

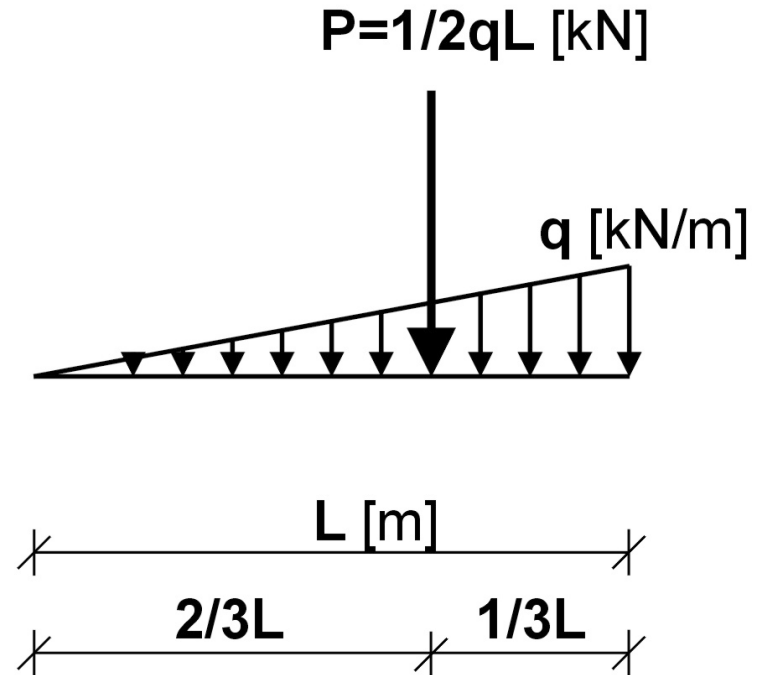
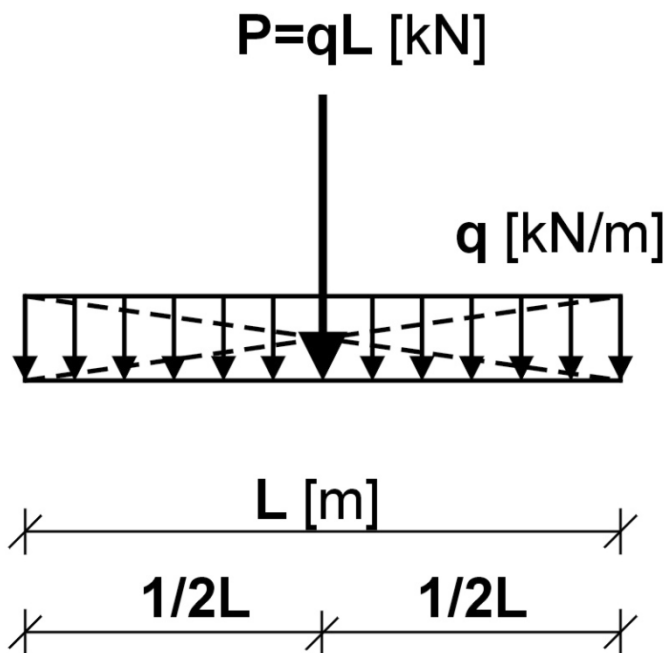
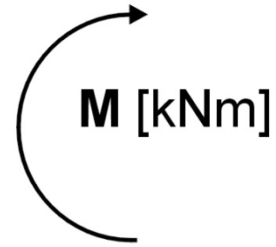
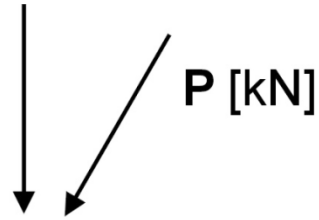
Równania równowagi

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_n P_{ix} = 0 \\ \sum_n P_{iy} = 0 \\ \sum_i M_{i0} = 0 \end{array} \right.$$

