

Mechanika teoretyczna

Wykład nr 5-6

Układy przestrzenne.

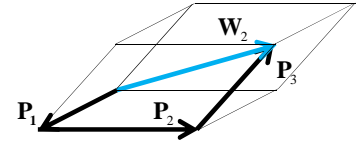
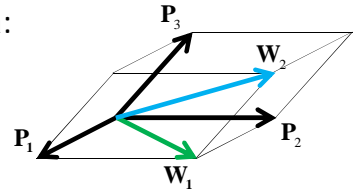
Wypadkowa przestrzennego układu sił zbieżnych

n Metoda graficzna:

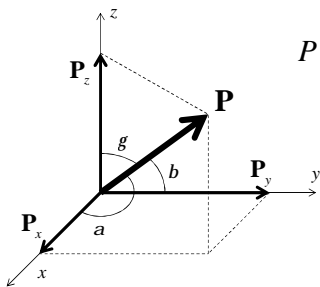
$$W_1 = P_1 + P_2$$

$$W_2 = W_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3$$

$$W = \sum_{i=1}^n P_i$$



Analityczna metoda wyznaczania wypadkowej



$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

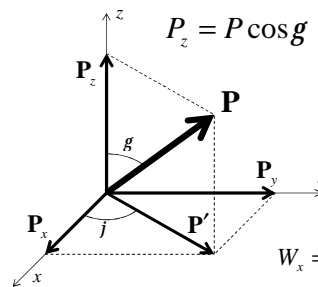
$$\cos a = \frac{P_x}{P} = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos b = \frac{P_y}{P} = \frac{P_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos g = \frac{P_z}{P} = \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}}$$

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 1$$

Analityczna metoda wyznaczania wypadkowej



$$P_z = P \cos g \quad P' = P \sin g$$

$$P_x = P' \cos j = P \sin g \cos j$$

$$P_y = P' \sin j = P \sin g \sin j$$

$$W = \sum_{i=1}^n P_i$$

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} \quad W_z = \sum_{i=1}^n P_{iz}$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \quad \cos a = \frac{W_x}{W} \quad \cos b = \frac{W_y}{W} \quad \cos g = \frac{W_z}{W}$$

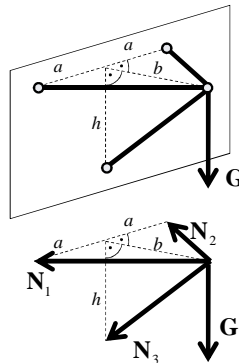
Warunki równowagi przestrzennego układu zbieżnego

$$W = \sum_{i=1}^n P_i = 0$$

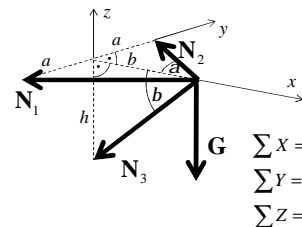
$$W_x = 0 \quad \sum_{i=1}^n P_{ix} = \sum X = 0$$

$$W_y = 0 \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = \sum Y = 0$$

$$W_z = 0 \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = \sum Z = 0$$



Układ zbieżny - przykład



$$\sin a = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \cos a = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin b = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \quad \cos b = \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad N_1 \cos a + N_2 \cos a + N_3 \cos b = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad -N_1 \sin a + N_2 \sin a = 0 \\ \sum Z = 0 & \quad N_3 \sin b + G = 0 \end{aligned}$$

$$N_3 = -\frac{G}{\sin b} = -\frac{G}{h} \sqrt{h^2 + b^2}$$

$$N_1 = N_2$$

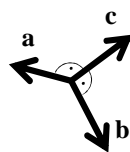
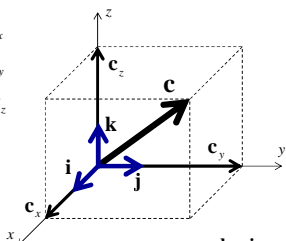
$$N_2 = \frac{G}{2h} \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$2N_1 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{G}{h} \sqrt{h^2 + b^2} \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} = 0$$

$$N_1 = \frac{G}{2h} \sqrt{a^2 + b^2}$$

Iloczyn wektorowy

$$\begin{aligned} c_x &= i \cdot c_x \\ c_y &= j \cdot c_y \\ c_z &= k \cdot c_z \end{aligned}$$

