

# **Analiza nośności i zarysowania zginanych elementów betonowych słabo zbrojonych**

**Marta Słowik**

*Politechnika Lubelska, Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, e-mail: m.slowik@pollub.pl*

**Streszczenie:** Elementy betonowe, w których zastosowano zbrojenie o przekroju mniejszym od minimalnego, obowiązującego w konstrukcjach żelbetowych, nazywane są elementami słabo zbrojonymi. Elementy te nie są przy wymiarowaniu wyodrębniane w osobnej grupie, ale traktowane są jak elementy betonowe niezbrojone. W ten sposób pomijany jest wpływ prętów zbrojeniowych na nośność i rysoodporność konstrukcji słabo zbrojonych. Praca elementów z betonu słabo zbrojonego jest stosunkowo słabo rozpoznana przez badaczy, chociaż stanowią one dosyć liczną grupę konstrukcji inżynierskich. Wykonano własne badania doświadczalne dotyczące zginanych elementów słabo zbrojonych w celu określenia ich nośności i rysoodporności. Elementami badawczymi były belki słabo zbrojone o zróżnicowanym stopniu zbrojenia podłużnego. Dodatkowo, w celu porównania, przebadano belki betonowe niezbrojone i belki żelbetowe. Przeanalizowano i porównano przebieg procesu powstawania i rozwoju rys oraz charakter zniszczenia i wielkość sił niszczących w badanych belkach w zależności od stopnia zbrojenia. Przeprowadzona analiza wyników badań stanowi podstawę do szerszego rozpoznania zagadnienia wpływu słabego zbrojenia na charakter pracy elementu z betonu. Jako efekt końcowy przedstawiono propozycję obliczeniowego określania nośności zginanych elementów słabo zbrojonych.

**Słowa kluczowe:** beton słabo zbrojony, minimalny stopień zbrojenia, nośność, rysoodporność.

## **1. Nośność elementów z betonu słabo zbrojonego**

Na podstawie przeprowadzonych studiów literaturowych wynika, że brak jest aktualnych opracowań dotyczących konstrukcji słabo zbrojonych. Nieliczne prace w Polsce, dotyczące obliczania tych konstrukcji: Dąbrowski [6], norma ZN-66/HP-1 [21], są oparte na nieobowiązującej już przy wymiarowaniu metodzie obciążeń krytycznych.

Nośnością elementów słabo zbrojonych zajmował się K. Dąbrowski. Na podstawie wyników szeregu badań doświadczalnych dotyczących zginanych belek słabo zbrojonych, stwierdził on wzrost rysoodporności belek z betonu słabo zbrojonego w porównaniu do elementów bez zbrojenia. Wzrost ten zależy od stopnia zbrojenia podłużnego  $\rho$ , przy czym w badanych belkach o  $\rho < 0.08\%$  wzrost rysoodporności był większy niż w belkach o  $\rho > 0.08\%$ . Opierając się na wynikach badań K. Dąbrowski wyprowadził zależności służące do wyznaczania rysoodporności elementów słabo zbrojonych, które stanowią również o nośności tych elementów:

$$(1) \quad \bullet \text{ przy } \rho = 0 \div 0.08\% \quad M_{cr}^{SRC} = M_{ult}^{SRC} = \frac{bh^2 f_{ct,f}}{6} (1 + \beta_1 \rho)$$

$$\bullet \text{ przy } \rho > 0.08\% \quad M_{cr}^{SRC} = M_{ult}^{SRC} = \frac{bh^2 f_{ct,f}}{6} (\alpha + \beta_2 \rho) \quad (2)$$

gdzie:  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  współczynniki doświadczalne wynoszące w przypadku belki o przekroju 200×200 mm odpowiednio 1.15 ; 250 ; 62.5.

We wzorach (1) i (2) występuje wytrzymałość betonu na rozciąganie przy zginaniu  $f_{ct,\rho}$ , która jest większa od wytrzymałości betonu na rozciąganie osiowe  $f_{ct}$ . Iloraz obu wielkości waha się w dość szerokich granicach i zależy od wielu czynników, przede wszystkim od wytrzymałości betonu i wysokości belki. Dąbrowski jako jeden z pierwszych badaczy, zajmujących się elementami z betonu słabo zbrojonego uwzględnił wpływ skali elementu na ich nośność.

Beton słabo zbrojony powszechnie stosowany jest w budowlach wodnych. Obliczenia statyczno wytrzymałościowe budowli wodnych w zakresie konstrukcji betonowych i żelbetowych prowadzić należy według normy zakładowej ZN-66/HP/1 "Budowle hydrotechniczne. Konstrukcje słabo zbrojone. Obliczenia statyczne i projektowanie." Norma ta została oparta na normie żelbetowej PN-56/B-03264 z 1956 roku.

W normie ZN-66/HP/1 za konstrukcje słabo zbrojone uważa się konstrukcje, w których procentowa ilość zbrojenia rozciąganego jest mniejsza niż podwójne wielkości minimalne podane w normie PN-56/B-03264. Za podstawę wymiarowania przyjęto metodę obciążeń krytycznych. Wymiarowanie na nośność nie odbiega w zasadzie od zaleceń i wzorów podanych w PN-56/B-03264, z tą jednak różnicą, że wprowadza się w ZN-66/HP/1 pięć współczynników pewności  $s=s_1; s_2; s_3; s_4; s_5$ , których wartości w zależności od klasy budowli i rodzaju obciążenia zawierają się w granicach od 1,1 do 3,3. Zwiększono również wartość granicznych odkształceń betonu rozciąganego do wielkości  $\varepsilon_{cu}=1.5 \times 0.0001=0.00015$ .

Obecnie przy wymiarowaniu konstrukcji budowlanych obowiązuje powszechnie metoda stanów granicznych, toteż projektowanie budowli wodnych z betonu słabo zbrojonego powinno uwzględniać założenia tej metody. Sposób projektowania konstrukcji słabo zbrojonych według zasad podanych w normie ZN-66/HP/1 jest przestarzały i nie odpowiada obecnym wymaganiom norm polskich i zagranicznych.

