# Mechanika ogólna

Wykład nr 7

**Elementy kinematyki**



## Kinematyka

- Dział **mechaniki** zajmujący się matematycznym opisem układów mechanicznych oraz badaniem geometrycznych właściwości ich ruchu, bez wnikania w związek między ruchem, a siłami go powodującymi.
- **Ruch** ciała – zmiana położenia w przestrzeni, względem innego ciała (układu odniesienia), które traktujemy jako nieruchome.



## Podstawowe pojęcia

- Przestrzeń i czas;
  - Współrzędne;
  - Tor ruchu;
- Ruch postępowy:
  - Prędkość;
  - Przyspieszenie;
- Ruch obrotowy:
  - Prędkość kątowa;
  - Przyspieszenie kątowe.



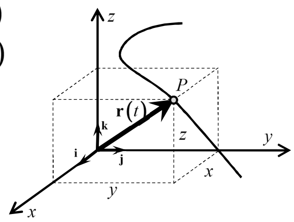
## Równania ruchu punktu materialnego

- Wektor wodzący poruszającego się punktu: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$
- Funkcje skalarne opisujące ruch punktu:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

- Wektorowe równanie ruchu:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$$

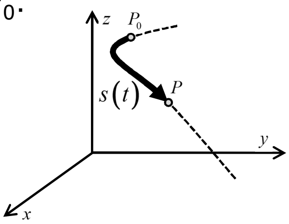





## Równanie ruchu po torze (równanie drogi)

- Równanie opisujące ruch punktu P, gdy znany jest tor ruchu względem nieruchomego położenia początkowego $P_0$:

$$s = s(t)$$

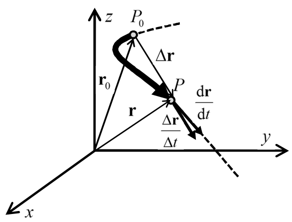





## Prędkość punktu

- Prędkością punktu nazywamy pochodną względem czasu wektora wodzącego tego punktu:

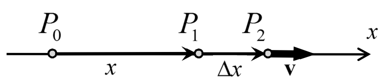
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}$$






## Prędkość w ruchu prostoliniowym

- W ruchu jednostajnym: $v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|$
- W dowolnym ruchu prostoliniowym:
  - Prędkość średnia: $v_{sr} = \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|$
  - Prędkość chwilowa: $v = |\mathbf{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

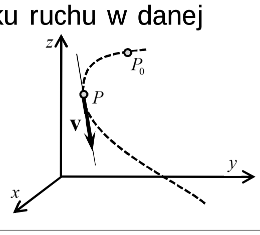





## Prędkość w ruchu krzywoliniowym (1)

- Prędkość punktu:
  - Wektor o module równym wartości bezwzględnej pochodnej drogi po czasie, skierowany wzdłuż stycznej do toru ruchu i o zwrocie w kierunku ruchu w danej chwili.

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$



## Prędkość w ruchu krzywoliniowym (2)

- Składowe prędkości w układzie współrzędnych równe są pochodnym po czasie odpowiednich współrzędnych:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \qquad v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} \qquad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z}$$

- Moduł prędkości (wartość liczbowa):

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

- Rzut prędkości punktu na oś układu współrzędnych równy jest prędkości z jaką porusza się rzut punktu wzdłuż osi.



## Prędkość w ruchu krzywoliniowym (3)

- W układzie współrzędnych prostokątnych rzuty prędkości punktu są prędkościami rzutów wektora wodzącego $\mathbf{r}$.
- Prędkość punktu równa jest pochodnej geometrycznej względem czasu promienia wodzącego tego punktu:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \mathbf{t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$



## Przyspieszenie punktu

- Pochodna prędkości względem czasu:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}$$

- Składowe w układzie kartezjańskim można wyrazić jako drugie pochodne współrzędnych: $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y} \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{z}$$

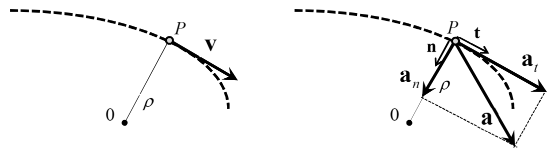
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$



## Przyspieszenie w układzie naturalnym (związanym z torem ruchu)

- Całkowite przyspieszenie punktu jest równe sumie składowych – stycznej i normalnej do toru ruchu:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$