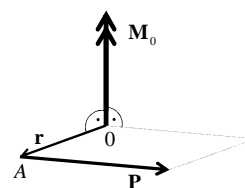


$$c = a \times b = i \cdot c_x + j \cdot c_y + k \cdot c_z =$$

$$= i \cdot (a_y b_z - a_z b_y) + j \cdot (a_z b_x - a_x b_z) + k \cdot (a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Moment siły względem punktu



$$M_0 = r \times P = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$$0(0,0,0) \quad A(x, y, z)$$

$$r_x = x \quad r_y = y \quad r_z = z$$

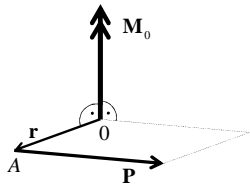
$$M_0 = r \times P = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$$M_{0x} = P_z \cdot y - P_y \cdot z$$

$$M_{0y} = P_x \cdot z - P_z \cdot x$$

$$M_{0z} = P_y \cdot x - P_x \cdot y$$

Moment siły względem punktu



$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$$O(x_0, y_0, z_0) \quad A(x, y, z)$$

$$r_x = x - x_0 \quad r_y = y - y_0 \quad r_z = z - z_0$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} M_{0x} &= P_z \cdot (y - y_0) - P_y \cdot (z - z_0) \\ M_{0y} &= P_x \cdot (z - z_0) - P_z \cdot (x - x_0) \\ M_{0z} &= P_y \cdot (x - x_0) - P_x \cdot (y - y_0) \end{aligned}$$

9

Moment wypadkowej względem punktu

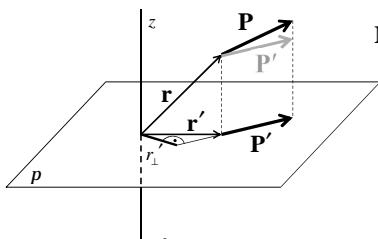
$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{W} = \mathbf{r} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r} \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0}$$

- n Moment wypadkowej układu sił względem punktu równy jest sumie momentów od sił składowych tego układu względem tego punktu.

10

Moment siły względem osi



$$\mathbf{M}_z = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{r}' \times \mathbf{P}'$$

$$M_z = P' \cdot r'_\perp$$

- n Moment siły względem osi równy jest momentowi rzutu siły na płaszczyznę prostopadłą do osi względem punktu, w którym oś przebija płaszczyznę.

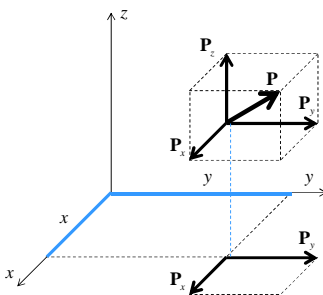
11

Moment siły względem osi

- n Moment siły względem osi jest równy jest równy 0, gdy:
 - Rzut \mathbf{P}' na płaszczyznę P prostopadłą do osi z jest równy 0 (siła równoległa do osi);
 - Długość ramienia r'_\perp jest równa 0 (linia działania siły przecina oś).
- n Moment siły względem osi równy jest rzutowi na oś momentu siły względem dowolnego punktu leżącego na osi.

12

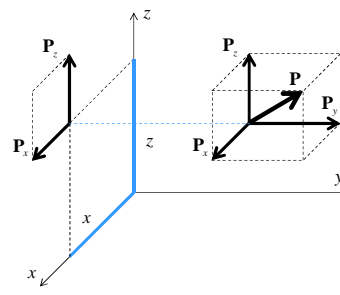
Moment siły względem osi układu współrzędnych



$$M_z = -P_x \cdot y + P_y \cdot x$$

13

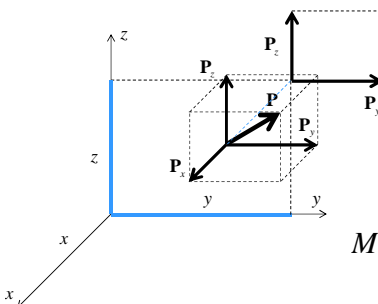
Moment siły względem osi układu współrzędnych



$$M_y = -P_z \cdot x + P_x \cdot z$$

14

Moment siły względem osi układu współrzędnych



$$M_x = -P_y \cdot z + P_z \cdot y$$

15

Dowolny przestrzenny układ sił

- n Dowolny przestrzenny układ sił można zastąpić siłą wypadkową przyłożoną do dowolnego bieguna redukcji 0 i parą sił o momencie równym sumie momentów od sił składowych względem tego bieguna redukcji.

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad - \text{wektor główny}$$

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0} \quad - \text{moment główny}$$

16

Dowolny przestrzenny układ sił

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad \cos a = \frac{W_x}{W}$$

$$W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} \quad \cos b = \frac{W_y}{W} \quad W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$$

$$W_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} \quad \cos g = \frac{W_z}{W}$$

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_{ix} = \sum_{i=1}^n (P_{iz} \cdot (y_i - y_0) - P_{iy} \cdot (z_i - z_0))$$

$$M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_{iy} = \sum_{i=1}^n (P_{ix} \cdot (z_i - z_0) - P_{iz} \cdot (x_i - x_0))$$

$$M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (P_{iy} \cdot (x_i - x_0) - P_{ix} \cdot (y_i - y_0))$$

17

Redukcja do początku układu współrzędnych

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad \cos a = \frac{W_x}{W}$$

$$W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} \quad \cos b = \frac{W_y}{W} \quad W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$$

$$W_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} \quad \cos g = \frac{W_z}{W}$$

