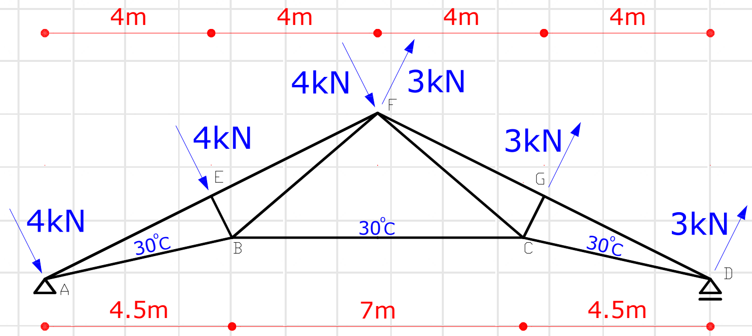
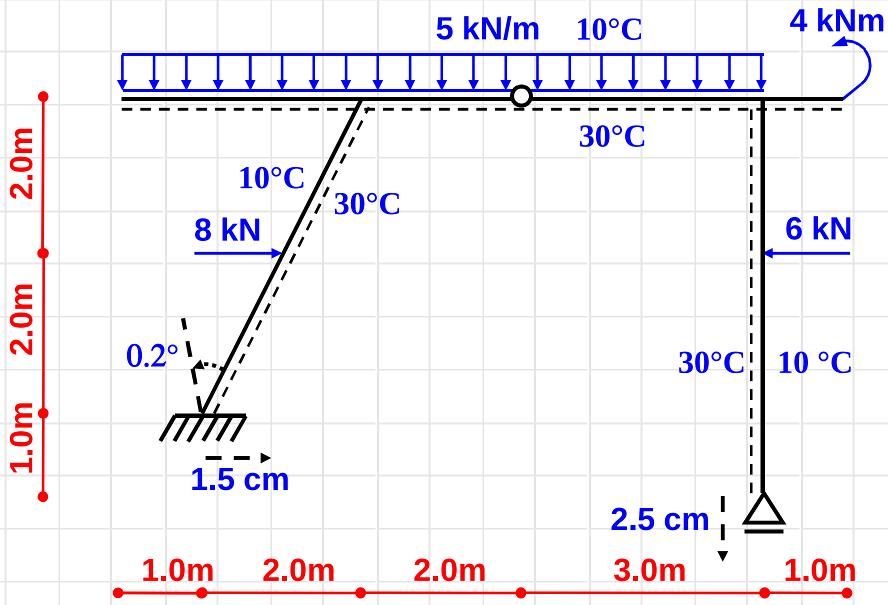
Wyższa Szkoła
Zarządzania i Administracji
z siedzibą w Zamościu

Aleksander Robak, Tomasz Lipecki
Katedra Mechaniki Budowli, Politechnika Lubelska

Wyznaczanie przemieszczeń
w płaskich układach statycznie wyznaczalnych





KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

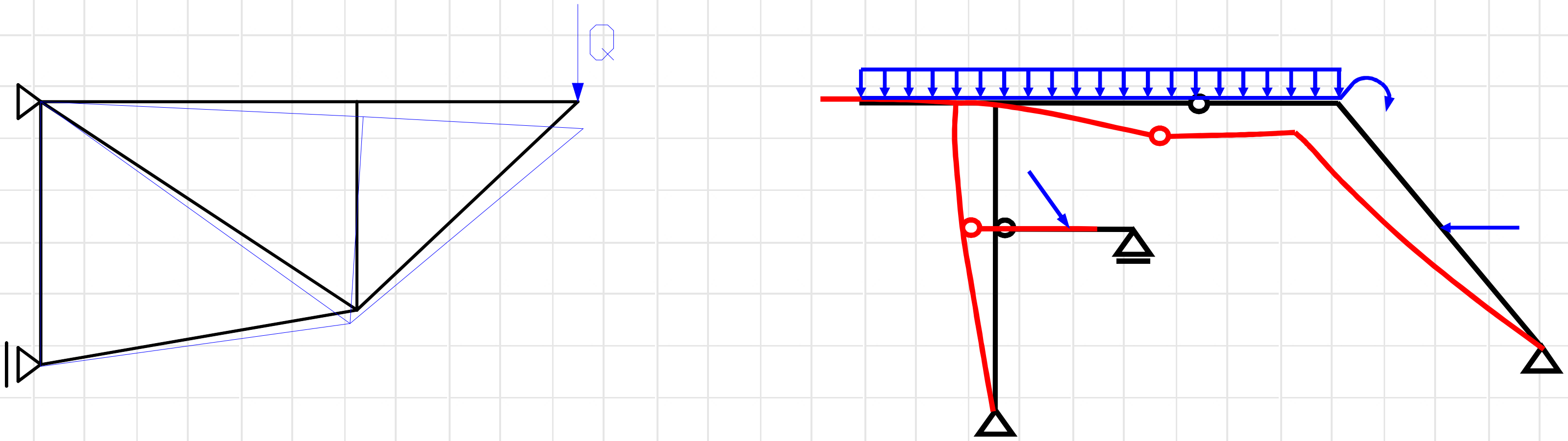
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Opis problemu

W procesie projektowania konstrukcji należy sprawdzić między innymi stan graniczny użytkowania, który zgodnie z nazwą polega na sprawdzeniu pracy konstrukcji pod katem przydatności użytkowej. W zależności od rodzaju konstrukcji i materiału z jakiego jest wykonana, stan graniczny użytkowania może polegać na sprawdzeniu przemieszczeń, zarysowań, częstotliwości drgań własnych, itp.

Przemieszczenia (przesunięcia i obroty) są najczęściej sprawdzanym parametrem w stanie granicznym użytkowania. W ramach wykładu zostanie przedstawiona metoda wyznaczania przemieszczeń w płaskich prętowych układach statycznie wyznaczalnych.



Odkształcenie kraty i ramy pod przykładowymi obciążeniami statycznymi

Teoria

Wzór Maxwella-Mohra

Przemieszczenia w układach prętowych wyznacza się na podstawie wzoru Maxwella-Mohra. Wzór ten w odniesieniu do układów płaskich przyjmuje formę:

$$\overline{1} \cdot \delta + \sum_j \overline{R}_j \cdot \Delta_j = \int_l \frac{\overline{M}M}{JE} dx + \int_l \frac{\overline{N}N}{AE} dx + \int_l \kappa \frac{\overline{T}T}{AG} dx + $$

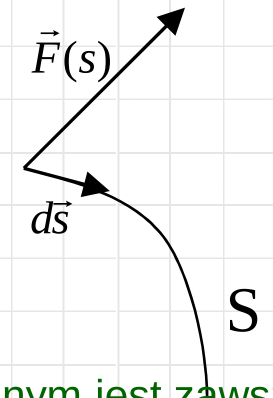
$$+ \int_l \frac{\overline{M}\alpha_t \left(t_d - t_g\right)}{h} dx + \int_l \overline{N}\alpha_t t_o dx$$

Wzór ten oparty jest na definicji pracy, zasadzie prac wirtualnych, twierdzeniu Clapeyrona, twierdzeniu o wzajemności pracy Bettiego, zasadzie zachowania energii.

Wzór opisuje pracę wykonaną przez wirtualne obciążenia na rzeczywistych przemieszczeniach. Wielkości nadkreślone odpowiadają stanowi wirtualnemu. Znaczenie poszczególnych wielkości zostanie wyjaśnione w dalszej części wykładu.

Teoria

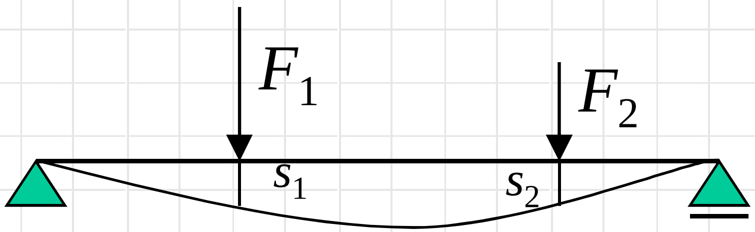
Definicja pracy



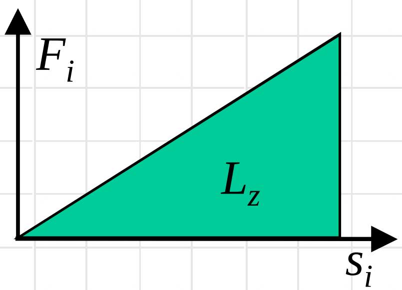
Praca jest to iloczyn skalarny wektora siły i wektora drogi jaką pokonuje punkt materialny pod wpływem działania tej siły.

$$L = \int_S \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

Przyłożenie sił zewnętrznych do układu prętowego w zadaniu statycznym jest zawsze „nieskończenie wolne”, możemy zatem założyć, że między przemieszczeniami a siłami istnieje zależność liniowa co zostało pokazane na wykresie. Pole L_z pod prostą przedstawia **pracę sił zewnętrznych** na przemieszczeniach s_i.



$$L_z = \int_S \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} = \sum_i \frac{1}{2} F_i s_i$$



Praca sił wewnętrznych jest równa całce iloczynu skalarnego wektora naprężeń przez wektor odkształceń.

$$L_w = -\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = -\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV$$

Teoria

Twierdzenie Clapeyrona

Twierdzenia Clapeyrona mówi, że dla układu sprężystego, znajdującego się w równowadze, praca sił zewnętrznych $\boldsymbol{L_z}$ równa jest energii potencjalnej sił wewnętrznych (energii sprężystej) $\boldsymbol{V}$, która równa jest pracy sił wewnętrznych wziętej ze znakiem minus:

$\boldsymbol{L_z = V = -L_w}$ czyli

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{u}_i=\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\,dV=\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,dV$$

gdzie: P_i – siła zewnętrzna, u_i – przesunięcie na kierunku działa siły P_i, $\boldsymbol{\sigma}$ – wektor naprężeń wewnątrz elementu, $\boldsymbol{\varepsilon}$- wektor odkształceń wewnątrz elementu, indeks T – oznacza operację transponowania.

Powyższe twierdzenie dotyczy układów sprężystych (Clapeyrona), które muszą spełniać następujące warunki:

– materiał, z którego wykonany jest układ, zachowuje się zgodnie z prawem Hooke’a czyli jest to materiał liniowo-sprężysty,

– w układzie nie ma takich warunków brzegowych, których istnienie zależy od odkształcenia konstrukcji,

– temperatura układu jest stała,

– nie ma naprężeń i odkształceń wstępnych.