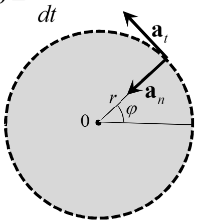

## Składowe przyspieszenia w ruchu po torze kołowym

- Promień krzywizny i droga: $\rho = r \qquad s = r\varphi$
- Prędkość w zależności od prędkości kątowej: $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = \omega r \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$
- Składowe przyspieszenia:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

- Przyspieszenie kątowe:

$$a_t = r\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$






## Szczególne przypadki ruchu

- Ruch jednostajnie przyspieszony prostoliniowy;
- Ruch harmoniczny;
- Ruch krzywoliniowy ze stałym przyspieszeniem.



## Ruch jednostajnie przyspieszony prostoliniowy

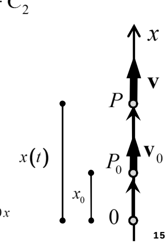
- Ruch po prostej ze stałym co do wartości i kierunku przyspieszeniem: $a_x = \ddot{x} = a = const$
- Prędkość: $v_x = \dot{x} = at + C_1$
- Położenie punktu: $x = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2$
- Warunki brzegowe:

$$x(t=0) = x_0 \quad v_x(t=0) = v_{0x}$$

- Stałe całkowania: $C_1 = v_{0x} \quad C_2 = x_0$
- Równanie ruchu:

$$x = \frac{at^2}{2} + v_{0x}t + x_0$$

- Równanie prędkości: $v(t) = at + v_{0x}$






## Ruch harmoniczny

- Punkt $P$ poruszający się jednostajnie po okręgu o promieniu $r$:

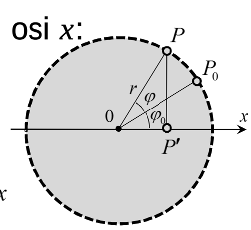
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \varphi = \omega t$$

- Ruch rzutu punktu $P$ po osi $x$:

$$x = r\cos(\varphi + \varphi_0) = r\cos(\omega t + \varphi_0)$$

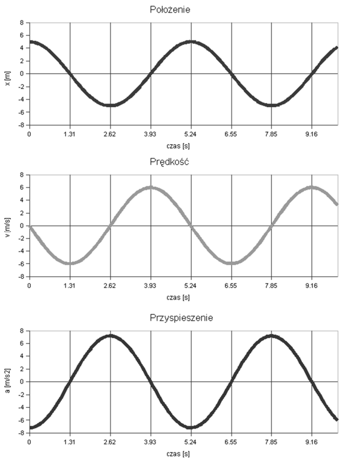
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -r\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$



# Ruch harmoniczny

- Wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia:





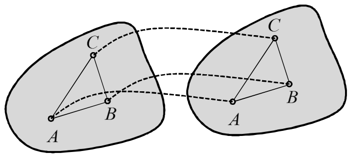

# Ruch ciała sztywnego

- **Ciało sztywne** – układ punktów materialnych, których wzajemne odległości pozostają niezmienne.
- Ruch postępowy;
- Ruch obrotowy;
- Złożenie ruchów:
  - Ruch płaski;
  - Ruch kulisty.



# Ruch postępowy ciała sztywnego

- W ruchu **postępowym** prędkości i przyspieszenia wszystkich punktów ciała są jednakowe. Punkty ciała poruszają się po jednakowych równolegle przesuniętych torach.



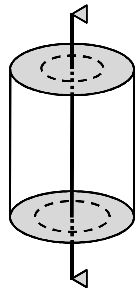

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C$$

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C$$



# Ruch obrotowy ciała sztywnego

- Ruch **obrotowy** wokół nieruchomej osi obrotu (środka obrotu w ruchu płaskim).
- Torami punktów ciała są okręgi w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu i środkach leżących na tej osi.