W literaturze zagranicznej tematyka elementów słabo zbrojonych poruszana jest w niewielkim stopniu. We Francji nośnością belek słabo zbrojonych poddanych zginaniu zajmował się Chambaud [5]. Tym co wyróżnia elementy słabo zbrojone jest to, że w chwili zniszczenia naprężenia w stali przekraczają granicę plastyczności i mogą osiągnąć wartość  $\sigma_s=1.3f_y$ . Zjawisko to już wcześniej opisał Saliger [10] i określił jako samoutwardzenie stali. Według Chambaud'a belki słabo zbrojone, przy uwzględnieniu zjawiska samoutwardzenia stali, nie wykazują żadnych anomalii w porównaniu do elementów żelbetowych.

## 2. Minimum zbrojenia w zginanych elementach żelbetowych

Z zagadnieniem wyznaczania nośności elementów słabo zbrojonych ściśle związane jest zagadnienie szacowania minimalnego przekroju zbrojenia podłużnego w elementach żelbetowych –  $A_{s,min}$ , jako dolnej granicy zbrojenia, przy której zaczynają już obowiązywać zasady wymiarowania przekrojów żelbetowych. Wielkość tego przekroju zbrojenia jest zarazem górną granicą zbrojenia w elementach słabo zbrojonych. Najczęściej przy wyznaczaniu  $A_{s,min}$  nadal posługujemy się kryterium klasycznym.

Minimum zbrojenia rozciąganego w żelbetowych elementach zginanych można określić, wg kryterium klasycznego, jako przekrój stali, przy którym nośność przekroju żelbetowego obliczona w fazie II jest co najmniej równa momentowi rysującemu w fazie I. W przypadku zginanych belek o przekroju prostokątnym prowadzi to do wzoru (przy przyjęciu  $d=0.925h$  i  $z=0.98 d$ ):

$$A_{s,min} = 0.35 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} bd \quad \text{czyli} \quad \rho_{min} = \frac{A_{s,min}}{bd} = 0.35 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \quad (3)$$

Minimalny stopień zbrojenia podłużnego, wyznaczony na podstawie kryterium klasycznego, zależy od średniej wytrzymałości betonu na rozciąganie –  $f_{ctm}$  i charakterystycznej granicy plastyczności stali –  $f_{yk}$ . Natomiast na podstawie przedstawionych w literaturze badań: Bažant i Oh [1], Bosco i Carpinteri [3], Carpinteri i Ferro [4], Dąbrowski [6], Hjortset [8], Mianowski [9], Styś i Rejman [15] wynika, że na wielkość  $\rho_{min}$  mają wpływ również inne czynniki, przy czym badacze kładą nacisk na różne z nich np. wysokość przekroju czy też dobór średnicy prętów zbrojeniowych. Wskazuje to na złożoność zagadnienia wyznaczania minimum zbrojenia w konstrukcjach żelbetowych. Kryterium klasyczne wydaje się być niewystarczające w świetle obecnego stanu wiedzy.

W obecnie obowiązującej w Polsce normie dotyczącej wymiarowania konstrukcji z betonu PN-B-03264 (2002), podobnie jak w zaleceniach międzynarodowych CEB-FIP Model Code [17] i EN 1992-1-1 [20], wyróżniono dwie przyczyny, ze względu na które przyjmuje się minimalne zbrojenie. Są to uniknięcie kruchego zniszczenia i ograniczenie szerokości rozwarcia rys skurczowych i termicznych.

Minimalny przekrój zbrojenia ze względu na rozwarcie rys wyznaczyć można ze wzoru:

$$A_{s,min} = k_c k_{ct,eff} \frac{A_{ct}}{\sigma_s} \quad (4)$$

w którym:  $A_{ct}$  – przekrój strefy rozciąganej betonu,  $\sigma_s$  – dopuszczalne naprężenie w zbrojeniu rozciągającym bezpośrednio po pojawieniu się pierwszej rysy,  $f_{ct,eff}$  – wytrzymałość betonu na rozciąganie osiągnięta w czasie, w którym oczekuje się powstania pierwszej rysy,  $k_c$  – współczynnik uwzględniający rozkład naprężeń w przekroju, w chwili poprzedzającej zarysowanie,  $k$  – współczynnik uwzględniający wpływ nierównomiernych naprężeń samorzównoważających się w ustroju.

Minimalne zbrojenie ze względu na zabezpieczenie przed kruchym zniszczeniem jest w ujęciu normowym wyznaczane podobnie jak w kryterium klasycznym, z tą różnicą, że naprężenia w betonie rozciągającym przyjmowane są w chwili zarysowania

nie jako równe średniej wytrzymałości betonu na rozciąganie ale o 30% większe:

$$\sigma_{ct} = 1.3f_{ctm} \quad (5)$$

W przypadku przekroju prostokątnego wzór na minimalny stopień zbrojenia w elementach zginanych przybiera postać:

$$\rho_{\min} = 0.26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \quad (6)$$

Normowy sposób wyznaczania  $\rho_{\min}$ , podobnie jak kryterium klasyczne, jest uproszczony i prowadzi do właściwego oszacowania stopnia zbrojenia w przypadku elementów o stosunkowo małych wymiarach, wykonanych z betonów o niezbyt wysokiej wytrzymałości. Zagadnienie to szerzej przedstawiono w Słowik [13]. Wynika to z faktu, że przy szacowaniu momentu rysującego należy przyjmować tak zwaną wytrzymałość betonu na rozciąganie przy zginaniu  $f_{ct,f}$ . Stosunek tej wytrzymałości do wytrzymałości średniej betonu na rozciąganie jest określanej jako współczynnik  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{f_{ct,f}}{f_{ctm}} \quad (7)$$

Moment rysujący wyznaczać należy zatem ze wzoru:

