	0,346	19,799	-5,010	-1,591	1,265
4	2,880	0,240	0,972	0,233	0,236	13,496	-5,738	-1,171	0,532
4,5	2,970	0,120	0,993	0,119	0,119	6,843	-6,193	-0,542	0,089
5	3,000	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	-6,333	0,200	0,001
5,5	2,970	-0,120	0,993	-0,119	-0,119	-6,843	-6,264	0,953	0,291
6	2,880	-0,240	0,972	-0,233	-0,236	-13,496	-6,111	1,672	0,961
6,5	2,730	-0,360	0,941	-0,339	-0,346	-19,799	-5,891	2,333	2,011
7	2,520	-0,480	0,902	-0,433	-0,448	-25,641	-5,623	2,921	3,441
7,5	2,250	-0,600	0,857	-0,514	-0,540	-30,964	-5,328	3,430	5,251
8-L	1,920	-0,720	0,812	-0,584	-0,624	-35,754	-5,023	3,863	7,441
8-P	1,920	-0,720	0,812	-0,584	-0,624	-35,754	-10,866	-4,253	7,441
8,5	1,530	-0,840	0,766	-0,643	-0,699	-40,030	-11,152	-3,431	5,011
9	1,080	-0,960	0,721	-0,693	-0,765	-43,831	-11,355	-2,684	2,960
9,5	0,570	-1,080	0,679	-0,734	-0,824	-47,203	-11,494	-2,011	1,290
10	0,000	-1,200	0,640	-0,768	-0,876	-50,194	-11,583	-1,409	0,000

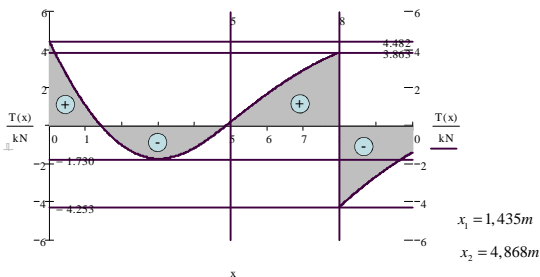
23

Przykład 1 – siły normalne



24

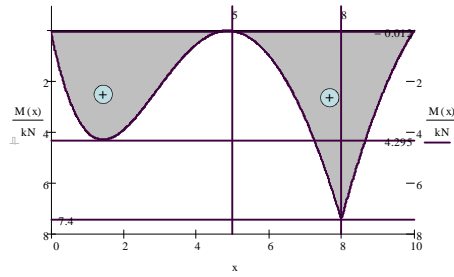
Przykład 1 – siły tnące, miejsca zerowe



$$T_1(x) = \frac{dM_1(x)}{dx} = -0.115 \frac{kN}{m^3} x^3 + 1.73 \frac{kN}{m^2} x^2 - 7.12 \frac{kN}{m} x + 7 kN = 0$$

25

Przykład 1 – momenty zginające, ekstrema

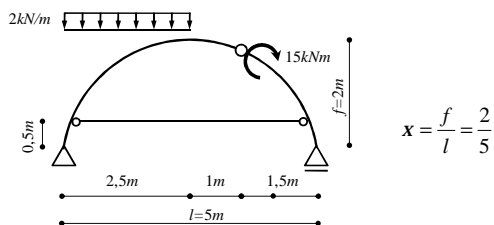


$$M_1(x_1) = 4.295 kNm \quad M_1(x_2) = -0.012 m$$

26

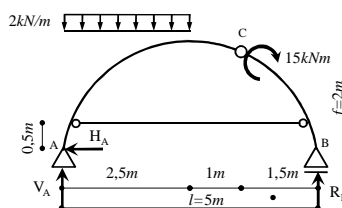
Przykład 2

- n Wyznaczyć siły wewnętrzne w trójprzegubowym łuku kołowym ze ściągami:



