

# Dynamika

- n Dział mechaniki zajmujący się badaniem związków między ruchem punktów materialnych i ciał sztywnych oraz sił go wywołujących.
- n Dynamika bada zależności między takimi wielkościami jak: siła, przyspieszenie, prędkość, pęd, kręt, praca, energia itd.

## Mechanika ogólna

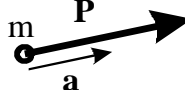
Wykład nr 8  
Podstawy dynamiki

### Pierwsza zasada dynamiki Newtona

- n **Prawo bezwładności:**
  - Z punktu widzenia dynamiki jest wszystko jedno, czy ciało się porusza ruchem jednostajnym prostoliniowym, czy jest w spoczynku.
  - W obu przypadkach siły działające na ciało są w równowadze.
  - Można zawsze założyć istnienie nieruchomego układu odniesienia.

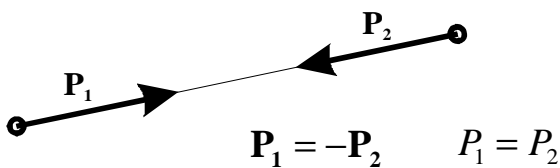
### Druga zasada dynamiki Newtona

- n Pod działaniem stałej siły punkt materialny porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej.
- n Przyspieszenie z jakim porusza się punkt jest wprost proporcjonalne do działającej siły (wypadkowej układu sił), a odwrotnie proporcjonalne do masy ciała.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{P}}{m}$$


### Trzecia zasada dynamiki Newtona

- n Siły wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych równoważą się, tj. mają jednakowe moduły i kierunki, zaś zwroty przeciwne.



### Prawo grawitacji

- n Dwa ciała działają na siebie wzajemnie jednakowymi co do wartości i przeciwnie zwróconymi siłami o wartości odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości między ich środkami i wprost proporcjonalnej do iloczynu mas tych ciał.

$$\mathbf{P} = \mathbf{G} \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

### Zasada superpozycji

- n Efekt działania kilku wpływów na ciało można wyrazić jako sumę efektów ich działania.
- n Przyspieszenie z jakim porusza się ciało pod wpływem układu sił (siły wypadkowej) może zostać obliczone jako suma przyspieszeń powodowanych przez każdą z sił składowych.

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \dots + m\mathbf{a}_n = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n = \mathbf{P}$$

### Równania ruchu punktu materialnego

- n Dynamiczne równanie różniczkowe ruchu punktu materialnego:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{a} = \mathbf{P}$$

- n Dynamiczne różniczkowe równania ruchu we współrzędnych prostokątnych:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m a_x = \dot{P}_x \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = m a_y = \dot{P}_y$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m a_z = \dot{P}_z$$

## Skalarne równania ruchu

- n Rzutowanie przyspieszenia na osie normalną, styczną i binormalną:

$$m \times a_n = m \frac{v^2}{r} = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{P}_{in} \quad m \times a_t = m \frac{dv}{dt} = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{P}_{it}$$

$$m \times a_b = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{P}_{ib} \quad a_b = 0$$

- n Wektor przyspieszenia całkowitego leży na płaszczyźnie ściśle stycznej do toru.

9

## Pierwsze i drugie zadanie dynamiki

- n Pierwsze zadanie dynamiki:
  - Dana jest masa i równania ruchu punktu materialnego, należy wyznaczyć siły działające na ten punkt;
- n Drugie zadanie dynamiki:
  - Dana jest masa i siły działające na punkt materialny, należy wyznaczyć równania ruchu tego punktu.

10

## Pierwsze zadanie dynamiki

- n Równanie ruchu:

$$m \times \mathbf{a} = m \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{P}$$

- n Składowe wypadkowej we współrzędnych prostokątnych:

$$P_x = m \dot{v}_x \quad P_y = m \dot{v}_y \quad P_z = m \dot{v}_z$$

- n Wartość i kierunek wypadkowej:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

$$\cos \mathbf{S}(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = \frac{P_x}{P} \quad \cos \mathbf{S}(\mathbf{P}, \mathbf{j}) = \frac{P_y}{P} \quad \cos \mathbf{S}(\mathbf{P}, \mathbf{k}) = \frac{P_z}{P}$$

11

## Drugie zadanie dynamiki

- n Ruch punktu pod działaniem siły:

- Stałej co do wartości i kierunku;

$$\mathbf{P} = \text{const}$$

- Zależnej od czasu;