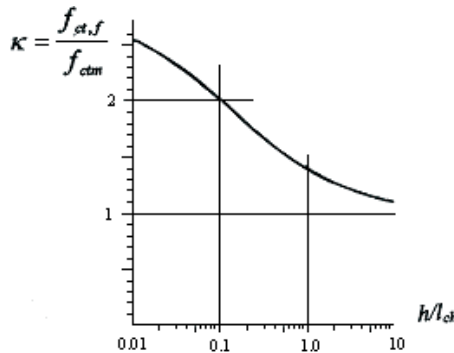
$$M_{cr} = W_c f_{ct,f} = W_c \kappa f_{ctm} \quad (8)$$

Po porównaniu tak wyznaczonego momentu rysującego z nośnością przekroju żelbetowego w fazie II-giej wzór na minimalny stopień zbrojenia będzie miał postać:

$$\rho_{\min} = 0.175 \kappa \frac{f_{ctm}}{f_y} \left( \frac{h}{d} \right)^2 \quad (9)$$

gdzie:  $h$  – całkowita wysokość przekroju,  $d$  – użyteczna wysokość przekroju,  $f_{ctm}$  – średnia wytrzymałość betonu na rozciąganie,  $f_y$  – granica plastyczności stali.

W celu określenia współczynnika  $\kappa$  można posłużyć się zależnością przedstawioną w: Hillerborg, Modeer i Peterson [7], wyprowadzoną na podstawie szeregu obliczeń numerycznych, wykonanych przy założeniach nieliniowej mechaniki pęknięcia, którą pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Współczynnik  $\kappa$ , na podstawie Hillerborg, Modeer i Peterson [7].

Fig. 1. Coefficient  $\kappa$ , based on Hillerborg, Modeer and Peterson [7].

Współczynnik  $\kappa$  zależy od wiodącego wymiaru przekroju elementu –  $h$  i długości charakterystycznej betonu –  $l_{ch}$ .  $l_{ch}$  jest parametrem zdefiniowanym w ramach modeli betonu opracowanych na podstawie mechaniki pęknięcia, który w kompleksowy sposób ujmuje główne cechy betonu charakteryzujące jego podatność na pęknięcie:

$$l_{ch} = \frac{G_F E_{ct}}{f_{ct}^2} \tag{10}$$

gdzie:  $G_F$  – energia pęknięcia,  $E_{ct}$  – moduł sprężystości betonu rozciąganego,  $f_{ct}$  – wytrzymałość betonu na rozciąganie.

W przypadku braku wartości doświadczalnej energii pęknięcia, może ona być wyznaczona ze wzoru (11), w którym  $\alpha_F$  jest współczynnikiem zależnym od maksymalnego wymiaru ziaren kruszywa:  $\alpha_F = 4$  gdy  $D_{max} = 8\text{mm}$ ,  $\alpha_F = 6$  gdy  $D_{max} = 16\text{mm}$ ,  $\alpha_F = 10$  gdy  $D_{max} = 32\text{mm}$ :

$$G_F = \alpha_F \left( f_{c,\phi 15/30} \right)^{0.7} \tag{11}$$

W tabeli 1 zestawiono przykładowe wartości  $\rho_{min}$  wyznaczone na podstawie wzoru (9) w przypadku belek zginanych o różnych wysokościach przekroju i wykonanych z betonu i stali o różnych charakterystykach. Przyjmowane w obliczeniach wielkości współczynnika  $\kappa$  zamieszczono również w tab. 1.

Tabela 1. Przykładowe wartości  $\rho_{min}$  obliczone ze wzoru (9).  
Table 1. The example of  $\rho_{min}$  calculated based on (9).

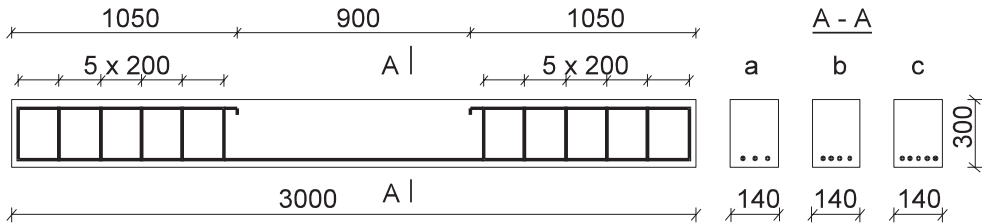
Beton	Stal	Wysokość przekroju $h$ [mm]							
		100		300		800		1300	
		$\kappa$	$\rho_{min}$	$\kappa$	$\rho_{min}$	$\kappa$	$\rho_{min}$	$\kappa$	$\rho_{min}$
$l_{ch}=823$ mm	AI		0.0028		0.0019		0.0016		0.0014
	(B15)	1.8		1.6		1.37		1.26	
	AII		0.0019		0.0013		0.0011		0.0009
$l_{ch}=487$ mm	AI		0.0046		0.0032		0.0026		0.0024
	(B37)	1.62		1.45		1.25		1.20	
	AII		0.0031		0.0022		0.0018		0.0016

Na podstawie szerokich analiz dotyczących  $\rho_{min}$ , zamieszczonych między innymi w Słowik [14], uznano, że zaproponowany sposób szacowania minimalnego stopnia zbrojenia ze wzoru (9) jest poprawny i wybrano go jako reprezentatywny do wyznaczania minimum zbrojenia w zginanych elementach żelbetowych. Został on oparty na analizie numerycznej przeprowadzonej przy zastosowaniu nieliniowej mechaniki pęknięcia i zweryfikowany doświadczalnie. Wyznaczając stopień zbrojenia w ten sposób uwzględnia się większość czynników mających wpływ na jego wartość, takich jak wymiary elementu, parametry wytrzymałościowe betonu i stali.