27

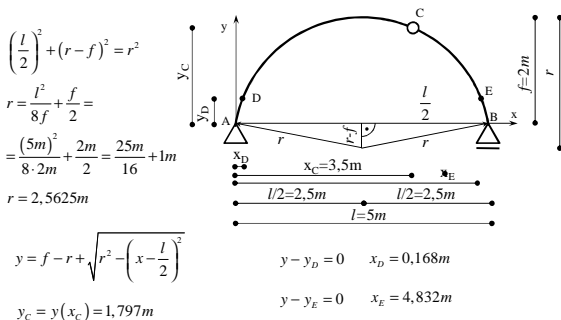
Przykład 2 – reakcje podporowe



$$\begin{aligned} \sum X &= -H_A = 0 & H_A &= 0 kN \\ \sum Y &= V_A + R_B - 2 \frac{kN}{m} \cdot 2.5 m = 0 & V_A &= 0.75 kN \\ \sum M_A &= R_B \cdot 5 m - 15 kNm - 2 \frac{kN}{m} \cdot 2.5 m \cdot \frac{2.5 m}{2} = 0 & R_B &= 4.25 kN \end{aligned}$$

28

Przykład 2 – Równanie łuku

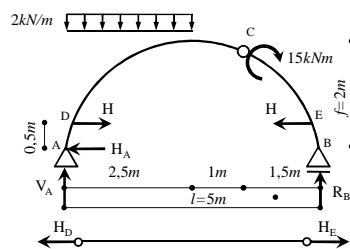


$$\begin{aligned} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (r-f)^2 &= r^2 \\ r &= \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} = \\ &= \frac{(5m)^2}{8 \cdot 2m} + \frac{2m}{2} = \frac{25m}{16} + 1m \\ r &= 2.5625m \\ y &= f - r + \sqrt{r^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2} \\ y_C &= y(x_C) = 1.797m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - y_D &= 0 & x_D &= 0.168m \\ y - y_E &= 0 & x_E &= 4.832m \end{aligned}$$

29

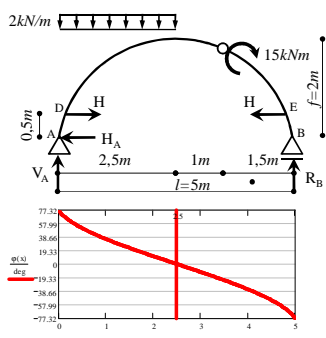
Przykład 2 – siła w ściąg



$$\begin{aligned} \sum X &= -H_D + H_E = 0 & H_D &= H_E = H \\ \sum M_C^e &= 15 kNm - R_B \cdot 1.5 m + H \cdot (y_C - 0.5 m) = 0 & H &= -6.651 kN \end{aligned}$$

30

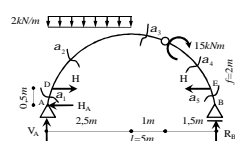
Przykład 2 – geometria łuku



$$\begin{aligned} \text{tg_fi}(x) &= \frac{1-2x}{2\sqrt{r^2 - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}} \\ \cos_fi(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg_fi}(x)^2}} \\ \sin_fi(x) &= \frac{\text{tg_fi}(x)}{\sqrt{1 + \text{tg_fi}(x)^2}} \\ \varphi(x) &= \text{atan}(\text{tg_fi}(x)) \end{aligned}$$

31

Przykład 2 – przekrój a1

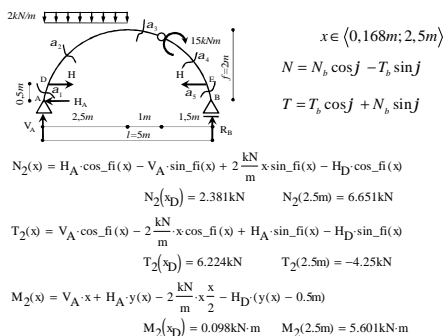


$$\begin{aligned} x &\in \langle 0; 0.168m \rangle \\ N &= N_b \cos j - T_b \sin j \\ T &= T_b \cos j + N_b \sin j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1(x) &= H_A \cdot \cos_fi(x) - V_A \cdot \sin_fi(x) + 2 \frac{kN}{m} x \sin_fi(x) \\ N_1(0) &= -0.732 kN & N_1(x_D) &= -0.376 kN \\ T_1(x) &= V_A \cdot \cos_fi(x) - 2 \frac{kN}{m} x \cos_fi(x) + H_A \cdot \sin_fi(x) \\ T_1(0) &= 0.165 kN & T_1(x_D) &= 0.172 kN \\ M_1(x) &= V_A \cdot x + H_A \cdot y(x) - 2 \frac{kN}{m} x \cdot \frac{x}{2} \\ M_1(0) &= 0 kN \cdot m & M_1(x_D) &= 0.098 kN \cdot m \end{aligned}$$