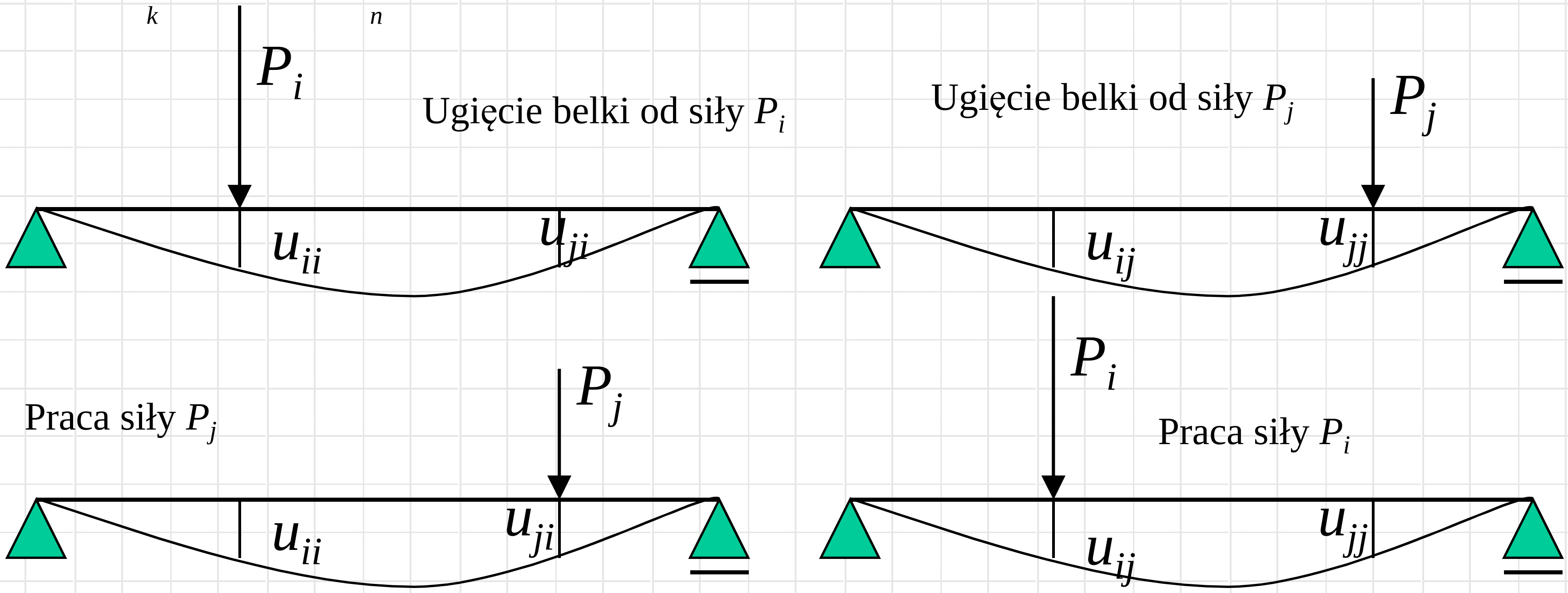
Teoria

Twierdzenie E.Bettiego o wzajemności pracy

Układ sił P_{ik} wykonuje taką samą pracę na przemieszczeniach wywołanych układem sił P_{jn} jak układ sił P_{jn} na przemieszczeniach wywołanych przez siły P_{ik}.

$$\sum_k \mathbf{P}_{ik} \cdot \mathbf{u}_{jk} = \sum_n \mathbf{P}_{jn} \cdot \mathbf{u}_{in}$$

$$\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{u}_i$$



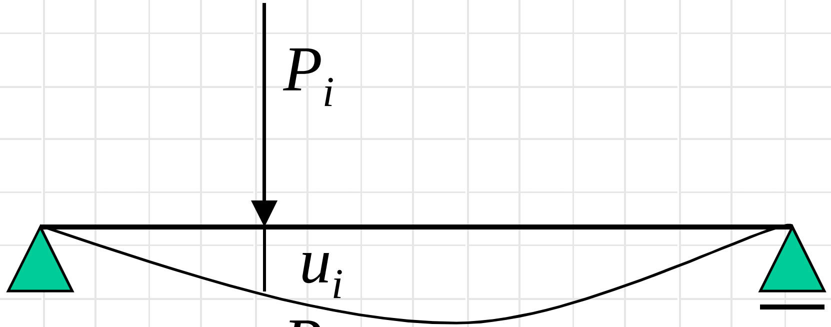
$$\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{u}_{ji} = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}$$

Teoria

Zasada prac wirtualnych dla ciał sprężystych

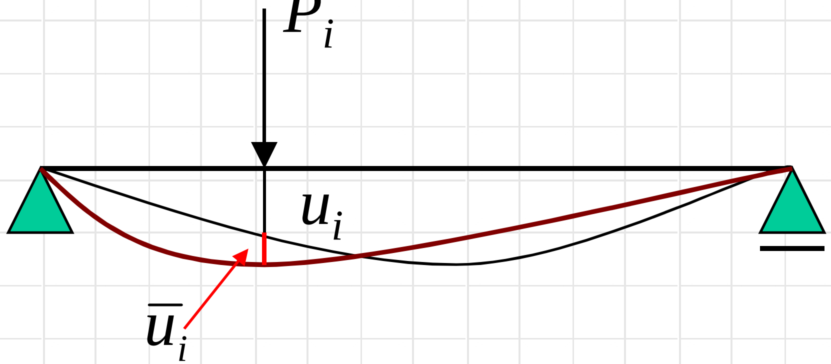
Suma prac sił zewnętrznych P_{ik} na przemieszczeniach wirtualnych $\overline{u}_{ik}$ i naprężeń rzeczywistych σ_i na odkształceniach wirtualnych $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ jest równa zero.

$$\sum_k \mathbf{P}_{ik} \cdot \overline{\mathbf{u}}_{ik} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_j \, dV = 0$$



czyli

$$\sum_k \mathbf{P}_{ik} \cdot \overline{\mathbf{u}}_{ik} = \int_V \sigma_i \overline{\varepsilon}_j \, dV + \int_V \tau_i \overline{\gamma}_j \, dV$$



Praca sił wewnętrznych

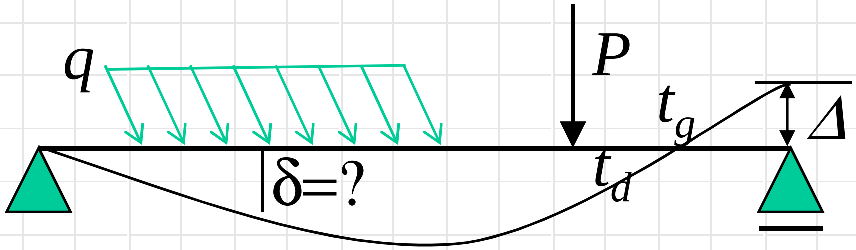
Przemieszczenie wirtualne powinno spełniać następujące warunki:

- dowolne, niezależne od sił działających na bryłę,
- zgodne z więzami, a więc kinematycznie dopuszczalne,
- niezależne od czasu.

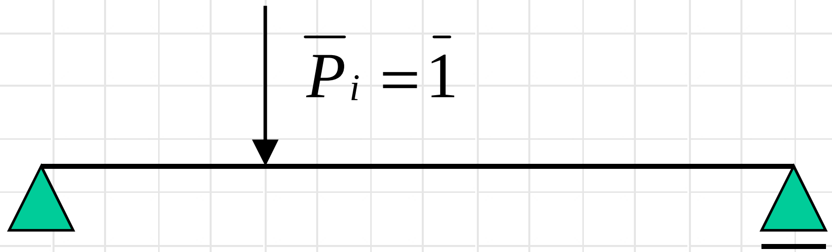
Teoria

Oznaczenia we wzorze Maxwella-Mohra

$$\overline{1}\cdot\delta+\sum_j \overline{R}_j\cdot\Delta_j=\int_l \frac{\overline{M}M}{JE}dx+\int_l \frac{\overline{N}N}{AE}dx+\int_l \kappa\frac{\overline{T}T}{AG}dx+\int_l \frac{\overline{M}\alpha_t\left(t_d-t_g\right)}{h}dx+\int_l \overline{N}\alpha_t t_o dx$$



Układ z obciążeniem rzeczywistym



Układ z jednostkowym obciążeniem wirtualnym, działającym na kierunku poszukiwanego przemieszczenia

Dane materiałowe:

E – moduł Younga materiału,
G – moduł Kirchhoffa materiału,
α_t – współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału,

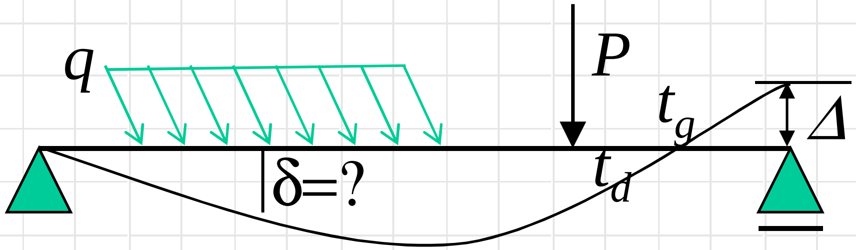
Dane geometryczne przekroju:

h – wysokość przekroju pręta
A – pole przekroju,
J – moment bezwładności przekroju względem osi prostopadłej do płaszczyzny układu
κ – współczynnik zależny od kształtu przekroju.

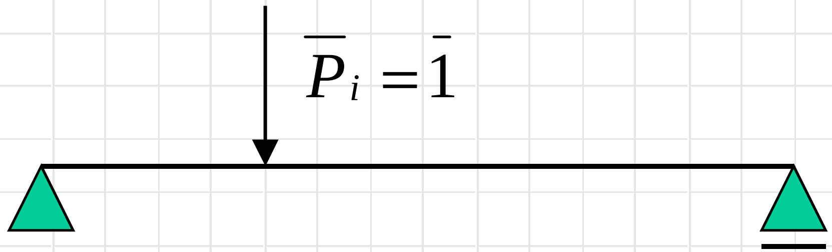
Teoria

Oznaczenia we wzorze Maxwella-Mohra

$$\overline{1}\cdot\delta+\sum_j \overline{R}_j\cdot\Delta_j=\int_l \frac{\overline{M}M}{JE}dx+\int_l\frac{\overline{N}N}{AE}dx+\int_l \kappa\frac{\overline{T}T}{AG}dx+\int_l\frac{\overline{M}\alpha_t\left(t_d-t_g\right)}{h}dx+\int_l \overline{N}\alpha_t t_o dx$$



Układ z obciążeniem rzeczywistym



Układ z jednostkowym obciążeniem wirtualnym, działającym na kierunku poszukiwanego przemieszczenia

Obciążenia:

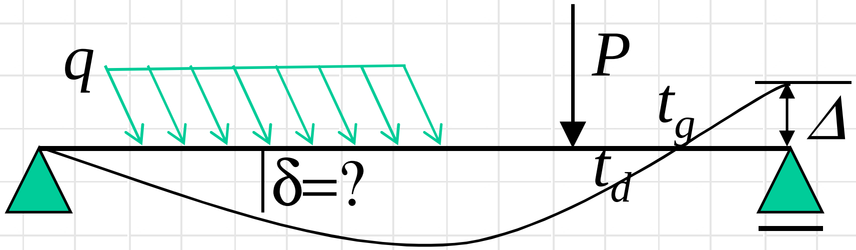
Δ_j – rzeczywiste obciążenie geometryczne, t_o – obciążenie temperaturą w osi pręta, t_d – obciążenie temperaturą dolnych włókien , t_g – obciążenie temperaturą górnych włókien,

$\overline{P}_i = \overline{1}$ - wirtualne obciążenie jednostkowe przyłożone w punkcie i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia.