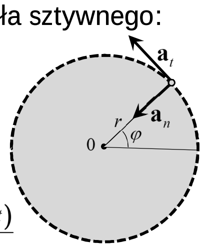


# Ruch obrotowy ciała sztywnego

- Równanie ruchu obrotowego ciała sztywnego:

$$s = r\,\varphi(t)$$

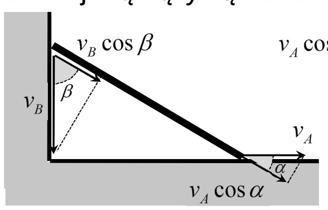
- Prędkość liniowa: $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\dfrac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = r\,\omega(t)$
- Prędkość kątowa: $\omega(t) = \dfrac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$
- Przyspieszenie kątowe: $\varepsilon(t) = \dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2}$
- Składowe przyspieszenia liniowego: $a_t = r\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = r\varepsilon \qquad a_n = \omega^2 r$






# Ruch płaski

- Ruch ciała sztywnego w płaszczyźnie.
- Zależność prędkości w ruchu płaskim:
  - Rzuty prędkości dwóch punktów na odcinek je łączący są sobie równe.




$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$$



# Ruch płaski

- Ruch płaski ciała sztywnego można rozpatrywać jako:
  - Ruch obrotowy wokół nieruchomego chwilowego środka obrotu;
  - Złożenie ruchu obrotowego względem dowolnie wybranego bieguna i ruchu postępowego bieguna.

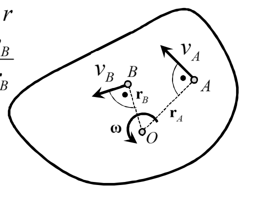


# Chwilowy środek obrotu

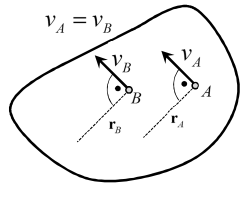
- Punkt, który w danej chwili pozostaje nieruchomy. Wektory prędkości są prostopadłe do promieni względem chwilowego środka obrotu.
- W ruchu postępowym chwilowy środek obrotu położony jest w nieskończoności (wektory prędkości są równoległe i mają te same miary).

$$v = \omega \cdot r$$

$$\frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B}$$

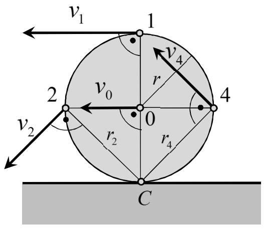



$$v_A = v_B$$



## Chwilowy środek obrotu

- Prędkości punktów tarczy przy założeniu: $v_0 = const$




$$v_C = 0 \qquad \omega = \frac{v_0}{r}$$

$$v_1 = \omega \cdot r_1 = \omega \cdot 2r$$

$$v_2 = \omega \cdot r_2 = \omega \cdot \sqrt{2}r$$

$$v_4 = \omega \cdot r_4 = \omega \cdot \sqrt{2}r$$



## Prędkość w ruchu płaskim

- Prędkość dowolnego punktu ciała jest równa sumie prędkości dowolnie obranego bieguna i iloczynu wektorowego prędkości kątowej $w$ punktu względem bieguna:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

- Prędkość kątowa jest niezależna od wyboru bieguna.



## Złożenie ruchu postępowego i obrotowego

- Prędkości – suma prędkości bieguna i prędkości w ruchu obrotowym wokół bieguna: $v_0 = const$

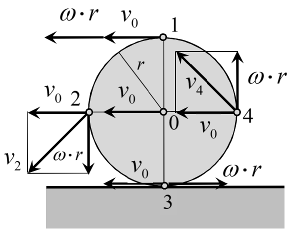
$$\omega = \frac{v_0}{r}$$

$$v_1 = v_0 + \omega \cdot r = \omega \cdot 2r$$

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + (\omega \cdot r)^2} = \sqrt{2(\omega \cdot r)^2} = \sqrt{2}\omega \cdot r$$

$$v_3 = v_0 - \omega \cdot r = 0$$

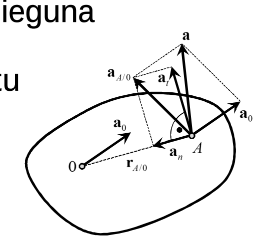
$$v_4 = \sqrt{v_0^2 + (\omega \cdot r)^2} = \sqrt{2(\omega \cdot r)^2} = \sqrt{2}\omega \cdot r$$






## Przyspieszenia

- Przyspieszenie dowolnego punktu ciała w ruchu płaskim jest równe sumie geometrycznej przyspieszenia dowolnie obranego bieguna i przyspieszenia analizowanego punktu w ruchu obrotowym względem bieguna.