### 3. Badania własne dotyczące zginanych belek słabo zbrojonych

#### 3.1. Opis badań

Elementami badawczymi były belki o przekroju prostokątnym o wymiarach: szerokość 0.14 m; wysokość 0.30 m; długość 3.00 m. Wykonano dwie serie elementów badawczych: podstawowa seria B i dodatkowa seria S. W ramach serii B wykonano 6 elementów z betonu słabo zbrojonego o zróżnicowanym stopniu zbrojenia tj.: 2 belki o  $\rho=0.05\%$ , 2 belki o  $\rho=0.07\%$ , 2 belki o  $\rho=0.09\%$ . Do zbrojenia belek serii B użyto prętów o średnicy  $\phi 3.0$  mm ze stali klasy AI -  $f_y=161.7$  MPa,  $f_R=278.2$  MPa. Dobór prętów w belkach tak przeprowadzono, by równomiernie zapełnić obszar zbrojenia od  $\rho>0$  do  $\rho<\rho_{min}$ . W ramach serii S przebadano 7 elementów: 3 belki betonowe niezbrojone, 3 belki zbrojone o  $\rho=0.12\%$ , tj stopniu zbrojenia  $\rho \approx \rho_{min}$  i 1 belkę żelbetową o  $\rho=0.20\%$ . Do zbrojenia belek serii S użyto prętów o średnicy  $\phi 4.5$  mm ze stali klasy AI -  $f_y=274.5$  MPa,  $f_R=398.9$  MPa. Rozmieszczenie zbrojenia w elemencie pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Rozmieszczenie prętów zbrojeniowych w belce.

Fig. 2. The location of reinforcing bars in the beam.

Cechy betonu, które były wyznaczone doświadczalnie na próbkach w przypadku obu serii belek badawczych, zestawiono w tabeli 2.

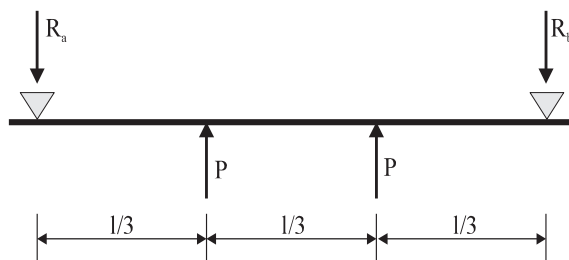
Tabela 2. Zestawienie cech betonu.

Table 2. Properties of concrete.

Lp.	Seria	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]	$E_{cm}$ [GPa]	$G_F$ [Nm/m <sup>2</sup> ]
1	B	24.5	2.4	23.3	93.6
2	S	20.5	1.5	22.1	82.9

W celu przeprowadzenia badań belek zginanych zaprojektowano stanowisko badawcze, w ten sposób by możliwa była obserwacja pracy belki w zakresie pokrytycznym. Obciążenia zadawano w postaci 2 sił skupionych za pomocą podnośników hydraulicznych od dołu do góry. Zastosowano metodę obciążania polegającą na wymuszaniu przemieszczeń. Schemat statyczny badanych elementów pokazano na rys. 3.

Podczas badań mierzono ugięcia belki, szerokość rozwarcia rys, odkształcenia betonu w strefie ściskanej (dwie bazy pomiarowe w środku belki) i rozciąganej (siedem baz pomiarowych rozmieszczonych na całym odcinku między przyłożonymi siłami). Szczegółowy program badań i zestawienie uzyskanych wyników można znaleźć w Słowik [11].



Rys. 3. Schemat statyczny elementów badawczych.

Fig. 3. The static scheme of tested beams.

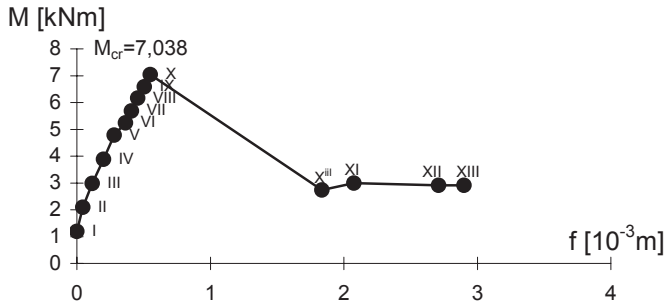
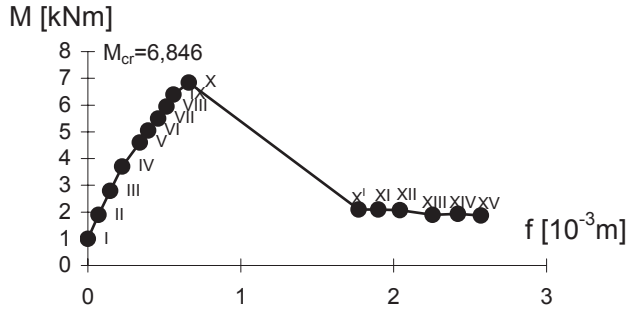
### 3.2. Wyniki badań

W belkach serii B, w ramach której przebadano belki o niskim stopniu zbrojenia: 0.05%, 0.07% i 0.09%, o nośności decydował moment rysujący. W belkach tych powstawała tylko jedna rysa a szerokość jej rozwarcia tuż po powstaniu była stosunkowo duża w  $\geq 0.3$  mm. Zaznaczył się wyraźny wpływ stopnia zbrojenia belek na wielkość rozwarcia rysy tuż po powstaniu: im wyższy stopień zbrojenia tym mniejsze były szerokości rys. Po zarysowaniu następował spadek sił na siłomierzach i możliwa była dalsza obserwacja pracy belek w zakresie pokrytycznym. Mimo, że po zarysowaniu w belkach nie następowało przełamanie, to jednak moment powstania rysy można uznać jako osiągnięcie stanu granicznego belki ze względu na szerokość rozwarcia rysy. Sposób zarysowania belek o  $\rho < 0.1\%$  był podobny do zarysowania belek betonowych niezbrojonych. Jednak charakter procesu powstawania rysy w belkach słabo zbrojonych był inny. W belkach niezbrojonych po powstaniu rysy, następowało nagłe przełamanie belki na dwie części. Proces pęknięcia i zarazem zniszczenia w belkach betonowych miał charakter gwałtowny i towarzyszył mu huk. W belkach słabo zbrojonych po zarysowaniu możliwe było dalsze obciążania poprzez wymuszanie ugięć belek, przy którym, po spadku sił po zarysowaniu, siły wewnętrzne stabilizowały się na stałym poziomie, ale niższym od maksymalnego uzyskanego tuż przed zarysowaniem. Na rysunku 4 pokazano przykładowe wykres zależności moment zginający – ugięcie uzyskane w belkach serii B.