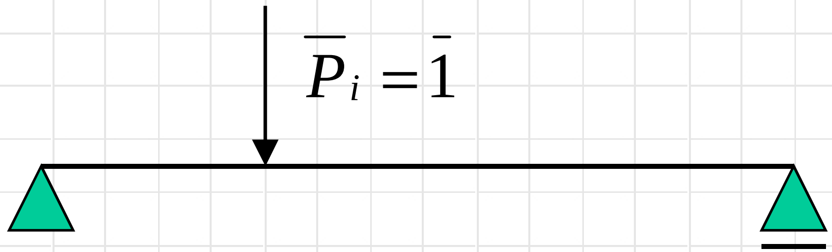
Teoria

Oznaczenia we wzorze Maxwella-Mohra

$$\overline{1}\cdot\delta+\sum_j \overline{R}_j\cdot\Delta_j=\int_l \frac{\overline{M}M}{JE}dx+\int_l \frac{\overline{N}N}{AE}dx+\int_l \kappa\frac{\overline{T}T}{AG}dx+\int_l \frac{\overline{M}\alpha_t\left(t_d-t_g\right)}{h}dx+\int_l \overline{N}\alpha_t t_o dx$$



Układ z obciążeniem rzeczywistym



Układ z jednostkowym obciążeniem wirtualnym, działającym na kierunku poszukiwanego przemieszczenia

Wyniki analizy statycznej powyższych układów:

N, T i M – siły wewnętrzne w układzie od rzeczywistego obciążenia statycznego,

$\overline{N}$, $\overline{T}$ i $\overline{M}$ – siły wewnętrzne w układzie od rzeczywistego obciążenia statycznego

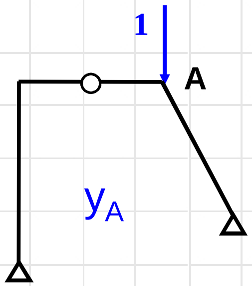
$\overline{R}_j$ – rekcja spowodowana obciążeniem wirtualnym na kierunku rzeczywistego obciążenie geometrycznego.

Teoria

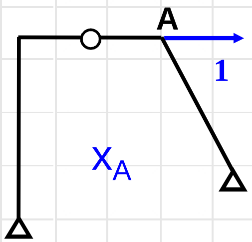
Wzór Maxwella-Mohra w odniesieniu do belek i ram płaskich

$$\overline{1}\cdot\delta+\sum_j \overline{R}_j\cdot\Delta_j=\int_l \frac{\overline{M}M}{JE}dx+\int_l \frac{\overline{M}\alpha_t\left(t_d-t_g\right)}{h}dx+\int_l \overline{N}\alpha_t t_o dx$$

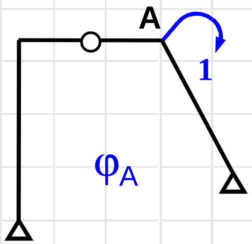
Wirtualne obciążenia jednostkowe w obliczeniach:



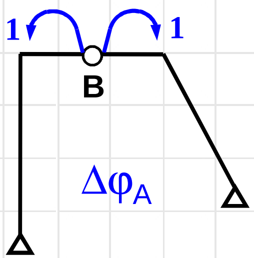
przesunięcie pionowe punktu A



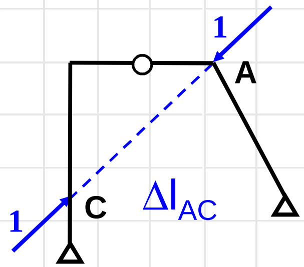
przesunięcie poziome punktu A



obrót węzła A



Kąt wzajemnego obrotu w przegubie B



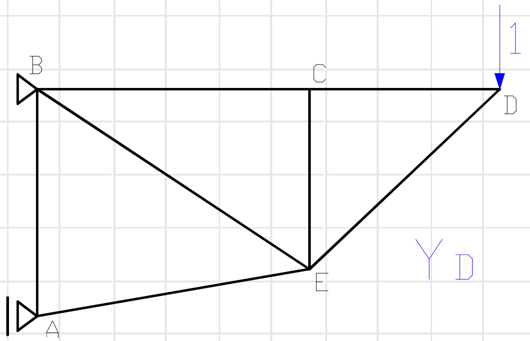
zmiana odległości między punktami A i C

Teoria

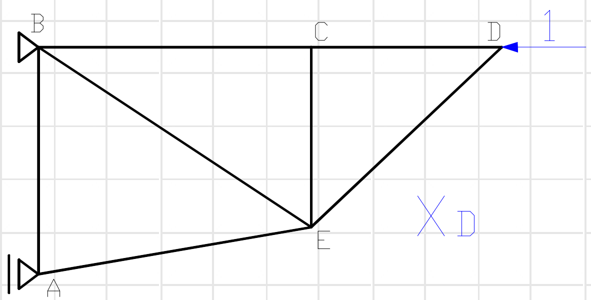
Wzór Maxwella-Mohra w odniesieniu do kratownic

$$\overline{1}\cdot\delta+\sum_j \overline{R}_j\cdot\Delta_j=\sum_i \frac{\overline{N}_i N_i l_i}{A_i E_i}+\sum_i \overline{N}_i\alpha_t t_{oi} l_i$$

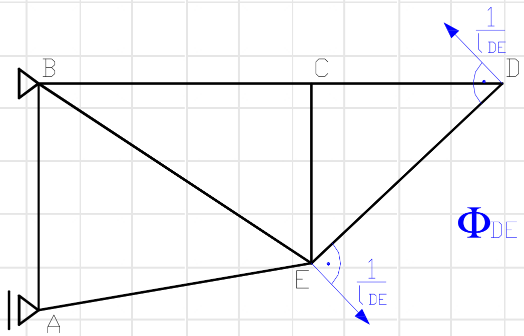
Wirtualne obciążenia jednostkowe w obliczeniach:



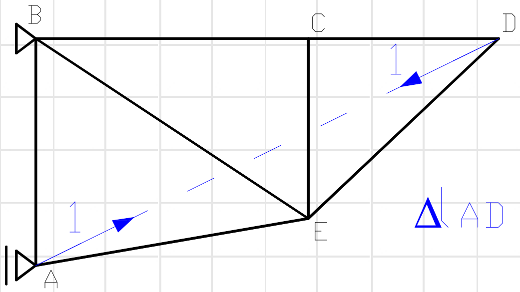
przesunięcia pionowego punktu D



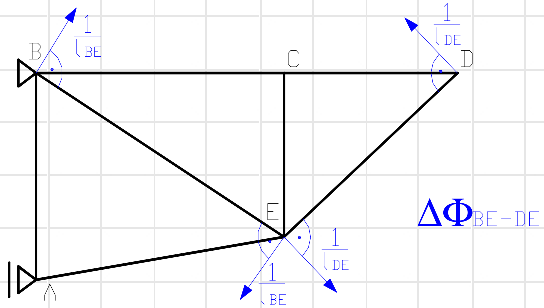
przesunięcia poziomego punktu D



obrotu pręta ED



zmiany odległości między punktami A i D

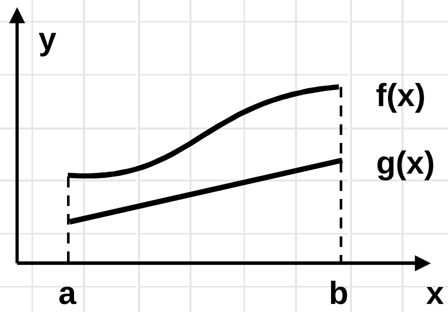


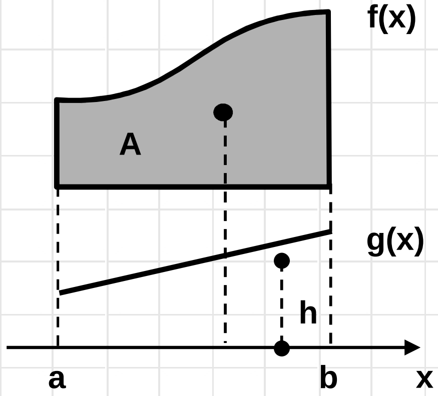
zmiany kata między prętami EB i ED

Teoria

Metoda graficzna całkowania – sposób Wereszczagina

Mając dane dwie funkcje: **dowolną** f(x) oraz **liniową** g(x) w przedziale [a, b] można całkę iloczynu f(x)g(x) zastąpić iloczynem pola A pod funkcją f(x) i rzędnej h funkcji g(x) położonej pod środkiem ciężkości pola f(x).
Należy pamiętać, że funkcja g(x) musi byś funkcją liniową. Gdy również f(x) jest funkcją liniową wtedy kolejność mnożenia wykresów nie ma znaczenia.





$$\delta = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

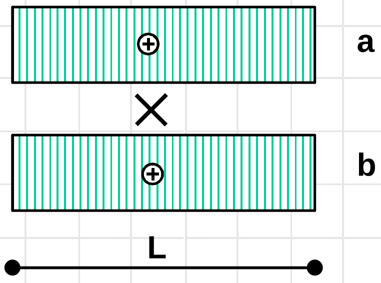
$$\delta = A \cdot h$$

Na mocy tego twierdzenia całkowanie iloczynu równań sił wewnętrznych we wzorze Maxwella-Mohra w przypadku belek i ram można przeprowadzić metodą graficznego mnożenia wykresów. Wykresy w stanach wirtualnych będą zawsze prostoliniowe.

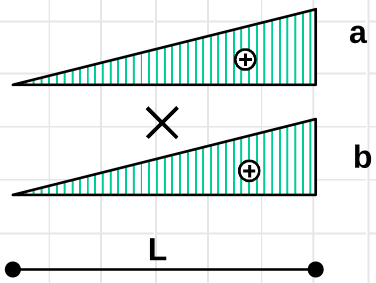
$$\int_l \frac{\overline{M}M}{JE}\,dx \qquad M = f(x) \qquad \overline{M} = g(x)$$

Teoria

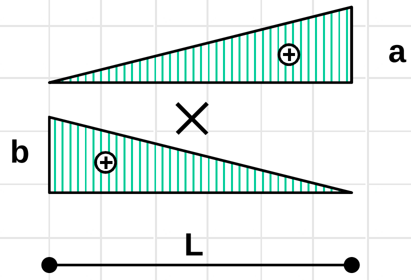
Metoda graficzna całkowania – przykłady dla wykresów momentów



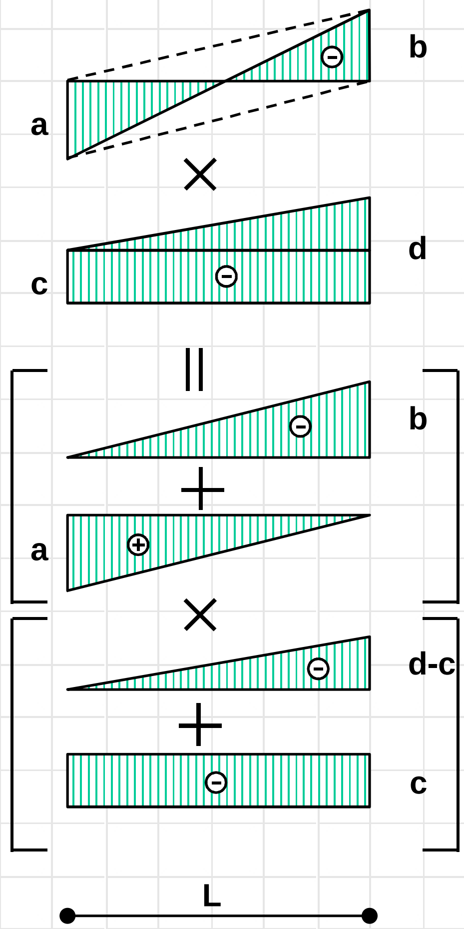
$$\delta = aL \cdot b$$



$$\delta = \frac{1}{2}aL \cdot \frac{2}{3}b$$



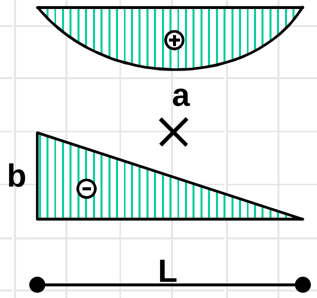
$$\delta = \frac{1}{2}aL \cdot \frac{1}{3}b$$



$$\delta = \frac{1}{2}bL \cdot \left(\frac{2}{3}(d-c)+c \right) - \frac{1}{2}aL \cdot \left(\frac{1}{3}(d-c)+c \right)$$