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$$

- Zależnej od prędkości;

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(v)$$

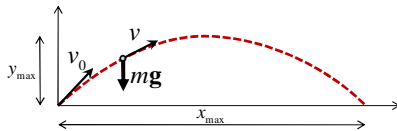
- Zależnej od położenia.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(x)$$

12

## Ruch pod działaniem stałej siły (1)

- n Rzut ukośny:



- n Równania ruchu:

$$m \dot{v}_x = 0 \quad m \dot{v}_y = -mg$$

- n Składowe przyspieszeń:

$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

- n Składowe prędkości:

$$v_x = C_1 \quad v_y(t) = -gt + C_2$$

- n Równania ruchu:

$$x(t) = C_1 t + C_3 \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4$$

13

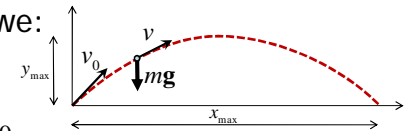
## Ruch pod działaniem stałej siły (2)

- n Warunki brzegowe:

$$v_x(t=0) = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y(t=0) = v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

$$x(t=0) = 0 \quad y(t=0) = 0$$



- n Stałe całkowania:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha \quad C_2 = v_0 \sin \alpha \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0$$

- n Równania prędkości:

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$$

- n Równania ruchu

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha$$

14

## Ruch pod działaniem siły zależnej od położenia

- n Drgania liniowe:

- n Różniczkowe

$$\text{równanie ruchu:}$$

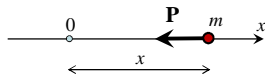
$$P_x = ma_x = m \ddot{x} = -kx \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- n Rozwiązanie ogólne:

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

$$x = a \sin(\omega t + j_0) \quad C_1 = a \cos j_0 \quad C_2 = a \sin j_0$$

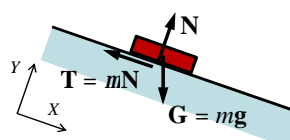
(Równanie ruchu harmonicznego prostego)



## Ruch nieswobodnego punktu materialnego

- n W przypadku, gdy warunki zewnętrzne ograniczają swobodę ruchu, w równaniu ruchu należy uwzględnić także siły bierne (reakcje więzów):

$$m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{P} + \mathbf{R}$$



$$ma_x = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{P}_x$$

$$0 = ma_y = \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{P}_y$$

15

16

## Siła bezwładności

n Równanie ruchu:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a} \quad \mathbf{P} - m\mathbf{a} = 0$$

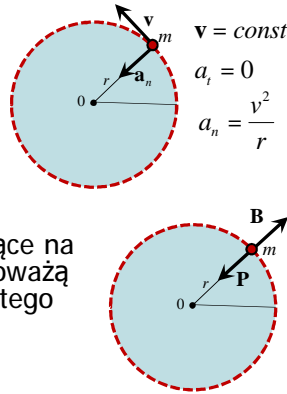
n Siła bezwładności (d'Alemberta):

$$\mathbf{B} = -m\mathbf{a}$$

n Zasada d'Alemberta:

– Siły rzeczywiste działające na punkt materialny równoważą się z siłą bezwładności tego punktu.

$$\mathbf{P} + \mathbf{B} = 0$$



17

## Zasady zachowania w dynamice

n Zasada:

- zachowania pędu;
- zachowania momentu pędu (krętu);
- równoważności energii i pracy;
- zachowania energii mechanicznej.

18

## Pęd, zasada zachowania pędu

n Zgodnie z drugim prawem Newtona:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

– Pochodna pędu punktu materialnego względem czasu równa jest sumie sił działających na ciało.

n Pęd (ilość ruchu) pozostaje wielkością stałą, jeżeli siły działające na ciało pozostają w równowadze:

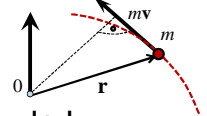
$$m\mathbf{v} = \text{const}$$

19

## Moment pędu, zasada zachowania krętu

n Momentem pędu (kręt) punktu materialnego względem bieguna jest iloczyn wektorowy promienia wodzącego punktu względem bieguna i pędu:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$



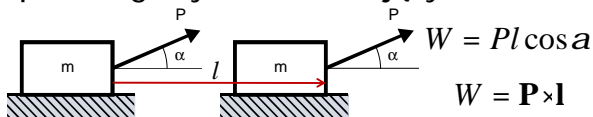
n Kręt punktu materialnego względem bieguna jest wielkością stałą, jeśli moment sił działających na punkt materialny względem tego bieguna jest równy 0.