Inaczej przebiegał proces zarysowania w belkach serii S o  $\rho = 0.12\%$ . W belkach tych zanotowano nieznaczny wzrost nośności ponad moment rysujący, średnio o 6.7%. Powstało dwie lub trzy rysy, których szerokość rozwarcia tuż po powstaniu była mniejsza od 0.06 mm. Natomiast średnia szerokość rozwarcia rys w momencie osiągnięcia w belkach maksymalnego momentu zginającego nie przekroczyła 0.11 mm, a przebieg zarysowania był powolny i bardziej stabilny niż w belkach serii B. Po osiągnięciu momentu maksymalnego następował nieznaczny spadek sił, które w kolejnych etapach obciążania stabilizowały się na stałym poziomie. Obrazuje to rysunek 5. Można uznać, że w belkach o  $\rho = 0.12\%$  proces zarysowania i niszczenia był zbliżony do takiego jaki występuje w belkach żelbetowych, mimo że były to belki słabo zbrojone.

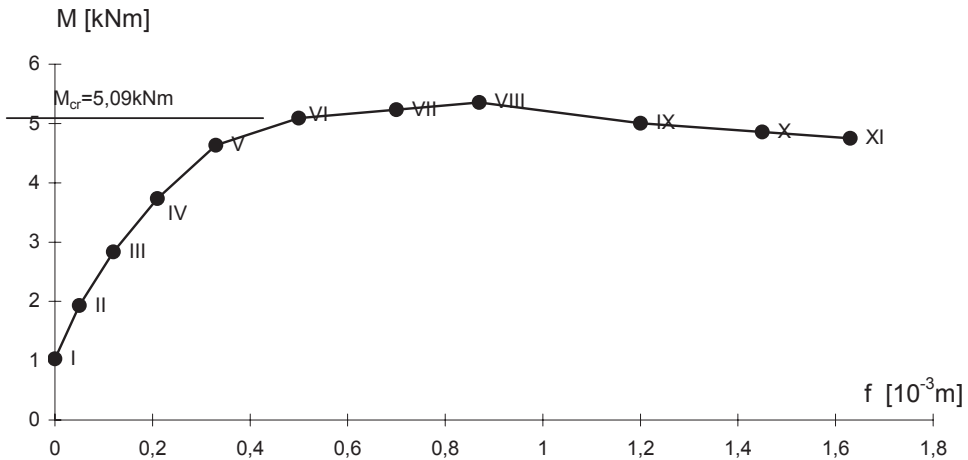
W jeszcze bardziej stabilny sposób przebiegało zarysowanie w belce serii S o stopniu zbrojenia 0.20%. Powstało w niej pięć rys, a szerokość ich rozwarcia po powstaniu była stosunkowo mała. Maksymalny pomierzony moment zginający przekroczył moment rysujący o 32%. Jest to już znaczny wzrost nośności, przy

czym szerokość rozwarcia rys w etapie osiągnięcia maksymalnego momentu nie przekroczyła 0.3 mm. Uznano, że belka o  $\rho = 0.20\%$  zachowywała się jak typowa belka żelbetowa. Zależność momentu zginającego od ugięcia w belce o stopniu zbrojenia 0.2% pokazano na rys. 6.



Rys. 4. Zależność moment zginający-ugięcie w belce B6 –  $\rho=0.05\%$  i B1 –  $\rho=0.09\%$ .

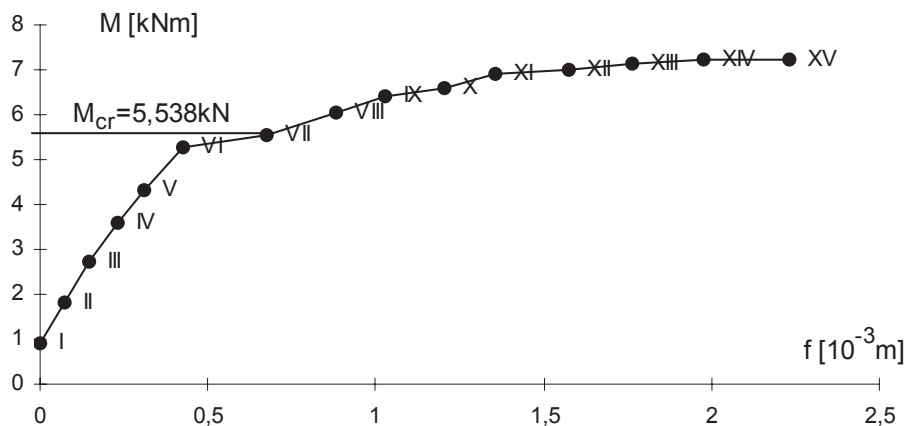
Fig. 4. Bending moment-deflection curve for the beam B6 –  $\rho=0.05\%$  and B1 –  $\rho=0.09\%$ .



Rys. 5. Zależność moment zginający-ugięcie w belce S3 –  $\rho=0.12\%$ .

Fig. 5. Bending moment-deflection curve for the beam S3 –  $\rho=0.12\%$ .



Rys. 6. Zależność moment zginający-ugięcie w belce S6 -  $\rho=0.20\%$ .Fig. 6. Bending moment-deflection curve for the beam S6 -  $\rho=0.20\%$ .