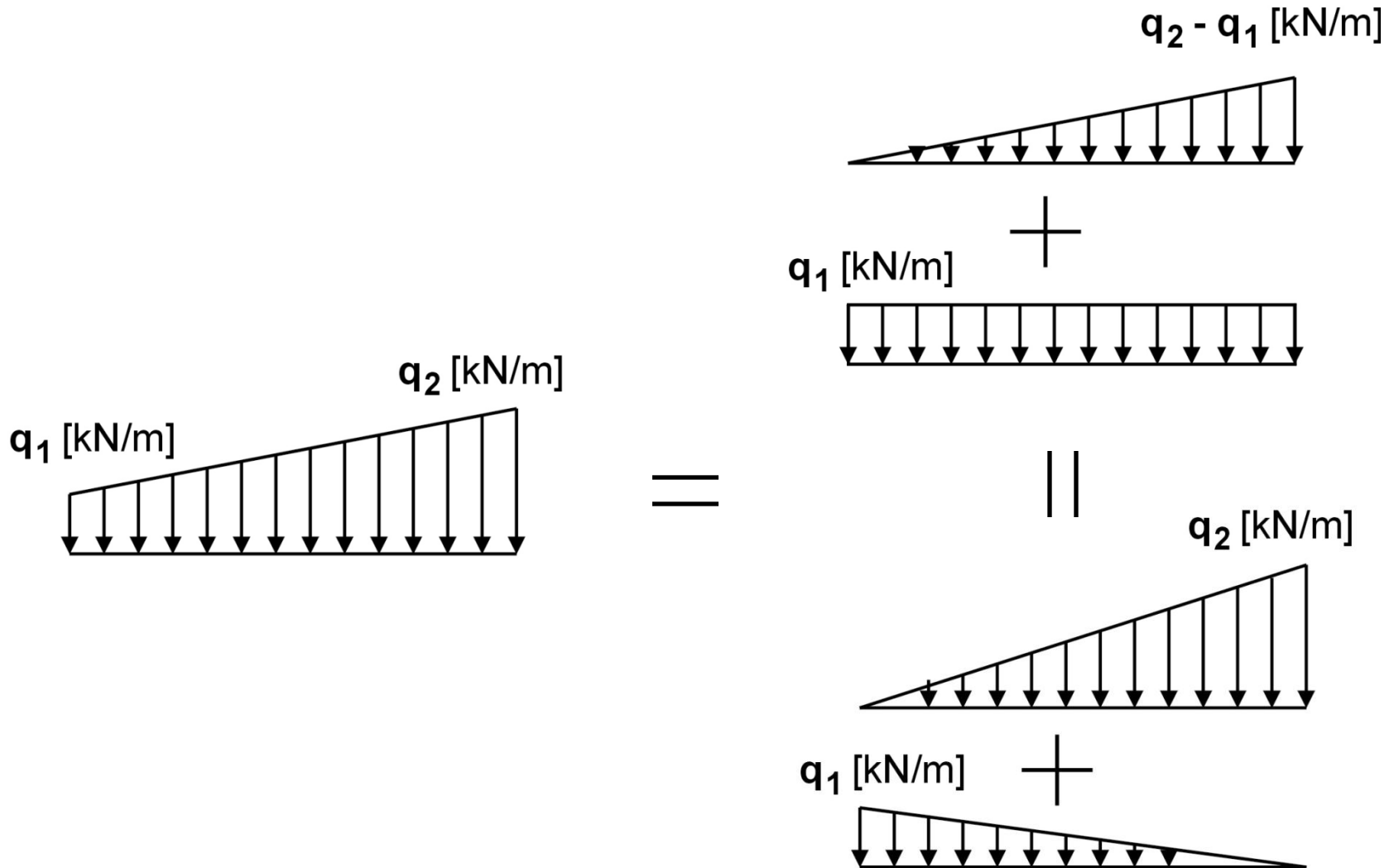
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i M_{iA} = 0 \\ \sum_i M_{iB} = 0 \\ \sum_i M_{iC} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i P_{ix} = 0 \\ \sum_i M_{iA} = 0 \\ \sum_i M_{iB} = 0 \end{array} \right.$$

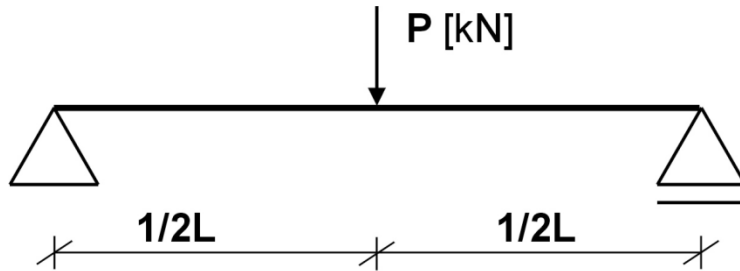
Rodzaje obciążeń



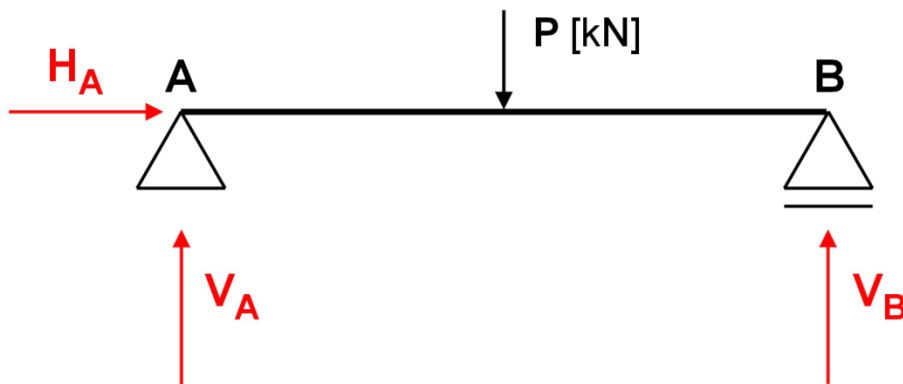
Redukcja obciążeń ciągłych



Przykład 1



$$\begin{cases} \sum X = H_A = 0 \\ \sum Y = V_A + V_B - P = 0 \\ \sum M_A = V_B \cdot L - P \cdot \frac{L}{2} = 0 \end{cases}$$