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_{ix} = \sum_{i=1}^n (P_{iz} \cdot y_i - P_{iy} \cdot z_i)$$

$$M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_{iy} = \sum_{i=1}^n (P_{ix} \cdot z_i - P_{iz} \cdot x_i)$$

$$M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum_{i=1}^n (P_{iy} \cdot x_i - P_{ix} \cdot y_i)$$

18

Warunki równowagi dowolnego przestrzennego układu sił

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \sum_{i=1}^n P_{ix} = \sum X = 0 \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{0} \quad \sum_{i=1}^n M_{ix} = \sum M_x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = \sum Y = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = \sum M_y = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = \sum Z = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = \sum M_z = 0$$

19

Układy prętowe

n Kratownice przestrzenne

n Ruszty

- O węzłach przegubowych

- O węzłach sztywnych

n Ramy przestrzenne

- Na siatce prostopadłościanu

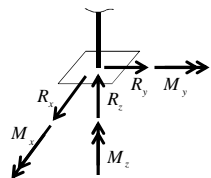
- Z prętami ukośnymi

n Pręty zakrzywione w przestrzeni

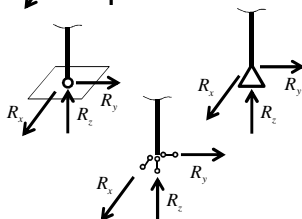
n Układy prętów różnego typu

20

Podpory



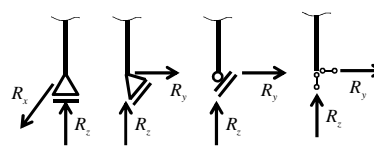
n Sztywne zamocowanie – 6 reakcji (3 siły, 3 momenty)



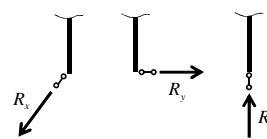
n Podpora przegubowa nieprzesuwana – 3 reakcje (3 siły)

21

Podpory



n Podpora przegubowa przesuwna wzdłuż prostej – 2 reakcje (2 siły)



n Podpora przegubowa przesuwna po płaszczyźnie – 1 reakcja (1 siła)

22

Przeguby

n Przegub Cardana (możliwe zginanie, brak możliwości skręcania – wzajemnego obrotu prętów względem osi)

n Przegub walcowy (możliwe tylko zginanie w jednym kierunku)

n Przegub kulisty (całkowita swoboda wzajemnego obrotu)

23

Siły wewnętrzne

n Wypadkowa siła i wypadkowy moment wzajemnego oddziaływania

n Wypadkowa siła:

- Siła normalna (osiowa)

- Dwie składowe siły tnącej (poprzecznej)

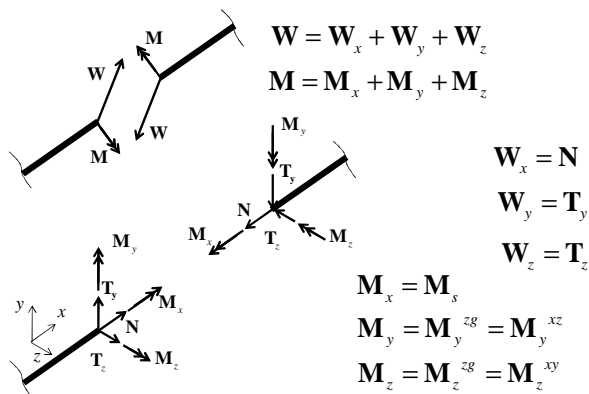
n Wypadkowy moment:

- Moment skręcający

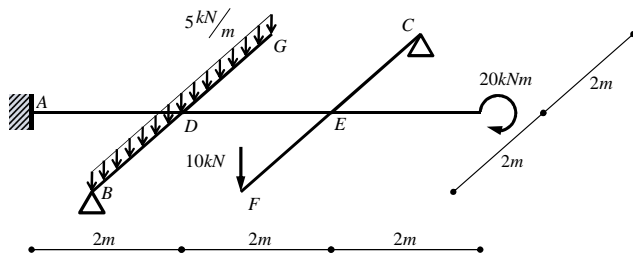
- Dwie składowe momentu zginającego

24

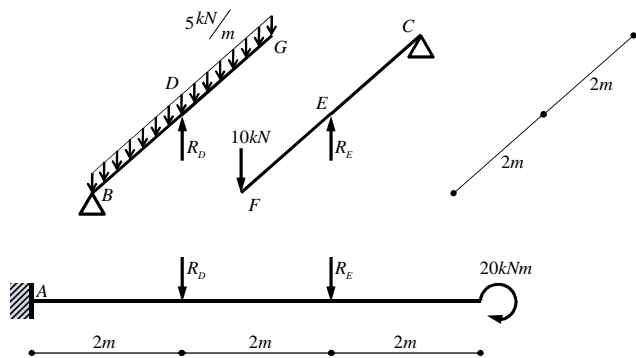
Siły wewnętrzne



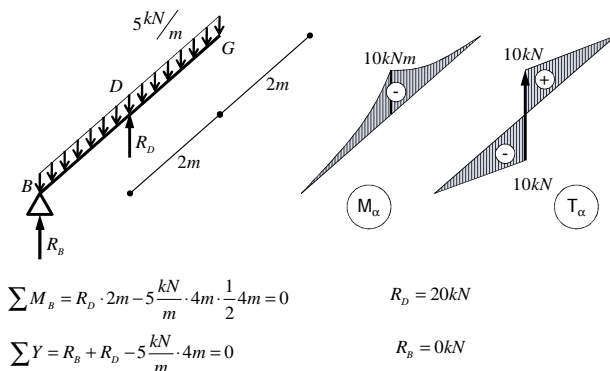
Przykład – ruszt o węzłach przegubowych



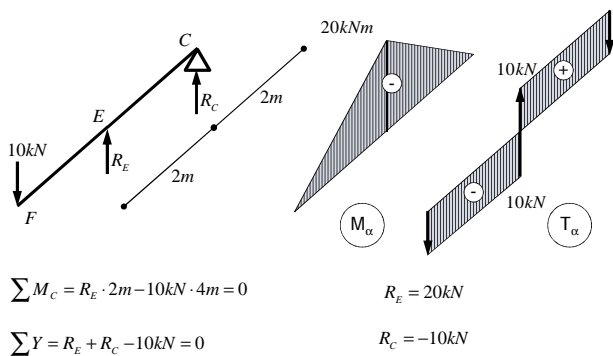
Przykład 1 – ruszt o węzłach przegubowych