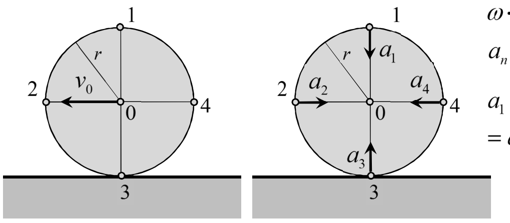



$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{A/0}$$



## Przyspieszenia

- Złożenie przyspieszenia bieguna i przyspieszenia w ruchu obrotowym wokół bieguna: $v_0 = const \quad a_0 = 0$




$$\omega \cdot r = const$$

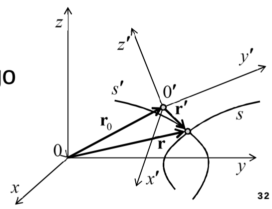
$$a_n = \omega^2 r$$

$$a_1 = a_2 =$$
$$= a_3 = a_4 = a_n$$



## Ruch złożony

- Ruch punktu względem poruszającego się układu współrzędnych:
  - Ruch unoszenia (układu poruszającego się)
  - Ruch względny (względem poruszającego się układu współrzędnych)
  - Ruch bezwzględny (względem nieruchomego układu odniesienia)





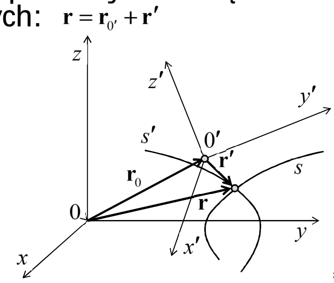

## Ruch złożony

- Składanie ruchów.
- Prędkość w ruchu złożonym (bezwzględna):
  - Prędkość unoszenia;
  - Prędkość względna.
- Przyspieszenie w ruchu złożonym:
  - Przyspieszenie unoszenia;
  - Przyspieszenie względne;
  - Przyspieszenie Coriolisa.



## Prędkość w ruchu złożonym

- Promień wodzący względem początku nieruchomego układu współrzędnych poruszającego się punktu jest sumą promieni wodzących: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{0'} + \mathbf{r}'$
  - Początku układu poruszającego się $\mathbf{r}_{0'} = x_{0'}\mathbf{i} + y_{0'}\mathbf{j} + z_{0'}\mathbf{k}$
  - Poruszającego się punktu względem początku układu ruchomego. $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$



## Prędkość w ruchu złożonym

- Prędkość jest pochodną wektora wodzącego względem czasu:

$$\mathbf{v} = \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{0'}}{\mathrm{d}t}} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}$$

- Prędkość początku układu poruszającego się:

$$\mathbf{v}_{0'} = \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{0'}}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}x_{0'}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y_{0'}}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}z_{0'}}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}$$



## Prędkość w ruchu złożonym

- Pochodna promienia wodzącego w układzie poruszającym się:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} = \boxed{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}'} + x'\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}'}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\mathbf{j}'}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\mathbf{k}'}{\mathrm{d}t}$$

- Prędkość względna:

$$\mathbf{v}_w = \boxed{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}'}$$



## Prędkość w ruchu złożonym

- Pochodna promienia wodzącego w układzie poruszającym się:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}' \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{j}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}' \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_w + x'\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}'\right) + y'\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}'\right) + z'\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}'\right) =$$

$$= \mathbf{v}_w + \boldsymbol{\omega}\times\left(x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_w + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'$$



## Prędkość w ruchu złożonym

- Prędkość bezwzględna:

$$\mathbf{v} = \boxed{\mathbf{v}_{0'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'} + \mathbf{v}_w$$

- Prędkość unoszenia jest sumą prędkości układu poruszającego się w ruchu postępowym i obrotowym:

$$\mathbf{v}_u = \boxed{\mathbf{v}_{0'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'}$$

- Prędkość bezwzględna jest sumą prędkości unoszenia i prędkości względnej:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_u + \mathbf{v}_w$$



## Przyspieszenie w ruchu złożonym

- Pochodna prędkości:

$$\mathbf{v} = \boxed{\mathbf{v}_{0'}} + \boxed{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'} + \boxed{\mathbf{v}_w}$$

względem czasu:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{0'}}{\mathrm{d}t}} + \boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}} + \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_w}{\mathrm{d}t}}$$



## Przyspieszenie w ruchu złożonym

- Przyspieszenie bezwzględne:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{0'} + \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' + \mathbf{v}_w\right) + \mathbf{a}_w + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_w =$$

$$= \boxed{\mathbf{a}_{0'} + \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right)} + \mathbf{a}_w + \boxed{2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_w} =$$