20

## Praca

n Praca stałej siły na prostoliniowym przesunięciu równa jest iloczynowi wartości bezwzględnej przesunięcia przez miarę rzutu siły na kierunek przemieszczenia.

n Praca wypadkowej układu sił działających na ciało równa jest sumie prac poszczególnych sił działających na ciało.



$$W = Pl \cos \alpha$$

$$W = \mathbf{P} \times \mathbf{l}$$

21

## Zasada równoważności energii i pracy

n Energia kinetyczna:

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

n Zasada równoważności energii i pracy:

– Przyrost energii kinetycznej punktu materialnego (ciała) równy jest pracy wykonanej przez siły działającej na ciało.

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W$$

22

## Zasada zachowania energii mechanicznej

n Potencjalne pole sił:

– Praca wykonana przez siły w potencjalnym polu sił nie zależy od drogi po której wykonane zostało przemieszczenie a jedynie od położenia początkowego i końcowego.

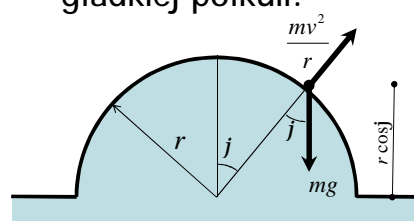
n Energia mechaniczna ciała w potencjalnym polu sił pozostaje wielkością stałą.

$$E_1 + V_1 = E_2 + V_2$$

23

## Zasada zachowania energii – przykład (1)

n Wyznaczyć miejsce oderwania punktu materialnego zsuwającego się po gładkiej półkuli:



$$\frac{mv^2}{r} = mg \cos j$$

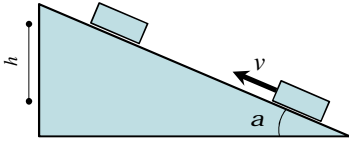
$$\frac{mv^2}{2} = mg(r - r \cos j)$$

$$\cos j = \frac{2}{3}$$

24

## Zasada zachowania energii – przykład (2a)

- Na jaką wysokość po gładkiej równi wjedzie ciało, któremu nadano prędkość początkową  $v$ :



	Energia kinetyczna	Energia potencjalna
Początek	$\frac{mv^2}{2}$	0
Koniec	0	$mgh$

$$\frac{mv^2}{2} = mgh$$

25

## Zasada zachowania energii – przykład (2b)

- Na jaką wysokość po równi wjedzie ciało, któremu nadano prędkość początkową  $v$  (z uwzględnieniem tarcia):

– Praca siły tarcia:  $W = Ts$       $\frac{mv^2}{2} = mgh + Ts$

$T = mN$

$N = mg \cos a$

$\frac{mv^2}{2} = mgh + mmg \cos a \times h \sin a$

26

## Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej

- Druga zasada dynamiki w ruchu obrotowym bryły sztywnej:

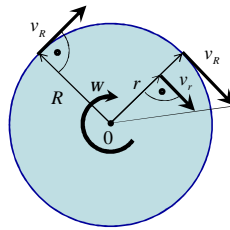
$$M_0 = Ie$$

- Kręt w ruchu obrotowym:

$$K_t = Iw$$

- Energia kinetyczna:

$$E = \frac{Iw^2}{2}$$



27

## Dynamika układu punktów materialnych

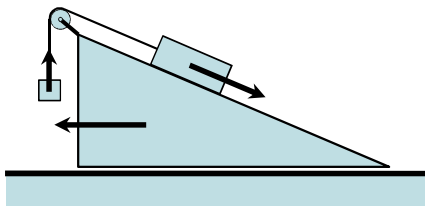
- Zasady zachowania w ruchu układu punktów materialnych:

- Ruchu środka masy;
- Zachowania pędu;
- Zachowania krętu;
- Zasada d'Alemberta;
- Zachowania energii mechanicznej.

28

## Zasada ruchu środka masy

- Jeżeli siły zewnętrzne działające na układ ciał równoważą się, to środek masy układu pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.