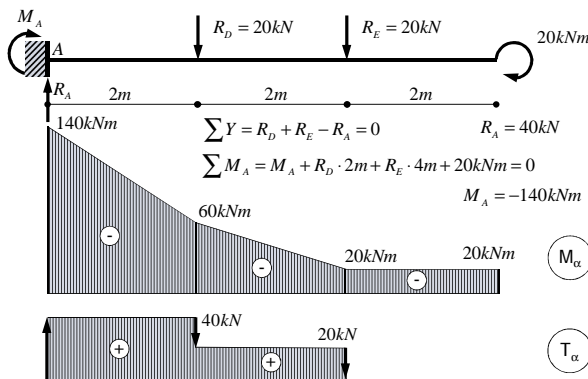
Belka B-D-G



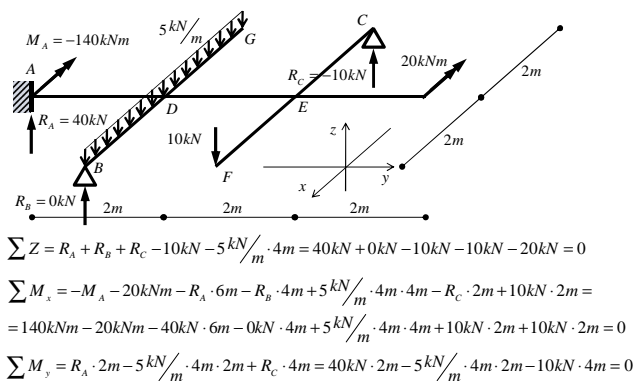
Belka C-E-F



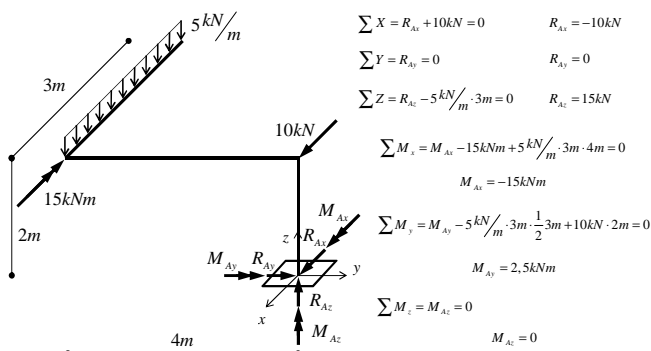
Belka C-E-F



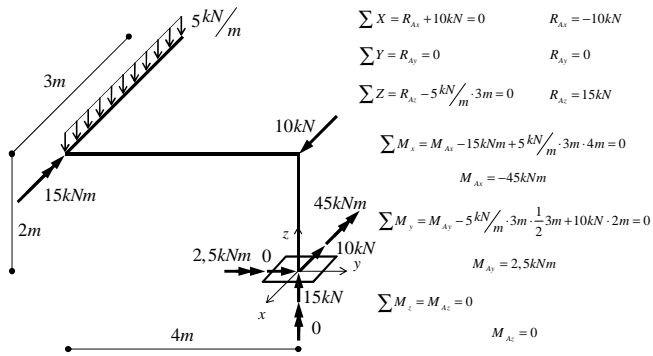
Sprawdzenie reakcji



Przykład 2 – rama przestrzenna wspornikowa

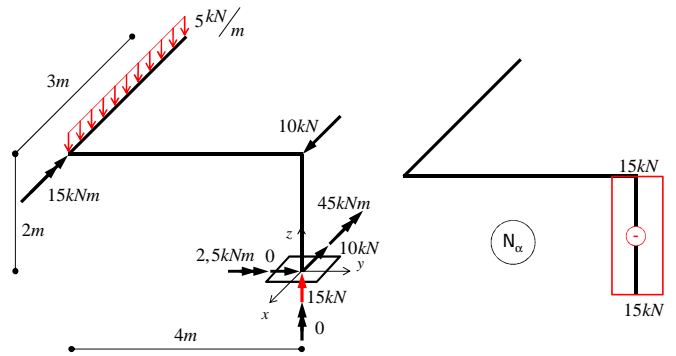


Przykład 2 – rama przestrzenna wspornikowa



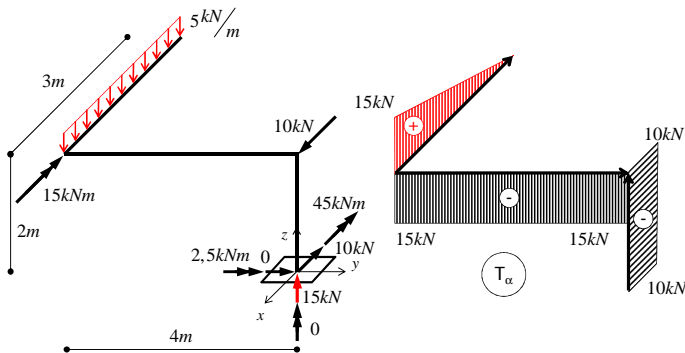
33

Siły normalne



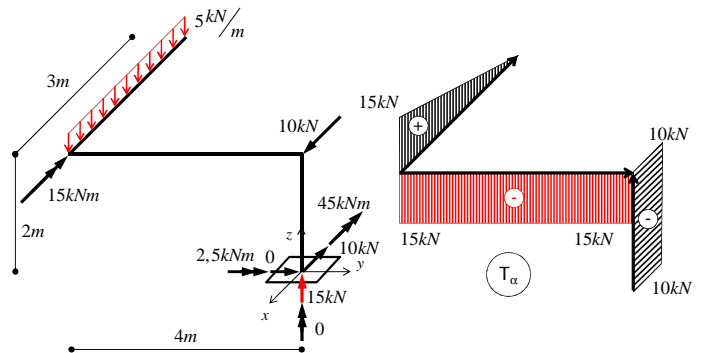