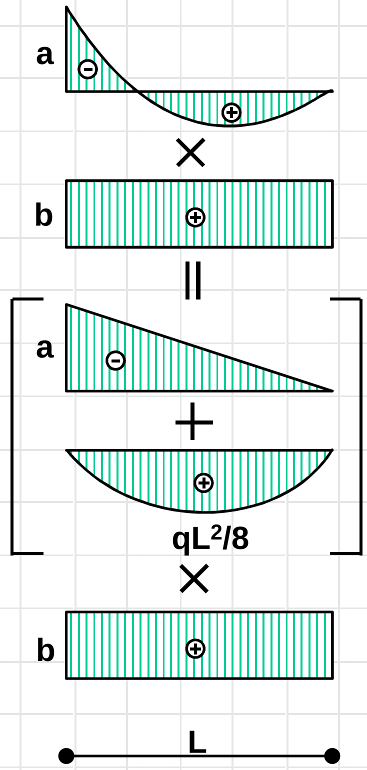
Teoria

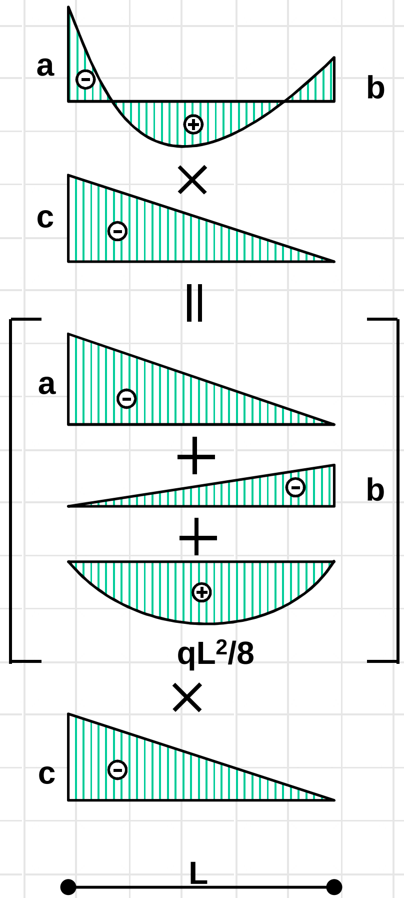
Metoda graficzna całkowania – przykłady dla wykresów momentów



$$\delta = -\frac{2}{3}aL \cdot \frac{1}{2}b$$

$$\delta = -\frac{1}{2}aL \cdot b + \frac{2}{3}\frac{qL^2}{8}L \cdot b$$





$$\delta = \frac{1}{2}aL \cdot \frac{2}{3}c + \frac{1}{2}bL \cdot \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}\frac{qL^2}{8}L \cdot \frac{1}{2}c$$

Przykład – krata

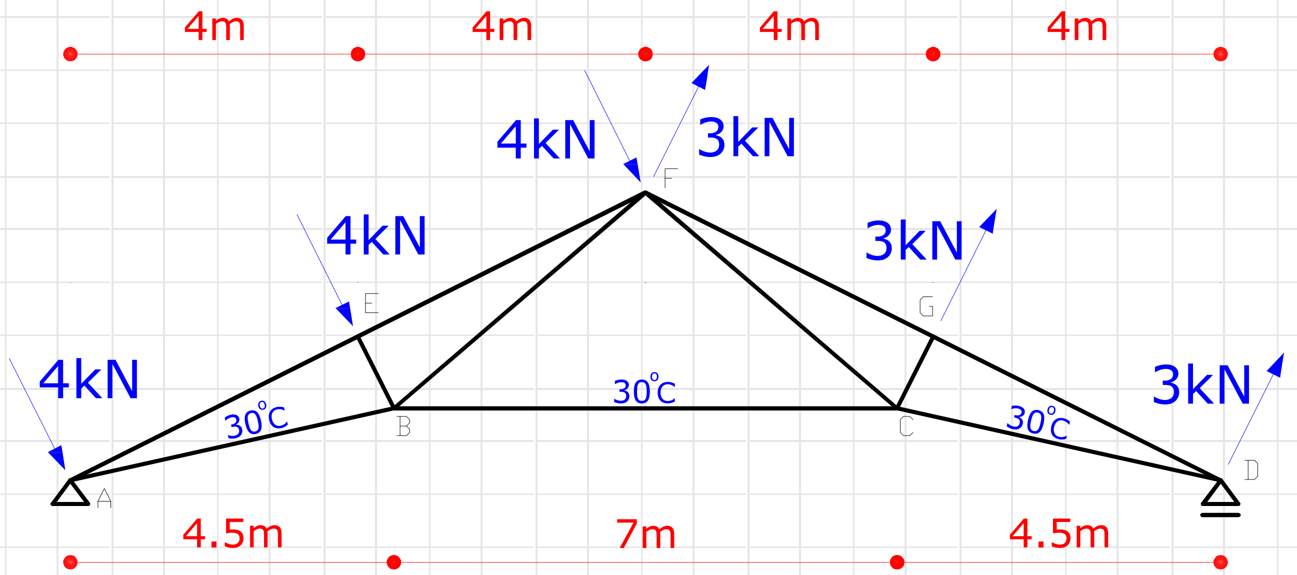
Treść zadania

Wyznaczyć zmianę odległości między punktami B i G w kratownicy pokazanej na rysunku.

Przekrój prętów dwuteownik 140 o polu $A=18.2 \cdot 10^{-4} m^2$

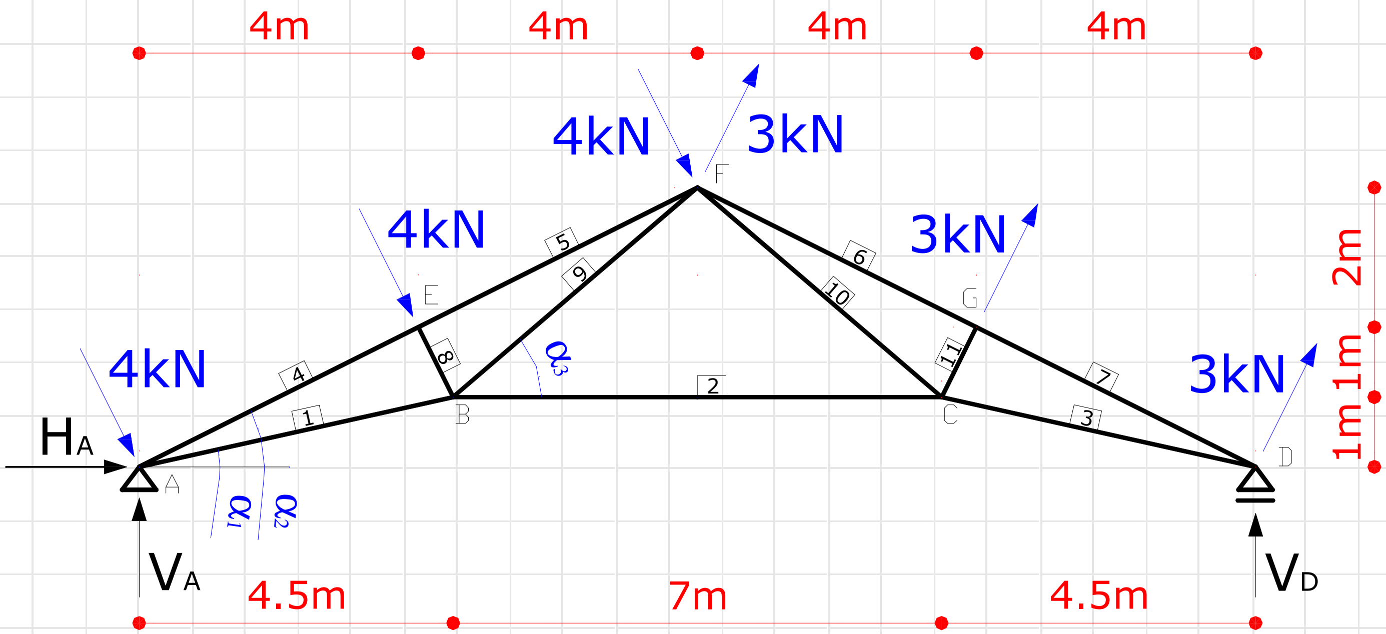
Współczynnik rozszerzalności cieplnej $\alpha_t=0.000012/K$

Moduł Younga dla stali $E=2.1 \cdot 10^8 kPa$ -



Przykład – krata

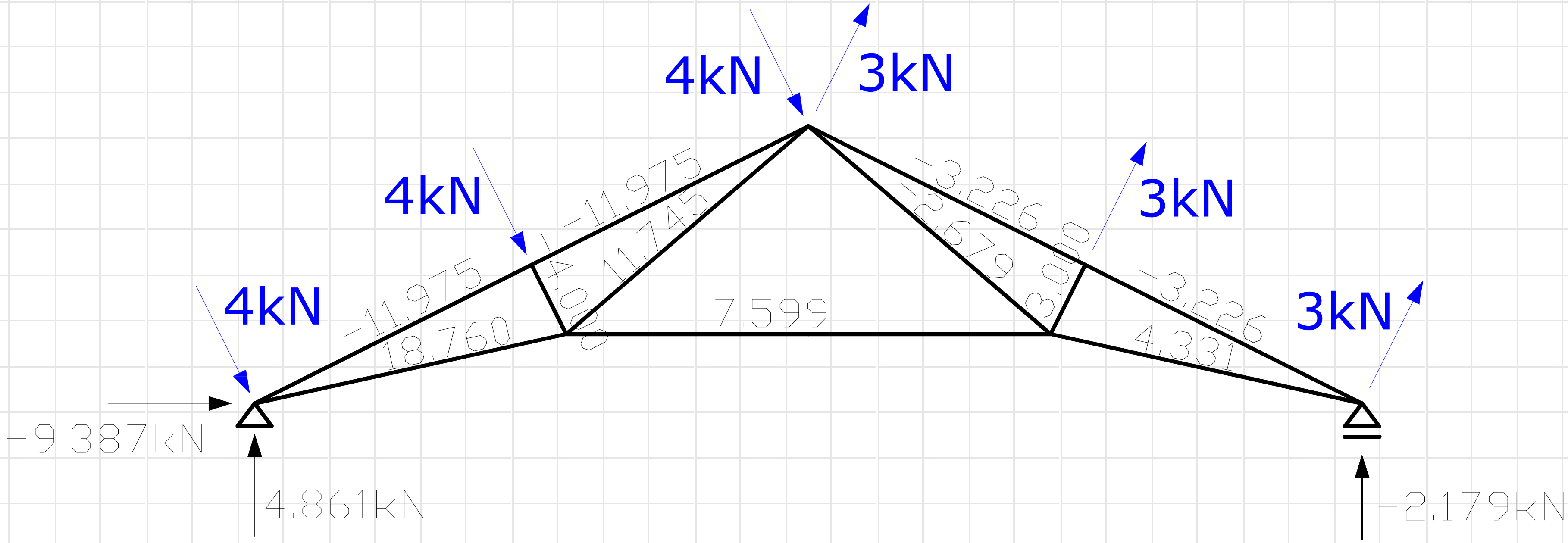
Wyznaczenie sił normalnych w prętach kratownicy od obciążenia statycznego



Do wyznaczenia dowolnego przemieszczenia w kratownicy niezbędne są siły normalne w prętach od obciążenia statycznego. Wyznaczenie sił wewnętrznych wymaga policzenia reakcji a następnie takimi metodami jak metoda równoważenia węzłów i metoda Rittera należy wyznaczyć wartość sił.