### 3.3 Analiza wyników badań

Na podstawie pomierzonych w czasie badań szerokości rozwarcia rys w belkach słabo zbrojonych tuż po powstaniu stwierdzono, że ich wielkość zależy od stopnia zbrojenia elementu. Im mniejszy był stopień zbrojenia tym większa szerokość rozwarcia rysy tuż po powstaniu. Średnie wartości szerokości rozwarcia rys bezpośrednio po powstaniu w badanych belkach wyniosły: 0.37 mm w belkach o  $\rho=0.09\%$ ; 0.55 mm w belkach o  $\rho=0.07\%$ ; 0.47 mm w belkach o  $\rho=0.05\%$ . Ze względu na tak duże wartości rozwarcia rys po zarysowaniu można stwierdzić, że został przekroczony stan graniczny szerokości rozwarcia rys prostopadłych w elementach słabo zbrojonych a więc przy projektowaniu nie należy dopuszczać do pojawienia się rys i powinno się przyjmować, że o nośności tych elementów decyduje moment rysujący.

Stwierdzono, że momenty rysujące uzyskane w belkach badawczych ze zbrojeniem są wyższe od momentów rysujących w belkach betonowych bez zbrojenia. Wyniki badań własnych są zbliżone z wynikami innych badaczy, zajmujących się elementami słabo zbrojonymi, np. K. Dąbrowskiego [6], który w swoich badaniach również odnotował wzrost momentu rysującego w belkach słabo zbrojonych.

Większą rysoodporność belek zbrojonych badacze przypisują zwiększonej odkształcalności betonu zbrojonego i wpływom ujednorodniającym zbrojenia, polegającym na "zszywaniu" rys a co za tym idzie zwiększeniu wytrzymałości betonu na rozciąganie przy zginaniu. Analizując jednak uzyskane w badaniach własnych wielkości granicznych odkształceń betonu przy rozciąganiu (otrzymane wartości zestawiono w tab. 3) nie stwierdzono zwiększonej odkształcalności betonu w badanych belkach słabo zbrojonych, a na podstawie otrzymanych wielkości  $\varepsilon_{ctu}$  uznano, że wynoszą one około 0.15‰ w przypadku betonu niezbrojonego i słabo zbrojonego.

Tabela 3. Odkształcenie graniczne betonu rozciąganego pomierzone w elementach badawczych.  
Table 3. The ultimate strain of tensile concrete measured during the experiment.

Seria	Beton	Element	$\rho$ [%]	$\varepsilon_{ctu}$ [ $10^{-6}$ ]
B	$f_{cm}=24.5$ MPa $G_F=93.6$ J/m <sup>2</sup>	B1	0.05	162
		B2		106
		B3	0.07	156
		B4		167
		B5	0.09	108
		B6		164
		S7	0.0	151
S	$f_{cm}=20.5$ MPa $G_F=82.9$ J/m <sup>2</sup>	S8		146
		S9		275
		S1	0.12	161
		S2		145
		S3		182
		S6	0.20	188

Inne wyjaśnienie wzrostu rysoodporności belek słabo zbrojonych można przedstawić na gruncie zasad mechaniki pękania. Według nieliniowej mechaniki pękania na moment rysujący w belkach zbrojonych ma wpływ charakter procesu powstawania rys. Inaczej on przebiega w belkach niezbrojonych, w których zarysowanie przebiega w sposób gwałtowny, a inaczej powstają rysy w elementach o odpowiednim stopniu zbrojenia, gdzie rysy powstają w sposób stabilny. Procesami tymi steruje energia pękania.

Badania wykazują (np. Woliński [16], Bażant i Pfeiffer [2]), że stosowanie betonów o dużej wytrzymałości lub zwiększenie gabarytów konstrukcji powoduje obniżenie ich odporności na kruche pęknięcie i stopnia bezpieczeństwa. Problem ten bardzo wyraźnie występuje w konstrukcjach słabo zbrojonych. Nadmierna kruchość może być przyczyną katastrofalnego zarysowania lub nagłego, nie sygnalizowanego zniszczenia konstrukcji. Wprowadzenie zbrojenia do elementu betonowego zmienia charakter zarysowania.

Na podstawie analizy wyników badań własnych uznano, że o nośności elementów słabo zbrojonych decyduje moment rysujący. We wszystkich badanych belkach serii B o niskim stopniu zbrojenia, które zakwalifikowano do elementów słabo zbrojonych, moment rysujący był maksymalnym pomierzonym momentem zginającym. W belkach serii S o stopniu zbrojenia  $\rho=0.12\%$  zanotowano wzrost nośności ponad moment rysujący, ale był on nieznaczny. Jednocześnie zauważono, że w elementach ze słabym zbrojeniem moment rysujący był wyższy niż moment rysujący w belkach betonowych niezbrojonych.

Dodatkowo przeprowadzona analiza numeryczna, której wyniki przedstawiono w Słowik i Błazik-Borowa [12], wykazała, że na przebieg powstawania rys i rozkład naprężeń normalnych w belce ma wpływ stopień zbrojenia elementu oraz nie bez znaczenia jest również dobór prętów zbrojeniowych. Ten drugi czynnik można określić za pomocą współczynnika rozproszenia zbrojenia:

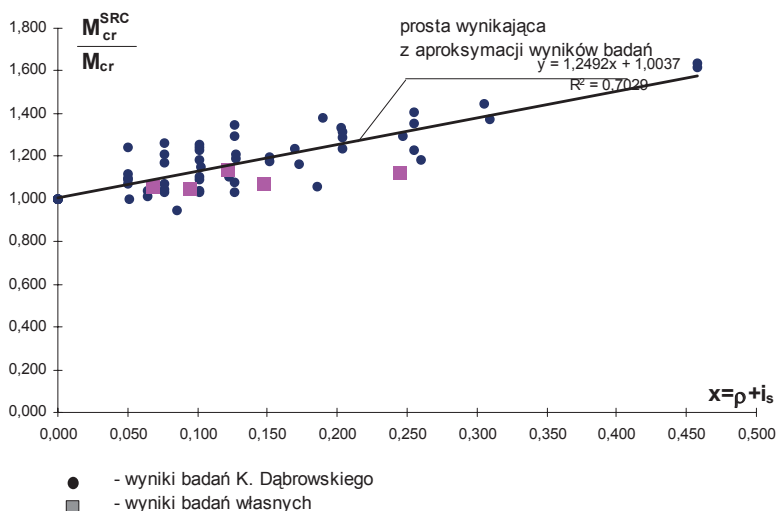
$$i_s = \rho \frac{\delta}{\phi} \quad (12)$$

gdzie:  $\rho$  – stopień zbrojenia,  $\phi$  – średnica prętów w m,  $\delta=10^{-3}$ m.

Obliczenia numeryczne potwierdziły wzrost rysoodporności belek ze zbrojeniem w porównaniu do belek betonowych niezbrojonych.

#### 4. Propozycja własna szacowania nośności zginanych elementów słabo zbrojonych

W celu ilościowego opisu wpływu zbrojenia na rysoodporność belek słabo zestawiono wyniki badań własnych i badań K. Dąbrowskiego (rys. 7). Na osi rzędnych zamieszczono iloraz wartości momentu rysującego w elemencie słabo zbrojonym  $M_{cr}^{SRC}$  do momentu rysującego w elemencie bez zbrojenia  $M_{cr}$ , który charakteryzuje wzrost rysoodporności, czyli i nośności zginanych elementów słabo zbrojonych. Na osi odciętych umieszczono współczynnik  $x$  (wyrażony w %), który jest sumą stopnia zbrojenia  $\rho$  i współczynnika rozproszenia zbrojenia  $i_s$ .



Rys. 7. Wzrost rysoodporności zginanych elementów słabo zbrojonych na tle wyników badań doświadczalnych.

Fig. 7. The increase of cracking moment in slightly reinforced concrete members based on experimental results.

Prosta wynikająca z aproksymacji wyników badań doświadczalnych, przedstawiona na rys. 7, jest to funkcja regresji obliczona metodą najmniejszych kwadratów. Uzyskana funkcja, opisująca wzrost rysoodporności elementów słabo zbrojonych charakteryzuje się dość dobrą korelacją z wynikami badań. Dobra zgodność wyników badań i obliczeń wskazuje, że koncepcja uwzględnienia współczynnika rozproszenia zbrojenia (obok stopnia zbrojenia) przy określaniu nośności zginanych elementów słabo zbrojonych jest poprawna. Na podstawie wyników badań zaproponowano wzór do wyznaczania nośności zginanych elementów słabo zbrojonych:

$$M_{ult}^{SRC} = M_{cr}^{SRC} = W_c \kappa f_{ctm} \left[ 125\rho \left( 1 + \frac{\delta}{\phi} \right) + 1 \right] \quad (13)$$

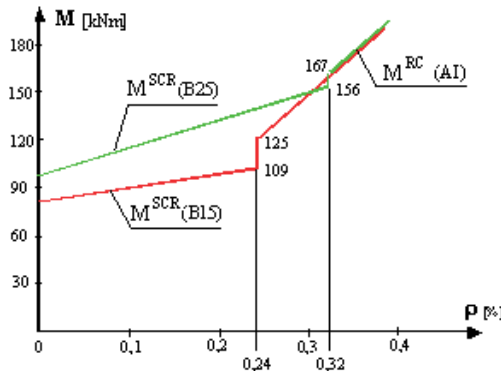
W związku z tym, że we wzorze (13) znajduje się współczynnik  $\kappa$ , wyrażający iloraz  $f_{ct}/f_{ctm}$ , nośność elementów słabo zbrojonych jest uzależniona od wielkości elementu ( $h$ ) i cech betonu ( $l_{ch}$ ). Z kolei długość charakterystyczna betonu

$l_{ch}$  jest zależna od maksymalnego wymiaru ziaren kruszywa  $D_{max}$ . W elementach masywnych można stosować kruszywo o większych ziarnach. Uwzględnienie zatem współczynnika  $\kappa$  we wzorze (13) daje podstawę do ekstrapolacji wyników i wniosków z badań na elementach małych na elementy o dużych przekrojach i budowie masywne, gdzie najczęściej beton słabo zbrojony jest stosowany.

## 5. Przykłady zastosowania

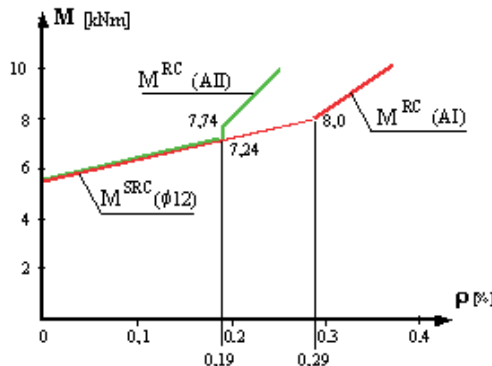
Zaproponowana metoda wyznaczania nośności zginanych elementów słabo zbrojonych została oparta na analizie procesów pęknięcia betonu i pozwala w bezpieczny sposób wykorzystać przy projektowaniu wzrost rysoodporności tych elementów bez konieczności ich przezbrajania, co przedstawiono na poniższych przykładach.

Przykład pierwszy dotyczy belki o wymiarach przekroju 150×300 mm, wykonanej z betonu B15 i stali AI lub AII (rys. 8). Przykład drugi dotyczy belki o wymiarach przekroju 350×800 mm, wykonanej z betonu B15 lub B25 i stali AI (rys. 9). Nośność belek słabo zbrojonych wyznaczono na podstawie wzoru (13) i przyjęto, że wzór ten obowiązuje do wartości  $\rho_{min}$  powiększonych o 50% w stosunku do wielkości wyznaczonych ze wzoru (9). Przy wyższych stopniach zbrojenia nośność belki wyznaczono jak nośność elementu żelbetowego.