34

Siły tnące



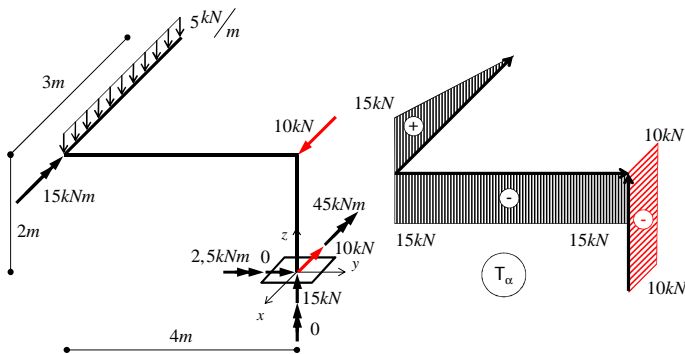
35

Siły tnące



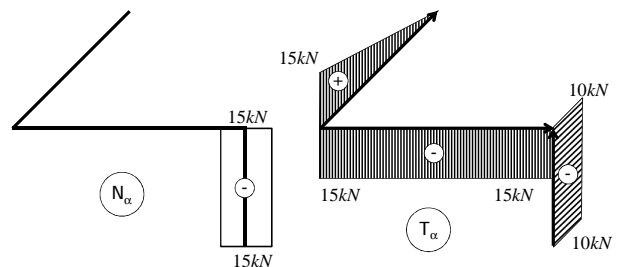
36

Siły tnące



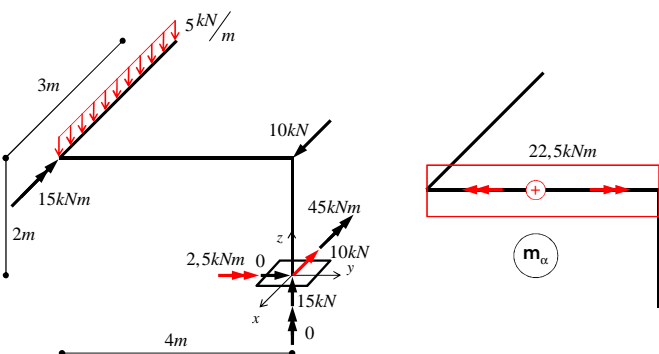
37

Siły normalne i tnące



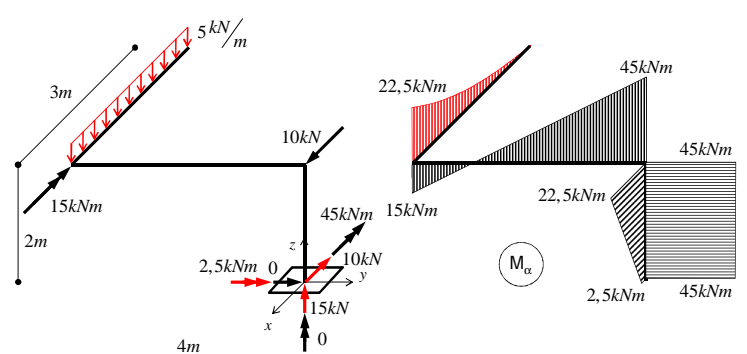
38

Momenty skręcające



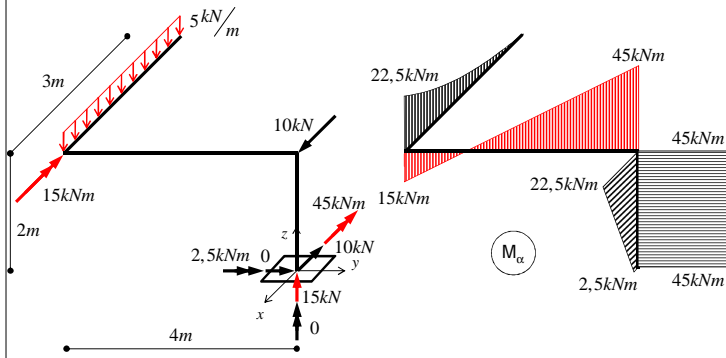
39

Momenty zginające



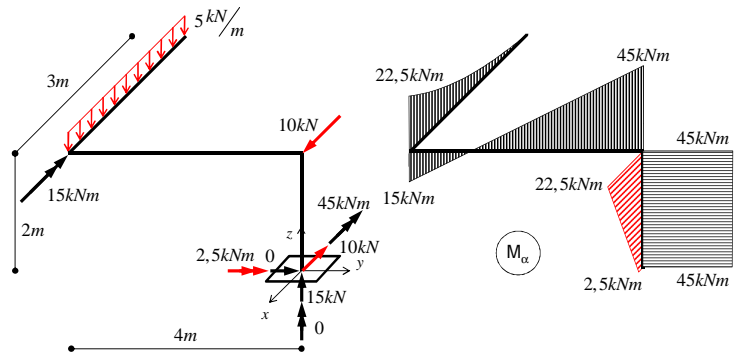
40

Momenty zginające



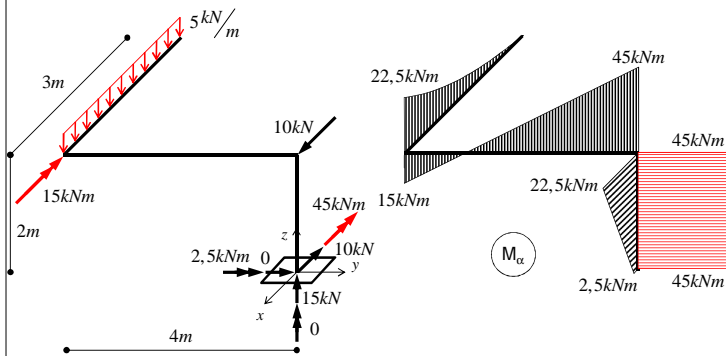
41