Przykład – krata

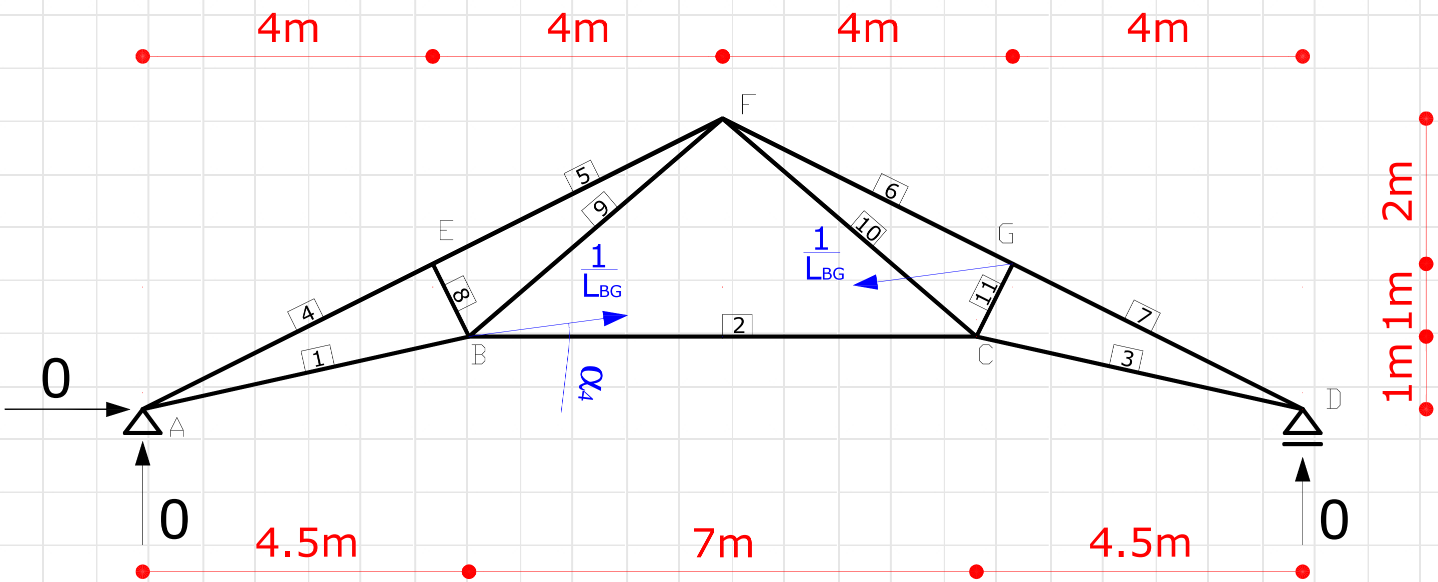
Zestawienie sił normalnych w prętach kratownicy od obciążenia statycznego



Na rysunku przedstawiono wartości sił normalnych w poszczególnych prętach, otrzymanych w wyniku obliczeń.

Przykład – krata

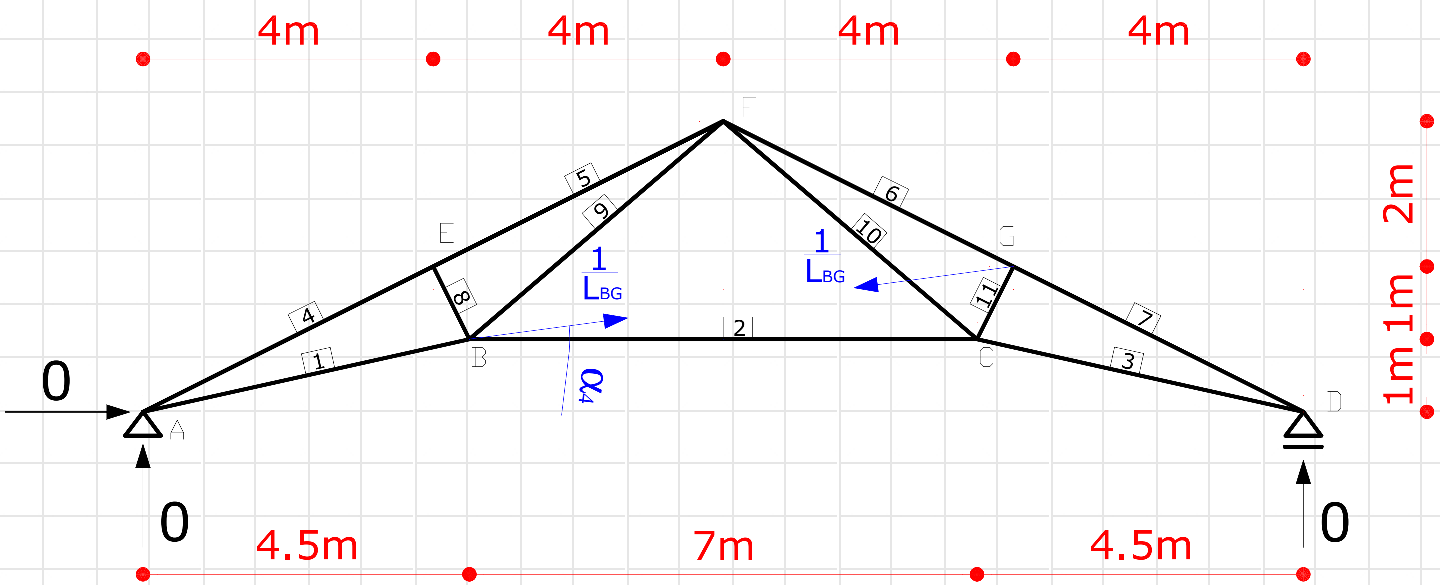
Wyznaczenie sił normalnych
w prętach kratownicy od jednostkowego obciążenia wirtualnego



W przypadku takiego obciążenia, tzn. dwoma siłami o tej samej wartości, tym samym kierunku, ale przeciwnych zwrotach, wartości reakcje wyniosą zero. Konsekwencją tego stanu jest fakt, że siły normalne w niektórych prętach będą także równe zero.

Przykład – krata

Wyznaczenie sił normalnych
w prętach kratownicy od jednostkowego obciążenia wirtualnego



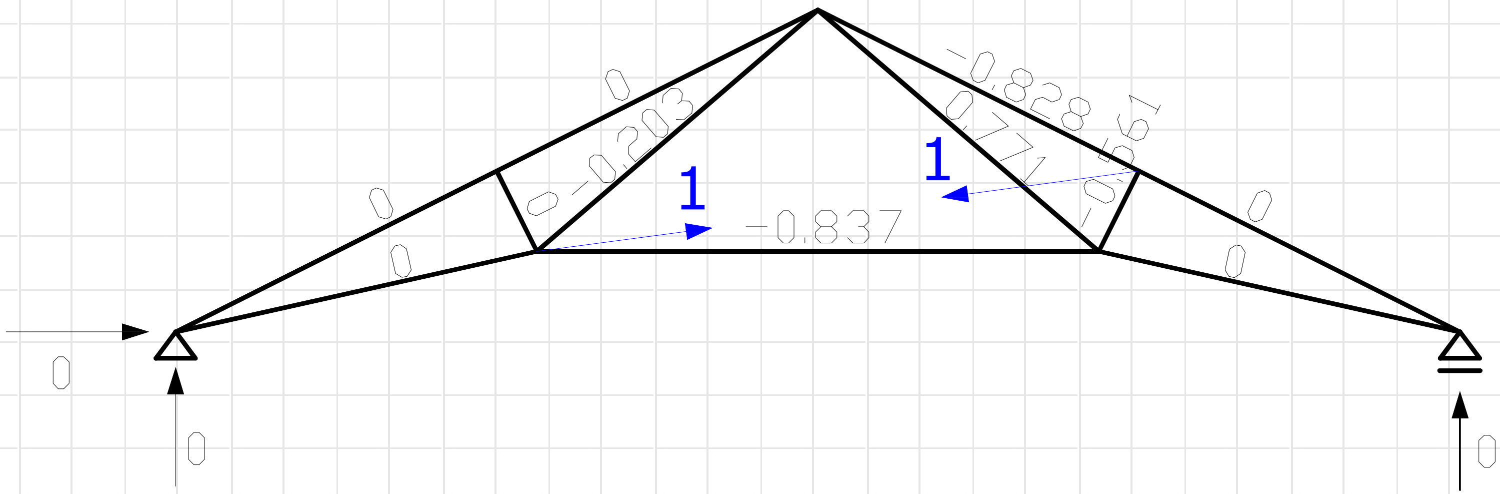
Siły normalne przyjmują wartości zero w sytuacjach, gdy:

- nieobciążony węzeł tworzą końce dwóch prętów,
- pręt dochodzi do nieobciążonego węzła a dwa pozostałe pręty mają ten sam kierunek,
- pręt dochodzi do nieobciążonego węzła a pozostałe pręty są prętami zerowymi (siły normalne w prętach są równe zero).

W tym przypadku zerowe wartości sił normalnych są w prętach: nr 1, nr 3, nr 4, nr 5, nr 7 i nr 8.

Przykład – krata

Zestawienie sił normalnych
w prętach kratownicy od jednostkowego obciążenia wirtualnego



Na rysunku przedstawiono wartości sił normalnych w poszczególnych prętach, otrzymanych w wyniku obliczeń sił wewnętrznych w pozostałych prętach.

Przykład – krata

Ostateczne obliczenia zmiany odległości między punktami B i G

Zmiana odległości pomiędzy punktami B i G zostanie wyznaczona ze wzoru:

$$\Delta L_{BG} = \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{N} N_i \overline{N}_i l_i + \alpha_t \sum_{i=1}^{N} \overline{N}_i l_i t_{0i}$$

gdzie:

- E=2.1·10^{8}kPa – moduł Younga materiału,
  α_t=0.00001/K – współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału,
  A=18.2·10^{-4}m^2 – pole przekroju,
- l_i – długość i-tego elementu,
- t_{0i} – obciążenie temperaturą w osi i-tego elementu,
- N – siły normalne wywołane rzeczywistym obciążeniem statycznym,
- $\overline{N}$ – siły normalne wywołane wirtualnym obciążeniem jednostkowym.

Obliczenia najlepiej wykonać na podstawie zestawienia w tabeli, która została zamieszczona na następnej stronie.