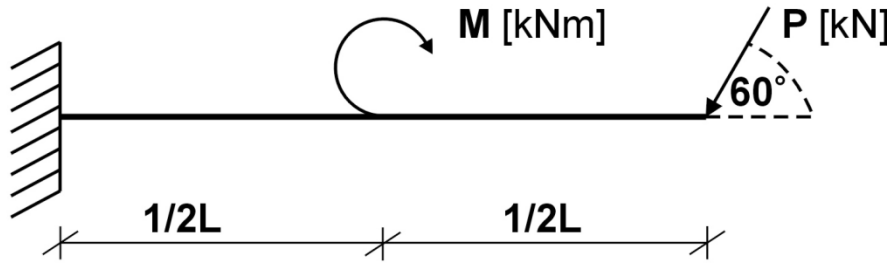


$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \frac{P}{2} \\ V_B = \frac{P}{2} \end{cases}$$

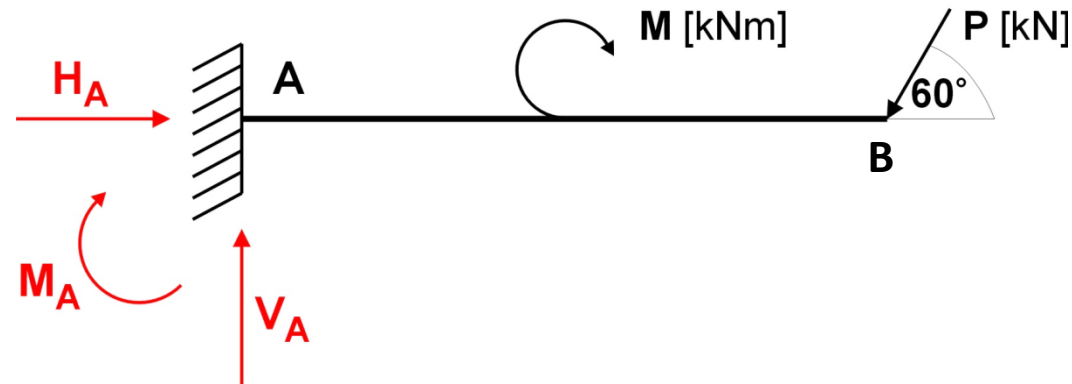
Sprawdzenie:

$$\sum M_B = -V_A \cdot L + P \cdot \frac{1}{2}L = 0$$

Przykład 2



$$\begin{cases} \sum X = H_A - P \cos 60^\circ = 0 \\ \sum Y = V_A - P \cdot \sin 60^\circ = 0 \\ \sum M_A = -M_A - M - P \cdot \sin 60^\circ \cdot L = 0 \end{cases}$$

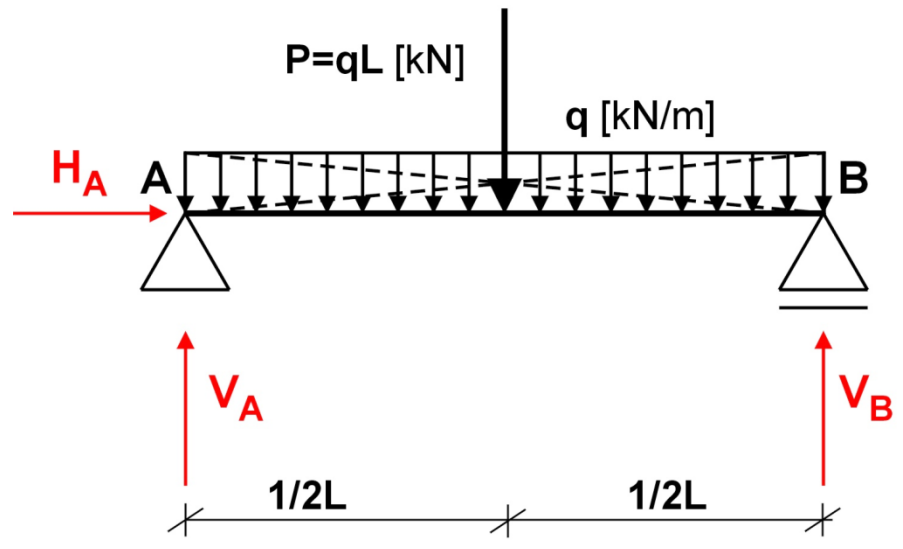
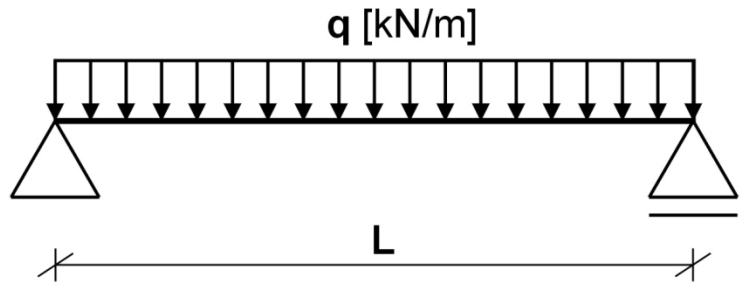