Rys. 8. Wpływ rodzaju stali na nośność belki słabo zbrojonej.

Fig. 8. The influence of steel grade on load carrying capacity of slightly reinforced concrete beam.



Rys. 9. Wpływ cech betonu na nośność belki słabo zbrojonej.

Fig. 9. The influence of concrete grade on load carrying capacity of slightly reinforced concrete beam.

## Literatura

- [1] Bažant Z.P., Oh B.H., *Crack Band Theory for Fracture of Concrete*, *Materiaux et Constructions*. Vol.16-No 93, mai-juin, 1983.
- [2] Bažant Z.P., Pfeiffer P.A., *Determination of Fracture Energy from Size Effect and Brittleness Number*, *ACI Materials Journal*, November-December, 1987.
- [3] Bosco C., Carpinteri A., *Fracture Mechanics Evaluation of Minimum Reinforcement in Concrete Structures*, Off-print from the volume "Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete". Elsevier Applied Science, 1992.
- [4] Carpinteri A., Ferro G., *Apparent Tensile Strength and Fictitious Fracture Energy of Concrete: A Fractal Geometry Approach to Related Size Effects*, *Proceedings of the International Conference on Fracture and Damage of Concrete and Rock*. Vienna, 1992.
- [5] Chambaud M.R., *Le calcul de la rupture par flexion des poutres en béton armé à faible pourcentage d'armature tendue*, *Inst. Techn. du Béton et des Fr. Publ. nr 78*, 1954.
- [6] Dąbrowski K., *Prostokątne elementy zginane z betonu słabo zbrojonego*, *Towarzystwo Naukowe Ekspertów Budownictwa w Polsce*. Warszawa, 1962.
- [7] Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.E., *Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements*, *Cement and Concrete Research*. Vol. 6, 1976.
- [8] Hjortset K., *Minimum Reinforcement Requirements for Concrete Flexural Members Determined Using Nonlinear Fracture Mechanics*, MSc thesis in Civil Engineering. University of Washington, 1990.
- [9] Mianowski K. M., *Metoda analizy przyczepności i rys w żelbecie*, *Archiwum Inżynierii Łądowej*, Vol. XXXVI, z. 1-2/1990.
- [10] Saliger R., *Nowa teoria żelbetu na podstawie odkształceń plastycznych przy złamaniu*, PWN. Warszawa, 1952.
- [11] Słowik M., *Analiza nośności elementów z betonu słabo zbrojonego z uwzględnieniem stanów granicznych użytkowania*, *Rozprawa doktorska*. Politechnika Lubelska, Lublin, 2000.
- [12] Słowik M., Błazik-Borowa E., *Wpływ doboru prętów zbrojeniowych na rozkład naprężeń w elemencie betonowym*, *Eksploatacja i Niezawodność*, nr4/2001.
- [13] Słowik M., *Wyznaczania minimalnego stopnia zbrojenia w zginanych elementach z betonu*, XIV Konferencja Naukowa „Metody numeryczne w projektowaniu i analizie konstrukcji hydrotechnicznych”. Korbielów 2002. Materiały pokonferencyjne, 2002.
- [14] Słowik M., *O wyznaczaniu minimalnego stopnia zbrojenia zginanych elementów żelbetowych*, *Inżynieria i Budownictwo*, nr 1/2003.
- [15] Styś D., Rejman G., *Efekt skali a minimalny stopień zbrojenia belek żelbetowych*, XLI Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Kraków-Krynica, 1995.
- [16] Woliński Sz., *Właściwości betonu rozciąganego i ich zastosowania w nieliniowej mechanice pękania*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej Budownictwo i Inżynieria Środowiska*. Vol. 15, No 91. Rzeszów, 1991.
- [17] *CEB-FIP Model Code. Bulletin d'information*, No. 196, 1990.
- [18] *PN-56/B-03260, Konstrukcje żelbetowe. Obliczenia statyczne i projektowanie*, 1956.
- [19] *PN-B-03260, Konstrukcje żelbetowe. Obliczenia statyczne i projektowanie*, 2002.
- [20] *PrEN 1992-1-1, Design of Concrete Structures. General Rules and Rules for Buildings*, 2002.
- [21] *ZN-66/HP/1, Budowle hydrotechniczne. Konstrukcje słabo zbrojone. Obliczenia statyczne i projektowanie*, Centralne Biuro Studiów i Projektów Budownictwa Wodnego "Hydroprojekt". Warszawa, 1966.

# The analysis of load carrying capacity and cracking of slightly reinforced concrete members in bending

Marta Słowik

*Lublin University of Technology, Department of Civil Engineering,  
e-mail: m.slowik@pollub.pl*

**Abstract:** Slightly reinforced concrete members are the members made by concrete with reinforcement less than minimum given in codes for reinforced concrete ones. Plain concrete and slightly reinforced concrete members in bending are treated in the same way during the dimensioning and the influence of longitudinal reinforcement on the load carrying capacity is not taken into account. The mechanism of work and crack formation in slightly reinforced concrete members is not completely recognized. The author's own research program was made. The experiment was aimed at the determination of cracking moment and load carrying capacity of slightly reinforced concrete beams with different reinforcement ratio. Also plain concrete beams and the typical reinforced concrete beam were tested. The analysis of the obtained values of maximum bending moment and crack's widths was made according to the reinforcement ratio. The analysis of test results shows how the presence of longitudinal steel bars in concrete members, even when reinforcement ratio is low, changes cracking process and influences the value of cracking moment in flexural members. On the basis of test results, the method how to calculate the load carrying capacity of slightly reinforced concrete elements in bending has been proposed.

**Key words:** slightly reinforced concrete, minimum reinforcement ratio, load carrying capacity, cracking.