Momenty zginające



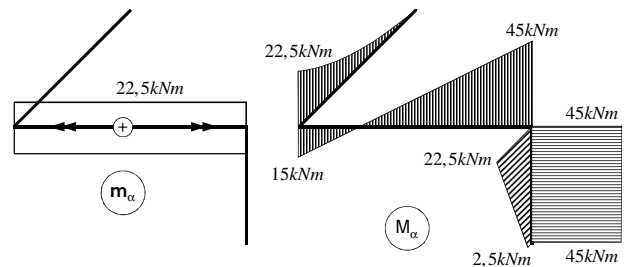
42

Momenty zginające



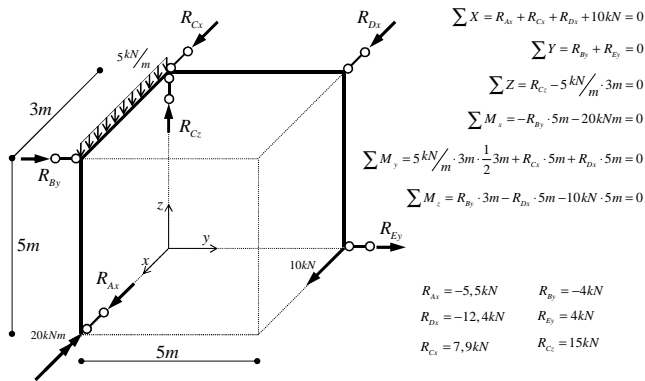
43

Momenty skręcające i zginające



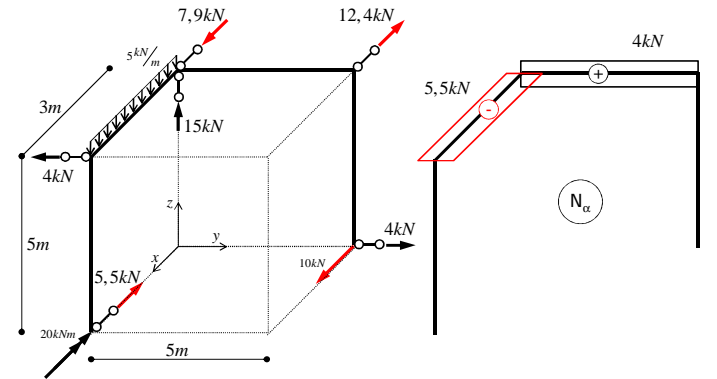
44

Przykład 3 – rama przestrzenna



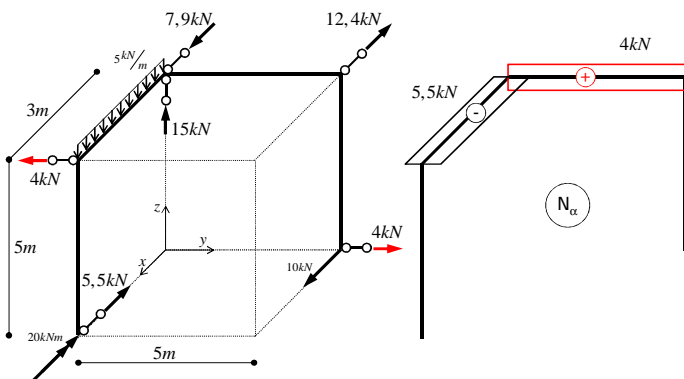
45

Siły normalne



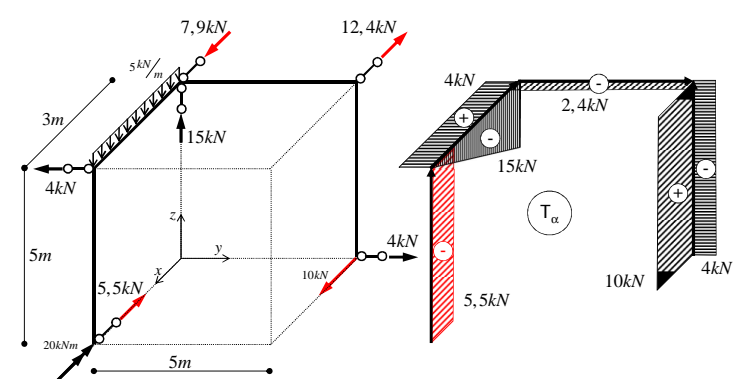
46

Siły normalne



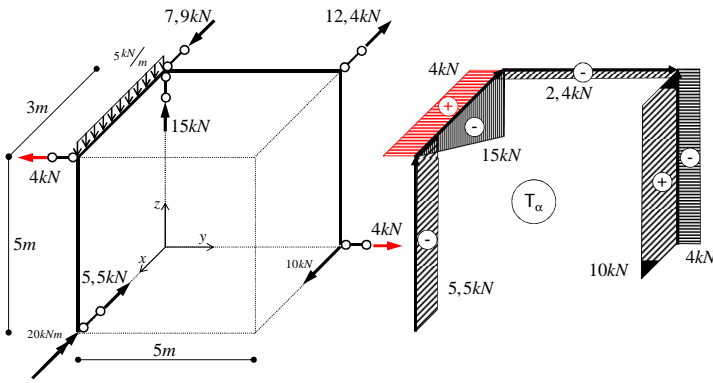
47

Siły tnące



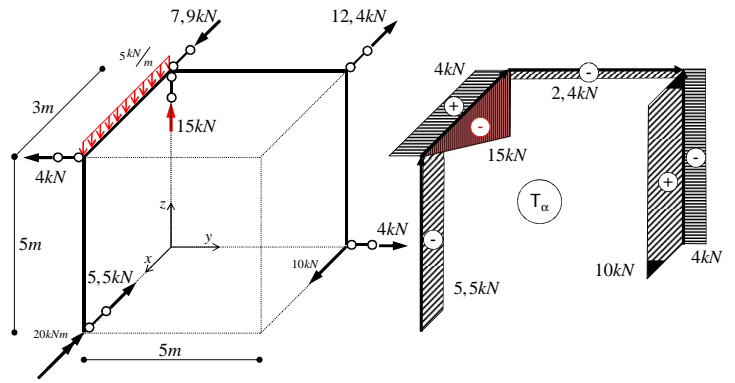