Przykład – krata

Zestawienie danych do obliczenia zmiany odległości między punktami B i G

numer pręta	długość pręta l_i [m]	t_{oi} [^oC]	N_i [kN]	$\overline{N}_i$ [-]	$N_i\overline{N}_i l_i$ [kNm]	$\overline{N}_i l_i t_{0i}$ [mK]
1	4.6098	30	18.760	0.0	0.00	0
2	7.0000	30	7.599	-0.837	-44.523	-175.77
3	4.6098	30	4.331	0.0	0.00	0
4	4.4721	0	-11.975	0.0	0.00	0
5	4.4721	0	-11.975	0.0	0.00	0
6	4.4721	0	-3.226	-0.828	11.946	0
7	4.4721	0	-3.226	0.0	0.00	0
8	1.1180	0	-4.000	0.0	0.00	0
9	4.6098	0	11.745	-0.203	-10.991	0
10	4.6098	0	-2.679	0.771	-9.522	0
11	1.1180	0	-3.000	-0.561	1.882	0
				$\sum$	-51.201	-175.77

E=2.1·10^{8}kPa
A=18.2·10^{-4}m^2
α_t=0.000012/K
EA=382200kN

$$\sum_{i=1}^{N} N_i\overline{N}_i l_i = -51.201\text{kNm}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{N}_i l_i t_{0i} = -175.77\text{m/K}$$

$$\Delta L_{BG} = \frac{1}{EA}\sum_{i=1}^{N} N_i\overline{N}_i l_i + \alpha_t \sum_{i=1}^{N} \overline{N}_i l_i t_{0i} = \frac{-51.201\text{kNm}}{382200\text{kN}} - 0.000012/\text{K}\cdot 175.77\text{mK}$$

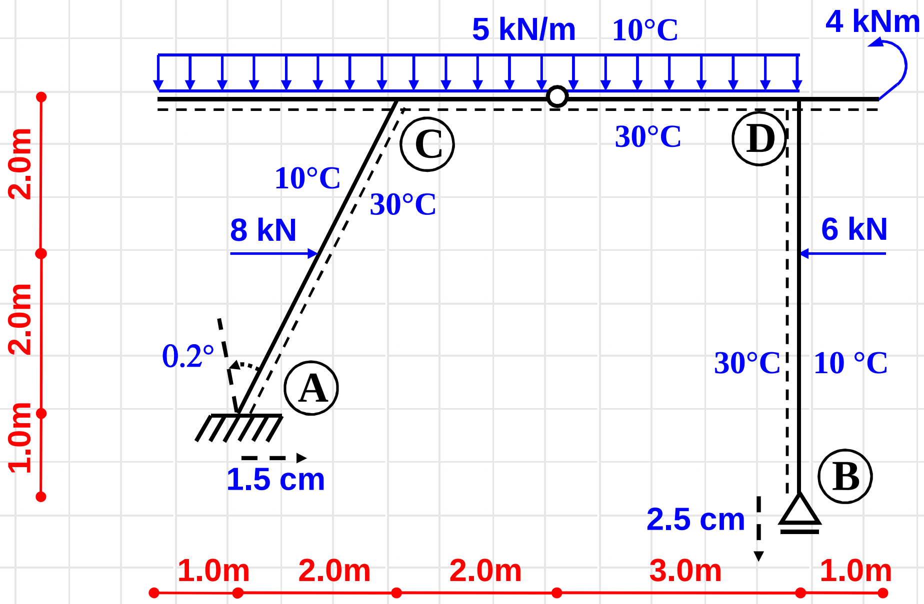
$$\Delta L_{BG} = -1.98\cdot 10^{-3}\text{m} = -1.98\text{mm}$$

Punkty B i G pod wpływem obciążenia statycznego i obciążenia temperaturą zbliżą się do siebie o 1,98mm.

Przykład – rama płaska

Treść zadania

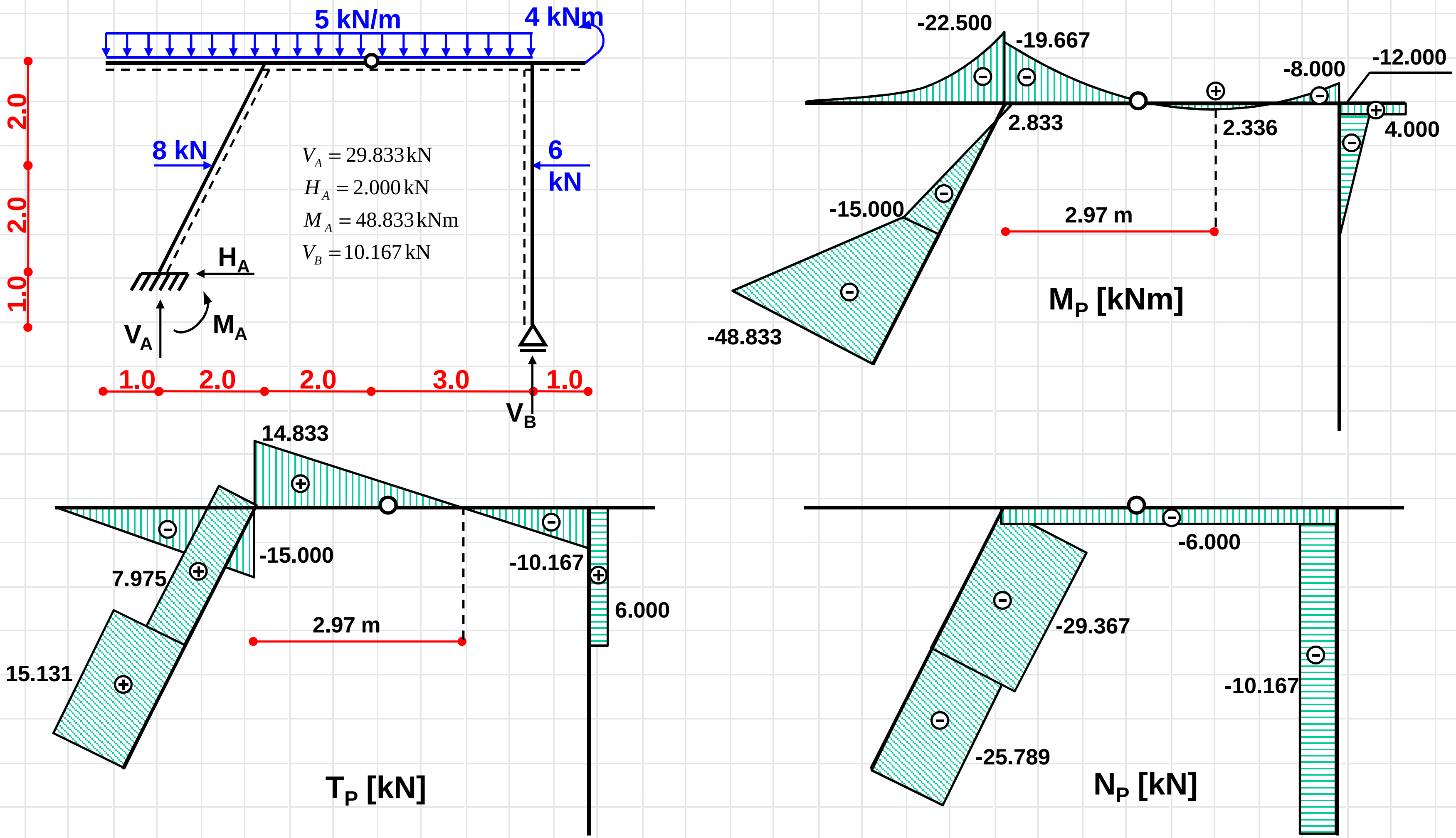
Wyznaczyć przemieszczenie poziome punktu B i w ramie płaskiej pokazanej na rysunku.



Dane geometryczne i materiałowe:
- Dwuteownik 200 o polu A=33.5·10^{-4}m^{2} i momencie bezwładności J=2149·10^{-8}m^{2}
- Współczynnik rozszerzalności cieplnej α_t=0.000012/K
- Moduł Younga dla stali E=2.05·10^{8}kPa
- Obciążenia:
  - Statyczne – dwie siły skupione, moment, obciążenie ciągłe stałe
  - Temperatura – na prętach AB BD BD
  - Geometryczne – przesunięcia poziome i kąt obrotu w podporze A, przesunięcie pionowe w odporze B

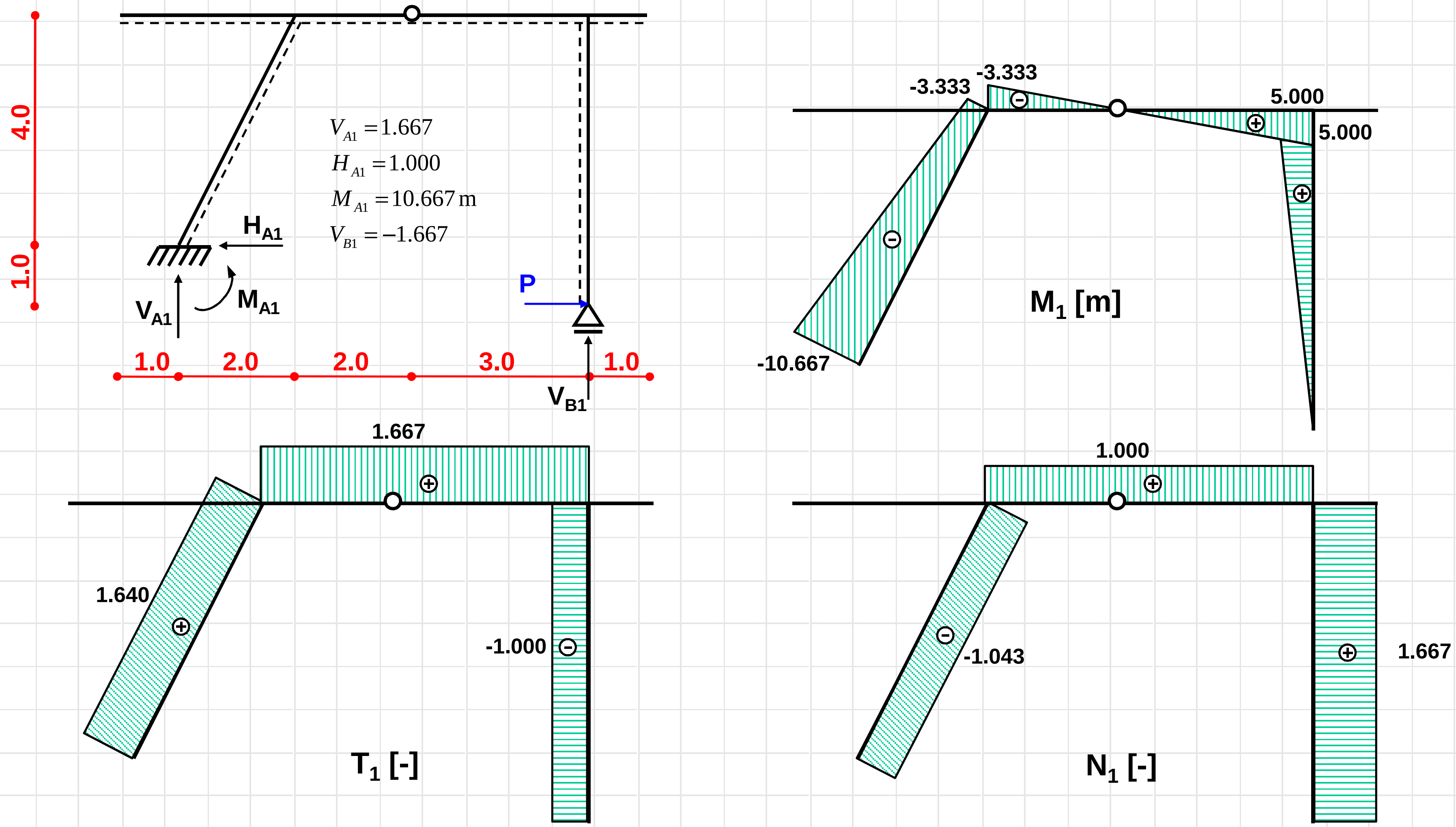
Przykład – rama płaska

Zestawienie sił wewnętrznych w prętach ramy od obciążenia statycznego – stan P



Przykład – rama płaska

Zestawienie sił wewnętrznych w prętach ramy od obciążenia wirtualnego – stan 1



Przykład – rama płaska

Wyznaczenie przemieszczenia poziomego podpory B

$$\overline{1} \cdot \delta = \sum_i \int_{l_i} \frac{\overline{M}_i M_i}{JE} dx + \sum_k \int_{l_k} \frac{\overline{M}_k \alpha_t \left(t_{dk} - t_{gk}\right)}{h} dx + \sum_k \int_{l_k} \overline{N}_k \alpha_t t_{0k} dx - \sum_j \overline{R}_j \cdot \Delta_j$$

gdzie:

E=2.05·10^{8}kPa – moduł Younga dla stali,

α_t=0.00001/K – współczynnik rozszerzalności cieplnej dla stali,

A=35.5·10^{-4}m^2 – pole przekroju dwuteownika 200,

J=2149·10^{-8}m^4 – moment bezwładności przekroju dwuteownika 200,

i – liczba prętów ramy, k – liczba prętów ramy obciążonych temperaturą, j – liczba obciążeń geometrycznych, l_i l_k – długości odpowiednio i-tego lub k-tego pręta,

t_{0k} – obciążenie temperaturą w osi k-tego elementu,

$\Delta t_k = t_{dk} - t_{gk}$ – zmiana temperatury w przekroju poprzecznym,

h – wysokość przekroju poprzecznego,

N, M – siły normalne i momenty zginające wywołane rzeczywistym obciążeniem statycznym,

$\overline{N}, \overline{M}$ – siły normalne wywołane wirtualnym obciążeniem jednostkowym,

$\overline{R}_j$ – reakcja w stanie wirtualnym na kierunku rzeczywistego obciążenie geometrycznego Δ_j

Uwaga!! W przypadku belek i ram płaskich można w obliczeniach pominąć wpływ sił poprzecznych T i normalnych N przy składniku obciążeń statycznych, których wpływ na przemieszczenie jest znikomo mały (dużo mniejszy niż 5%).

Przykład – rama płaska

Wyznaczenie przemieszczenia poziomego podpory B od obciążeń statycznych

$$\bar{1}\cdot\delta=\sum_i\int_{l_i}\frac{\overline{M_i}M_i}{JE}dx+\sum_k\int_{l_k}\frac{\overline{M_k}\alpha_t\left(t_{dk}-t_{gk}\right)}{h}dx+\sum_k\int_{l_k}\overline{N_k}\alpha_t t_{0k}dx-\sum_j\bar{R}_j\cdot\Delta_j$$

• Obliczenia pierwszego składnika wzoru można przeprowadzić dwoma sposobami:
- obliczyć całki wielomianów wynikających z przemnożenia równań momentów w stanie obciążeń zewnętrznych (P) i w stanie wirtualnym (1) na każdym z prętów ,
- obliczyć całki stosując metodę graficzną (sposobem Wereszczagina).

W wykładzie przedstawiono metodę całkowania graficznego wykresów momentów.

• Obliczenia drugiego i trzeciego składnika wzoru sprowadza się do wyznaczenia całki z funkcji momentu i siły osiowej w stanie wirtualnym (1), a więc do wyznaczenia pola pod wykresem funkcji momentu i siły osiowej.

Uzgodnienie jednostek przy obliczaniu przemieszczenia poziomego:

$$\int_{l_i}\frac{\overline{M_i}M_i}{JE}dx \qquad \left[\frac{\mathrm{kNm\cdot m\cdot m}}{\mathrm{kNm^2}}=\mathrm{m}\right]$$

$$\int_{l_k}\frac{\overline{M_k}\alpha_t\left(t_{dk}-t_{gk}\right)}{h}dx \qquad \left[\frac{\mathrm{m\cdot m\cdot\frac{1}{K}\cdot K}}{\mathrm{m}}=\mathrm{m}\right]$$

$$\int_{l_k}\overline{N_k}\alpha_t t_{0k}dx \qquad \left[\mathrm{m}\cdot\frac{1}{\mathrm{K}}\cdot\mathrm{K}=\mathrm{m}\right]$$

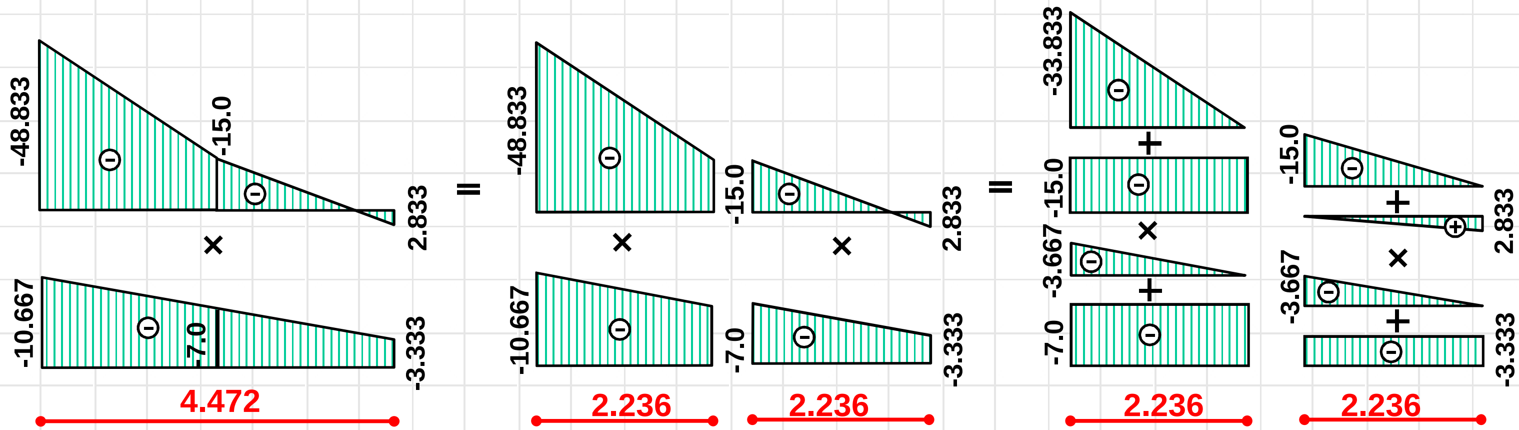
$$\bar{R}_j\cdot\Delta_j \qquad [\mathrm{m}]$$

Przykład – rama płaska

Wyznaczenie przemieszczenia poziomego podpory B od obciążeń statycznych

$$\overline{1}\cdot\delta_s=\sum_i\int_{l_i}\frac{\overline{M}_i M_i}{JE}dx$$

- Pręt A-C



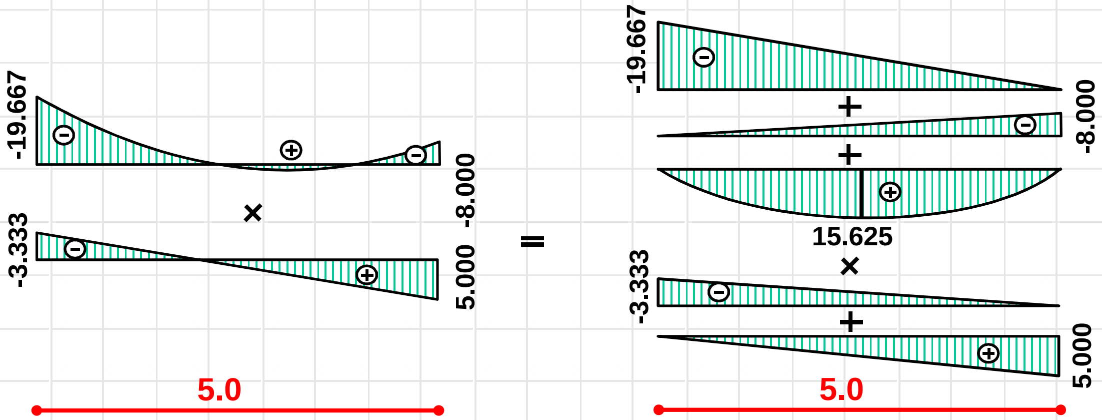
$$\overline{1}\cdot\delta_{s(AC)}=\frac{1}{EJ}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot(-33.883)\cdot 2.236\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot(-3.667)+(-7)\right]+(-15)\cdot 2.236\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(-3.667)+(-7)\right]+\\+\frac{1}{2}\cdot(-15)\cdot 2.236\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot(-3.667)+(-3.333)\right]+\frac{1}{2}\cdot 2.833\cdot 2.236\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(-3.667)+(-3.333)\right]\end{array}\right\}=\frac{736.514}{EJ}$$

Przykład – rama płaska

Wyznaczenie przemieszczenia poziomego podpory B od obciążeń statycznych

$$\overline{1}\cdot\delta_s=\sum_i\int_{l_i}\frac{\overline{M}_i M_i}{JE}dx$$

- Pręt C-D



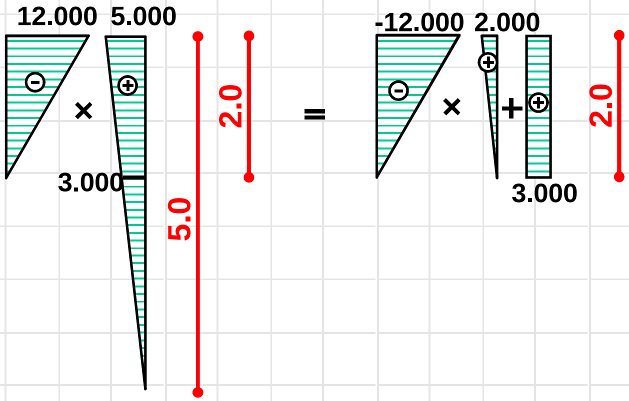
$$\overline{1}\cdot\delta_{s(CD)}=\frac{1}{EJ}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot(-19.667)\cdot5\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot(-3.333)+\frac{1}{3}\cdot5\right]+\frac{1}{2}\cdot(-8)\cdot5\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(-3.333)+\frac{2}{3}\cdot5\right]+\\+\frac{2}{3}\cdot15.625\cdot5\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(-3.333)+\frac{1}{2}\cdot5\right]\end{array}\right\}=\frac{26.269}{EJ}$$

Przykład – rama płaska

Wyznaczenie przemieszczenia poziomego podpory B od obciążeń statycznych

$$\bar{1}\cdot\delta_s=\sum_i\int_{l_i}\frac{\overline{M}_i M_i}{JE}dx$$

- Pręt B-D



$$\bar{1}\cdot\delta_{s(BD)}=\frac{1}{EJ}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot(-12)\cdot 2\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot 2+3\right]\right\}=\frac{-52}{EJ}$$