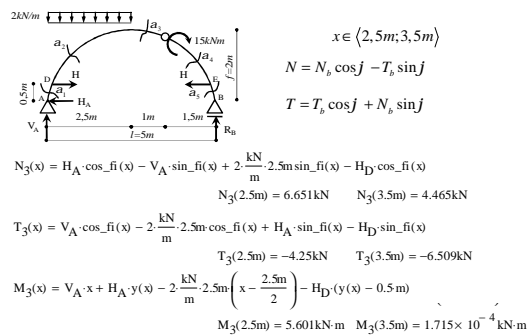
32

Przykład 2 – przekrój a₂



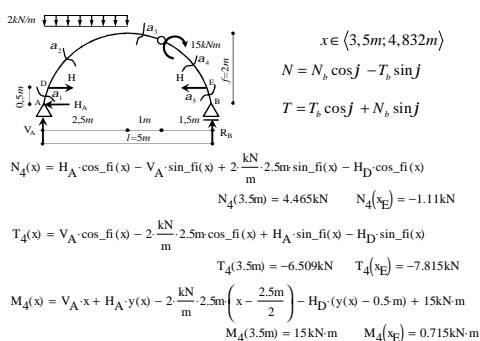
33

Przykład 2 – przekrój a₃



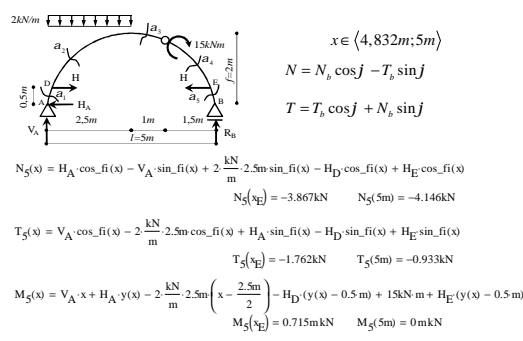
34

Przykład 2 – przekrój a₄



35

Przykład 2 – przekrój a₅



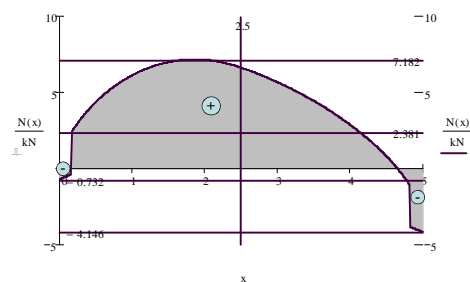
36

Przykład 2 – zestawienie wyników

x [m]	y [m]	cos _{fi} (x)	sin _{fi} (x)	cos _{fi} (x)	sin _{fi} (x)	N [kN]	T [kN]	M [kNm]
0	0.000	4.444	0.220	0.976	1.349	77.320	-0.732	0.165
0.168-L	0.500	2.196	0.415	0.910	1.143	65.512	-0.376	0.172
0.168-P	0.500	2.196	0.415	0.910	1.143	65.512	2.381	6.224
0.25	0.684	1.835	0.479	0.878	1.072	61.408	2.983	5.960
0.5	1.040	1.248	0.626	0.760	0.896	51.305	4.933	5.035
0.75	1.309	0.935	0.730	0.683	0.752	43.073	5.371	3.994
1	1.515	0.722	0.811	0.585	0.625	36.829	6.124	2.880
1.25	1.674	0.559	0.873	0.488	0.510	29.196	6.660	1.717
1.5	1.797	0.424	0.921	0.390	0.401	22.970	7.002	0.524
1.75	1.888	0.306	0.956	0.293	0.297	17.019	7.165	-0.683
2	1.951	0.199	0.981	0.195	0.196	11.252	7.157	-1.890
2.25	1.988	0.098	0.995	0.098	0.098	5.599	6.985	-3.083
2.5	2.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	6.651	-4.250
2.75	1.988	-0.098	0.995	-0.098	-0.098	-5.599	6.205	-4.879
3	1.951	-0.199	0.981	-0.195	-0.196	-11.252	5.694	-5.466
3.25	1.888	-0.306	0.956	-0.293	-0.297	-17.019	5.116	-6.011
3.5-L	1.797	-0.424	0.921	-0.390	-0.401	-22.970	4.465	-6.509
3.5-P	1.797	-0.424	0.921	-0.390	-0.401	-22.970	4.465	-6.509
3.75	1.674	-0.559	0.873	-0.488	-0.510	-29.196	3.733	-6.954
4	1.515	-0.722	0.811	-0.585	-0.625	-36.829	2.905	-7.339
4.25	1.309	-0.935	0.730	-0.683	-0.752	-43.073	1.956	-7.607
4.5	1.040	-1.248	0.625	-0.780	-0.895	-51.305	0.841	-7.848
4.75	0.684	-1.835	0.479	-0.878	-1.072	-61.408	-0.549	-7.874
4.832-L	0.500	-2.196	0.415	-0.910	-1.143	-65.512	-1.110	-7.815
4.832-P	0.500	-2.196	0.415	-0.910	-1.143	-65.512	-3.867	-7.762
5	0.000	-4.444	0.220	-0.976	-1.349	-77.320	-4.146	-0.933