29

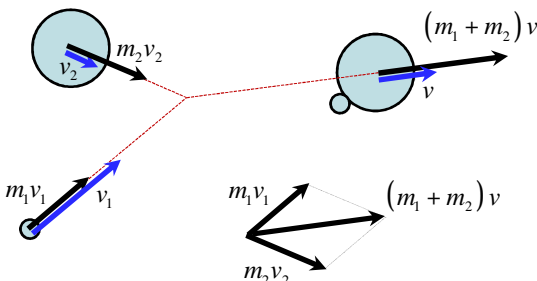
## Zasada zachowania pędu

- Pęd układu punktów materialnych – suma wektorowa pędów wszystkich punktów.
- Przyrost pędu układu punktów materialnych jest równy popędowi wypadkowej sił zewnętrznych.
- Pęd układu punktów materialnych pozostaje niezmienny, jeżeli siły działające na układ równoważą się.

30

## Zasada zachowania pędu – przykład

- Określić prędkość ciała po uderzeniu kuli:



31

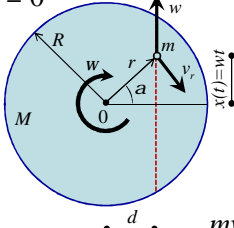
## Zasada zachowania momentu pędu

- Moment pędu (kręt) układu punktów materialnych – suma wektorowa krętów wszystkich punktów układu względem bieguna.
- Pochodna krętu układu punktów po czasie równa jest wypadkowemu momentowi sił względem bieguna.
- Kręt układu punktów materialnych pozostaje niezmienny, jeżeli wypadkowy moment sił względem bieguna jest równy zero.

32

## Zasada zachowania krętu – przykład

- Po przecięciu tarczy zaczyna poruszać się punkt materialny z prędkością  $v$ . Z jaką prędkością kątową poruszać się będzie tarcza?



$$\mathbf{K} = 0$$

$$\mathbf{K}_t = Iw$$

$$\mathbf{K}_p = mwd - mur$$

$$mwd - mur - Iw = 0$$

$$mwd - mwr^2 - \frac{MR^2}{2}w = 0$$

$$mwd - mw(d^2 + w^2t^2) - \frac{MR^2}{2}w = 0$$

33

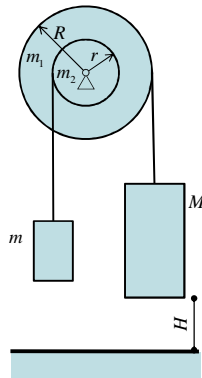
## Zasada zachowania energii mechanicznej

- Energia mechaniczna układu punktów materialnych w potencjalnym polu sił pozostaje niezmienna.
- Przyrost energii kinetycznej układu punktów materialnych równy jest sumie prac wykonanych przez wszystkie siły (zewnątrzne i wewnętrzne) działające na ten układ.

34

## Zasada zachowania energii mechanicznej (1)

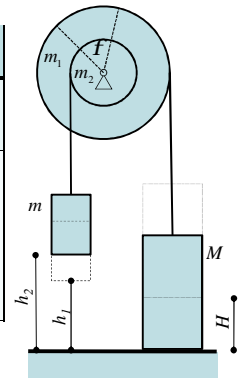
- Na dwa współśrodkowe walce o masach  $m_1$  i  $m_2$  nawinięte są nieważkie nici na których zawieszono dwa ciała. Obliczyć z jaką prędkością uderzy o ziemię ciało  $M$ .



35

## Zasada zachowania energii mechanicznej (2)

	Energia kinetyczna	Energia potencjalna
Początek	0	$MgH + mgh_1$
Koniec	$\frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + \frac{I_1w^2}{2} + \frac{I_2w^2}{2}$	$mgh_2$



36

## Zasada zachowania energii mechanicznej (3)

$$MgH + mgh_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + \frac{I_1w^2}{2} + \frac{I_2w^2}{2} + mgh_2$$

$$MgH - mg(h_2 - h_1) = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + \frac{I_1w^2}{2} + \frac{I_2w^2}{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1R^2 \quad I_2 = \frac{1}{2}m_2r^2 \quad f = \frac{h_2 - h_1}{r} = \frac{H}{R} \quad w = \frac{v}{r} = \frac{V}{R}$$

$$MgH - mg \frac{Hr}{R} = \frac{m \frac{v^2}{2}}{\frac{R}{r}} + \frac{MV^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}m_1R^2 \frac{v^2}{2}}{\frac{R}{r}} + \frac{\frac{1}{2}m_2r^2 \frac{v^2}{2}}{\frac{R}{r}}$$

37