48

Siły tnące



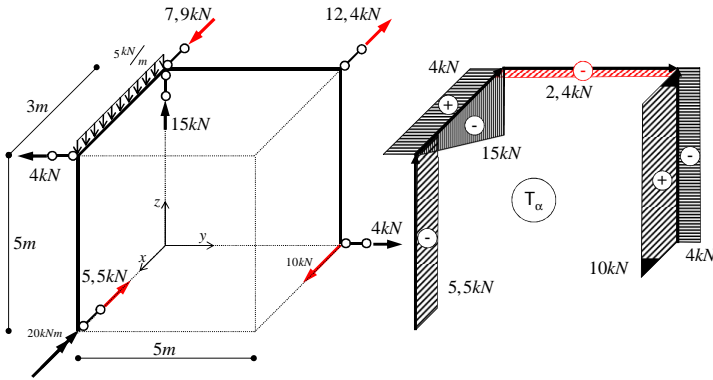
49

Siły tnące



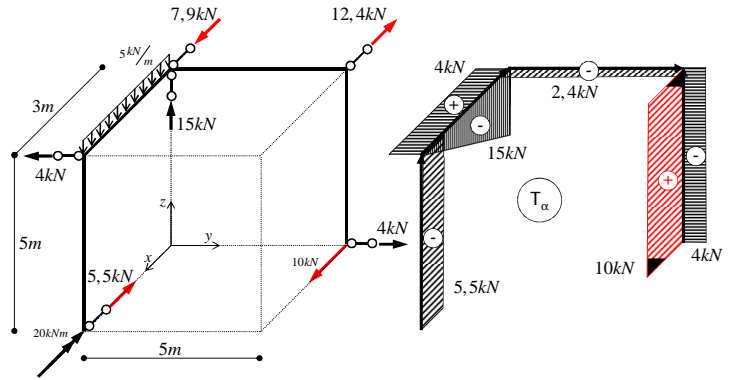
50

Siły tnące



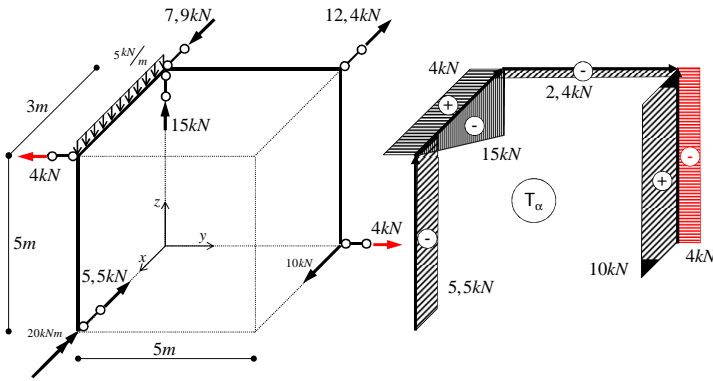
51

Siły tnące



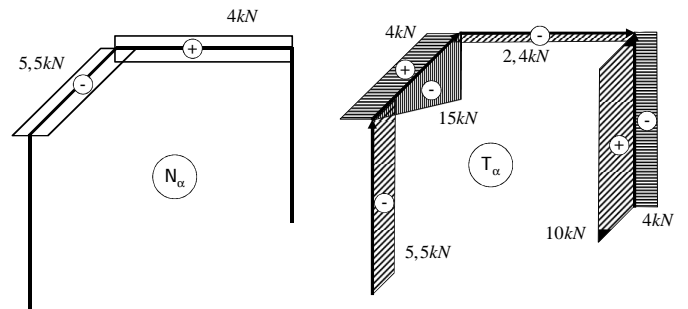
52

Siły tnące



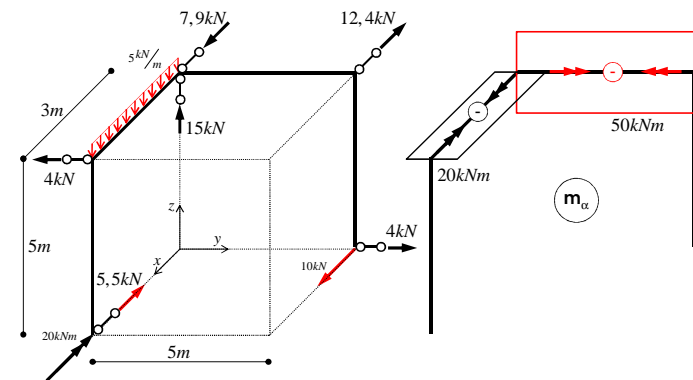
53

Siły normalne i tnące



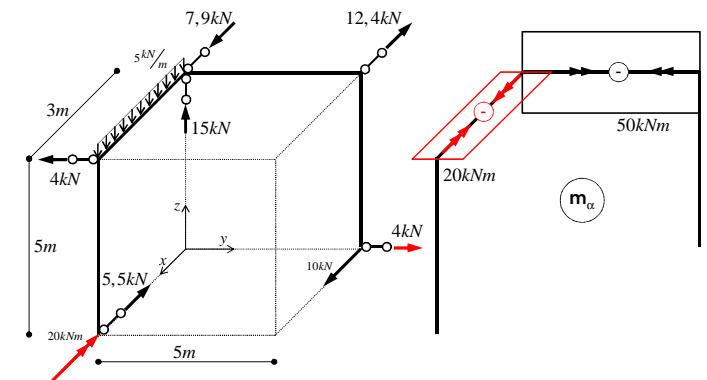
54

Momenty skręcające



55

Momenty skręcające



56

Momenty skręcające i zginające