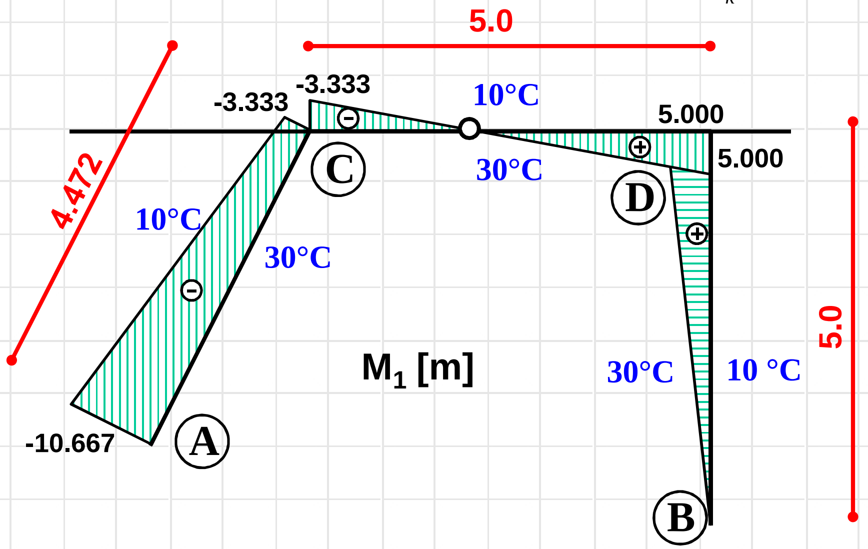
Całkowite przemieszczenie od obciążeń statycznych:

$$\bar{1}\cdot\delta_s=\bar{1}\cdot\delta_{s(AC)}+\bar{1}\cdot\delta_{s(CD)}+\bar{1}\cdot\delta_{s(BD)}=\frac{736.514}{EJ}+\frac{26.269}{EJ}+\frac{-52}{EJ}=\frac{710.783}{EJ}$$

Przykład – rama płaska

Wyznaczenie przemieszczenia poziomego podpory B od obciążenia temperaturą

$$\int_{l_k} \frac{\overline{M}_k \alpha_t \left(t_{dk} - t_{gk}\right)}{h} dx$$



Obciążone temperaturą są trzy pręty.
Na każdym z prętów: t_d=30℃, t_g= 10℃.

$$\Delta t = \left(t_d - t_g\right) = 20°\mathrm{C}$$

Wysokość przekroju poprzecznego:

$$h = 200\mathrm{mm} = 0.2\mathrm{m}$$

Obliczono pola wykresów momentów:

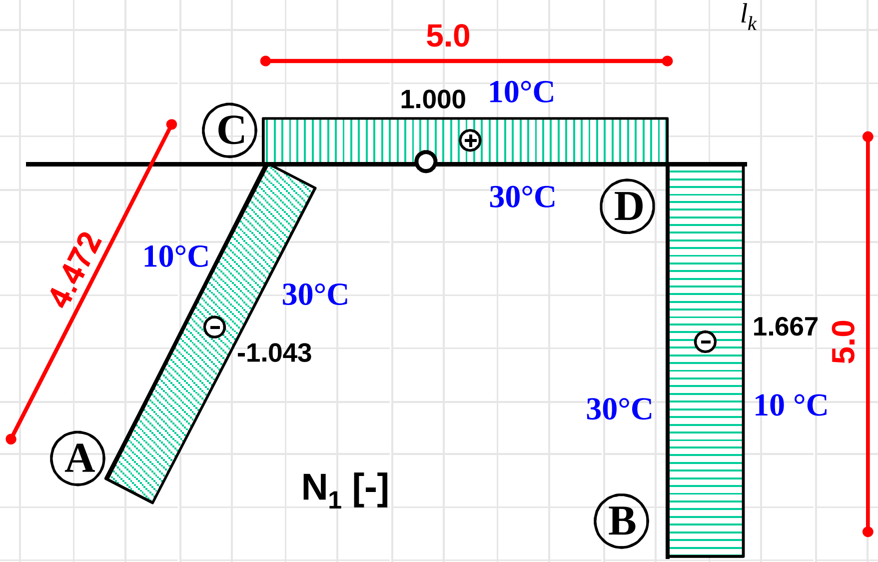
$$\overline{1} \cdot \delta_{tM} = \frac{\alpha_t \left(t_{dk} - t_{gk}\right)}{h} \cdot \left[\int_{l_k} \overline{M}_{AC} dx + \int_{l_k} \overline{M}_{CD} dx + \int_{l_k} \overline{M}_{BD} dx \right] =$$

$$= \frac{\alpha_t \left(t_{dk} - t_{gk}\right)}{h} \cdot \left[\frac{-10.667 + (-3.333)}{2} \cdot 4.472 + \frac{1}{2} \cdot (-3.333) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \right] = \frac{\alpha_t \left(t_{dk} - t_{gk}\right)}{h} \cdot (-14.637)$$

Przykład – rama płaska

Wyznaczenie przemieszczenia poziomego podpory B od obciążenia temperaturą

$$\int_{l_k} \overline{N_k} \alpha_t t_{0k} dx$$



Obciążone temperaturą są trzy pręty.
Na każdym z prętów: t_d=30°C, t_g= 10°C.

$$t_0 = \frac{t_d + t_g}{2} = 20°\mathrm{C}$$

Obliczono pola wykresów momentów:

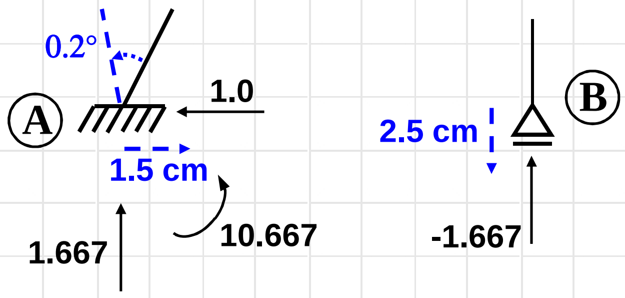
$$\overline{1} \cdot \delta_{tN} = \alpha_t t_0 \cdot \left[\int_{l_k} \overline{N}_{AC} dx + \int_{l_k} \overline{N}_{CD} dx + \int_{l_k} \overline{N}_{BD} dx \right] =$$

$$= \alpha_t t_0 \cdot \left[(-1.043) \cdot 4.472 + 1 \cdot 5 + 1.667 \cdot 5 \right] = \alpha_t t_0 \cdot 8.671$$

Przykład – rama płaska

Wyznaczenie przemieszczenia poziomego podpory B od obciążenia geometrycznego

$$\overline{R}_j \cdot \Delta_j$$



Przy obliczaniu przemieszczenia od obciążeń geometrycznych należy sprawdzić zgodność kierunku działania reakcji podporowych z kierunkiem odpowiedniego rzeczywistego przemieszczenia:

- kierunki zgodne „+”
- kierunki przeciwne „-”.

Kąt obrotu wyrażony w stopniach należy zamienić na radiany.

$$\overline{1} \cdot \delta_{1g} = \overline{R}_j \cdot \Delta_j = H_{A1} \cdot \Delta x_A + M_{A1} \cdot \varphi_A + V_{B1} \cdot \Delta y_B =$$

$$= -1.0 \cdot 0.015 + 10.667 \cdot 0.00349 + 1.667 \cdot 0.025 = 0.064\,\mathrm{m}$$

Przykład – rama płaska

Wyznaczenie całkowitego przemieszczenia poziomego podpory B

$$\bar{1}\cdot\delta=\sum_i\int_{l_i}\frac{\overline{M}_i M_i}{JE}dx+\sum_k\int_{l_k}\frac{\overline{M}_k\alpha_t\left(t_{dk}-t_{gk}\right)}{h}dx+\sum_k\int_{l_k}\overline{N}_k\alpha_t t_{0k}dx-\sum_j\overline{R}_j\cdot\Delta_j$$

$$\bar{1}\cdot\delta_s=\frac{710.783}{EJ}=0.161\,\mathrm{m}$$

$$\bar{1}\cdot\delta_{tM}=\frac{\alpha_t\left(t_{dk}-t_{gk}\right)}{h}\cdot(-14.637)=-0.0176\,\mathrm{m}$$

$$\bar{1}\cdot\delta_{tN}=\alpha_t t_0\cdot 8.671=0.0021\,\mathrm{m}$$

$$\bar{1}\cdot\delta_g=0.064\,\mathrm{m}$$

$$\bar{1}\cdot\delta=\bar{1}\cdot\delta_s+\bar{1}\cdot\delta_{tM}+\bar{1}\cdot\delta_{tN}-\bar{1}\cdot\delta_g=0.0815\,\mathrm{m}$$

$$EJ=2.05\cdot 10^{8}\cdot 2149\cdot 10^{-8}=4405.45\,\mathrm{kNm}^2$$

$$\frac{\alpha_t\left(t_{dk}-t_{gk}\right)}{h}=\frac{1.2\cdot 10^{-5}\cdot 20}{0.2}=0.0012\cdot\frac{1}{\mathrm{m}}$$

$$\alpha_t\cdot t_0=1.2\cdot 10^{-5}\cdot 20=0.00024$$

Punkty B i G pod wpływem obciążenia statycznego i obciążenia temperaturą i geometrycznego przesunie się o 8.15 cm w prawo.

Podsumowanie

Zalecenia projektowe dotyczące przemieszczeń

W czasie sprawdzania stanu granicznego użytkowania sprawdza się między innymi dopuszczalne wartości przesunięć poziomych lub pionowych. Zwykle nawet niedopuszczalne ugięcia nie są widoczne „gołym okiem”, ale na zdjęciu jest pokazany przykład, gdzie ugięcie jest dość wyraźne.

Podsumowanie

Zalecenia projektowe dotyczące przemieszczeń

Dopuszczalne ugięcia zależą od rozpiętości prętów *l* a ich wartości są opisane w normach, dotyczących projektowania konstrukcji z różnych materiałów. Przykładowo:

✓ wg normy PN-90/B-03200. **Konstrukcje stalowe.** Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.

• ugięcie dźwigara kratowego pełnościennego nie może przekraczać

$$f_{dop} = \frac{l}{250}$$

• ugięcie głównych belek stropowych nie może przekraczać

$$f_{dop} = \frac{l}{350}$$

✓ wg normy PN-81/B-03150/02. **Konstrukcje drewniane.** Konstrukcje z drewna i materiałów drewnopochodnych. Obliczenia statyczne i projektowanie

• ugięcie dźwigara kratowego pełnościennego nie może przekraczać przy obliczeniach dokładnych

$$f_{dop} = \frac{l}{300}$$

Podsumowanie

Zalecenia projektowe dotyczące przemieszczeń

Dopuszczalne ugięcia zależą od rozpiętości a ich wartości są opisane w normach, dotyczących projektowania konstrukcji z różnych materiałów. Przykładowo:

✓ wg normy PN-B-03264. **Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone.** Obliczenia statyczne i projektowanie

- ugięcie belek stropowych o rozpiętości poniżej 6m

$$f_{dop} = \frac{l}{200}$$

- przekrycia dachowe o rozpiętości poniżej 6m

$$f_{dop} = \frac{l}{150}$$

Więcej informacji na temat wyznaczania przemieszczeń w układach statycznie wyznaczalnych można znaleźć w podręcznikach:

Z. Cywiński: *Mechanika budowli w zadaniach. Układy statycznie wyznaczalne*, PWN 2008.
Z. Dyląg, E. Krzemińska-Niemiec, F. Filip: *Mechanika budowli*, PWN 1989.

Aleksander Robak, Tomasz Lipecki
Katedra Mechaniki Budowli, Politechnika Lubelska

Mamy nadzieję, że wykład dostarczył niezbędnych informacji o wyznaczaniu przemieszczeń w układach prętowych