  - Przyspieszenie unoszenia:

$$\mathbf{a}_u = \boxed{\mathbf{a}_{0'} + \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\right)}$$

  - Przyspieszenie względne;
  - Przyspieszenie Coriolisa

$$\mathbf{a}_c = \boxed{2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_w}$$



## Przyspieszenie bezwzględne

- Suma przyspieszeń:
  - Unoszenia
  - Względnego
  - Coriolisa

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_u + \mathbf{a}_w + \mathbf{a}_c$$



## Przyspieszenie Coriolisa

- Dodatkowe przyśpieszeniem wynikającym z ruchu obrotowego układu unoszenia.
- Jest wywołane zmianą wektora prędkości względnej wskutek jego obrotu z prędkością kątową w oraz zmianą wektora prędkości unoszenia spowodowaną przemieszczaniem się punktu M z prędkością względną .

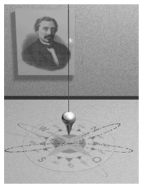
# Przyspieszenie Coriolisa

- Przyspieszenie Coriolisa będzie równe zeru gdy:
  – $w$ = 0 (ruch unoszenia jest ruchem postępowym),
  – wektory prędkości kątowej $w$ i prędkości względnej punktu są równoległe,
  – prędkość względna punktu w pewnej chwili jest równa zeru



# Przyspieszenie Coriolisa

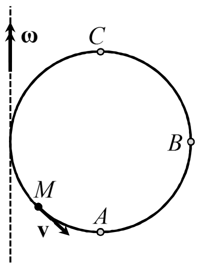
- Zazwyczaj przyjmujemy nieruchomy układ odniesienia związany z Ziemią zaniedbując przyśpieszenie Coriolisa.
- Przyśpieszenie Coriolisa jest istotne w przypadku zjawisk występujących w przyrodzie, a wywołanych obrotem kuli ziemskiej (prądy morskie, wiatry).
- Pierwsze eksperymentalne potwierdzenie: wahadło Foucault.





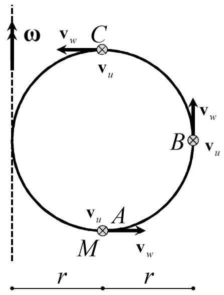
# Przykład

- Wyznaczyć prędkości i przyspieszenia bezwzględne punktu $M$ poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu $r$ obracającego się ze stałą prędkością kątową $w$ w chwilach, gdy punkt $M$ znajdzie się w punktach $A$, $B$ i $C$ okręgu.






# Prędkości




$\mathbf{v}_w = \mathbf{v}$

Punkty $A$ i $C$

$$v_u = \omega \cdot r$$

$$v = \sqrt{{v_w}^2 + {v_u}^2} = \sqrt{v^2 + (\omega \cdot r)^2}$$

Punkt $B$

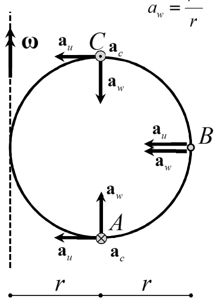
$$v_u = \omega \cdot 2r$$

$$v = \sqrt{{v_w}^2 + {v_u}^2} = \sqrt{v^2 + (\omega \cdot 2r)^2}$$



# Przyspieszenia

$$a_w = \frac{v^2}{r}$$




Punkt $A$

$$a_u = \omega^2 \cdot r \qquad a_c = 2\omega \times v_w = 2\omega \cdot v$$

$$a = \sqrt{{a_w}^2 + {a_u}^2 + {a_c}^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + \left(\omega^2 r\right)^2 + (2\omega v)^2}$$

Punkt $B$

$$a_w = \frac{v^2}{r} \qquad a_u = \omega^2 \cdot 2r \qquad a_c = 2\omega \times v_w = 0$$

$$a = a_w + a_u = \frac{v^2}{r} + \omega^2 \cdot 2r$$

Punkt $A$

$$a_u = \omega^2 \cdot r \qquad a_c = 2\omega \times v_w = 2\omega \cdot v$$

$$a = \sqrt{{a_w}^2 + {a_u}^2 + {a_c}^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + \left(\omega^2 r\right)^2 + (2\omega v)^2}$$