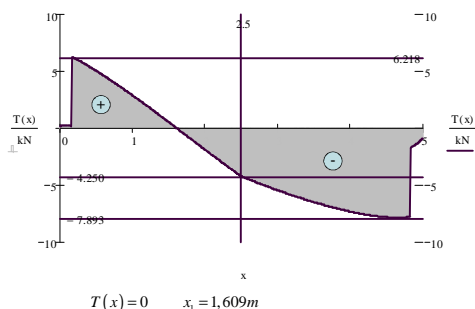
37

Przykład 2 – siły normalne



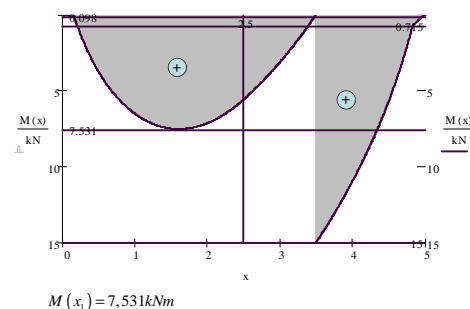
38

Przykład 2 – siły tnące, miejsce zerowe



39

Przykład 2 – momenty zginające, ekstremum



40

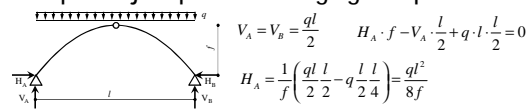
Racjonalna oś łuku ⁽¹⁾

- Osł łuku, która umoŹliwia uzyskanie minimalnych wymiarów przekroju poprzecznego pręta łuku przy zadanym obciążeniu nazywana jest **racjonalną osią łuku**.
- Warunek jest spełniony w przypadku osiowego stanu obciążenia, tj. $M=0$ we wszystkich punktach łuku.

41

Racjonalna oś łuku ⁽²⁾

- Osia racjonalną łuku trójprzegubowego obciążonego równomiernie na całej długości w pionie jest parabola drugiego stopnia.



$$V_A = V_B = \frac{ql}{2} \quad H_A \cdot f - V_A \cdot \frac{l}{2} + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$H_A = \frac{1}{f} \left(\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{ql^2}{8f}$$

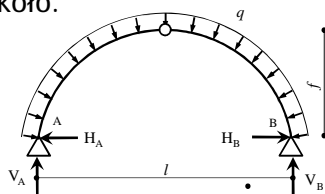
$$M = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - H_A \cdot y = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{8f} \cdot y = 0$$

$$\frac{q}{2} \left(l \cdot x - x^2 - \frac{l^2}{4f} \cdot y \right) = 0 \quad l \cdot x - x^2 - \frac{l^2}{4f} \cdot y = 0 \quad y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

42

Racjonalna oś łuku ⁽³⁾

- Osia racjonalną łuku obciążonego równomiernie na całej długości w kierunku prostopadłym do osi łuku jest koło.



43