$$\begin{cases} H_A = \frac{1}{2} P \\ V_A = P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ M_A = -M - P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L \end{cases}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = -V_A \cdot L - M_A - M = 0$$

Przykład 3



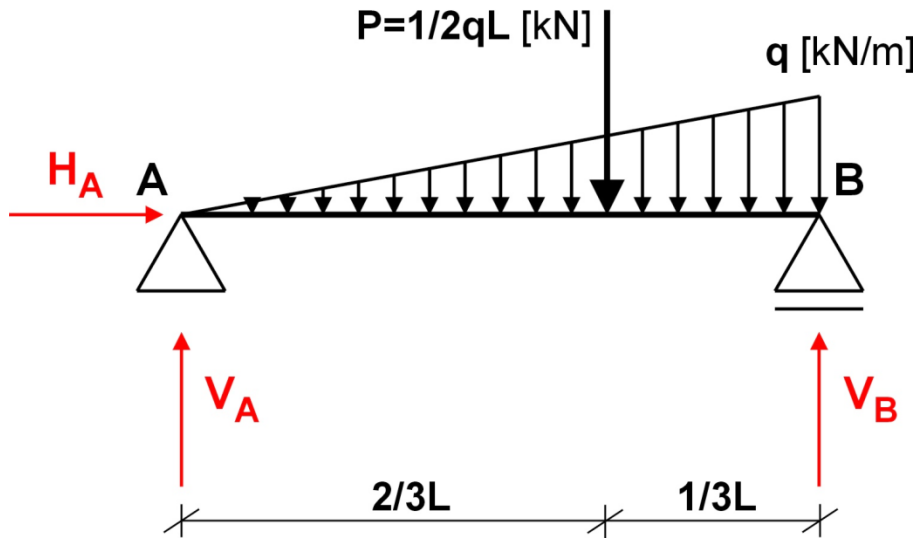
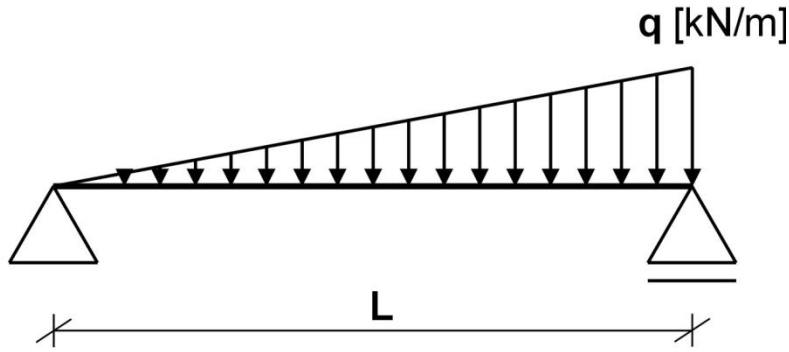
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = H_A = 0 \\ \sum Y = V_A + V_B - q \cdot L = 0 \\ \sum M_A = V_B \cdot L - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = \frac{qL}{2} \\ V_B = \frac{qL}{2} \end{array} \right.$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = -V_A \cdot L + q \cdot L \cdot \frac{1}{2} L = 0$$

Przykład 4



$$\begin{cases} \sum X = H_A = 0 \\ \sum Y = V_A + V_B - \frac{1}{2}q \cdot L = 0 \\ \sum M_A = V_B \cdot L - \frac{1}{2}q \cdot L \cdot \frac{2}{3}L = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \frac{1}{6}qL \\ V_B = \frac{1}{3}qL \end{cases}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = -V_A \cdot L + \frac{1}{2}q \cdot L \cdot \frac{1}{3}L = 0$$

Belki przegubowe

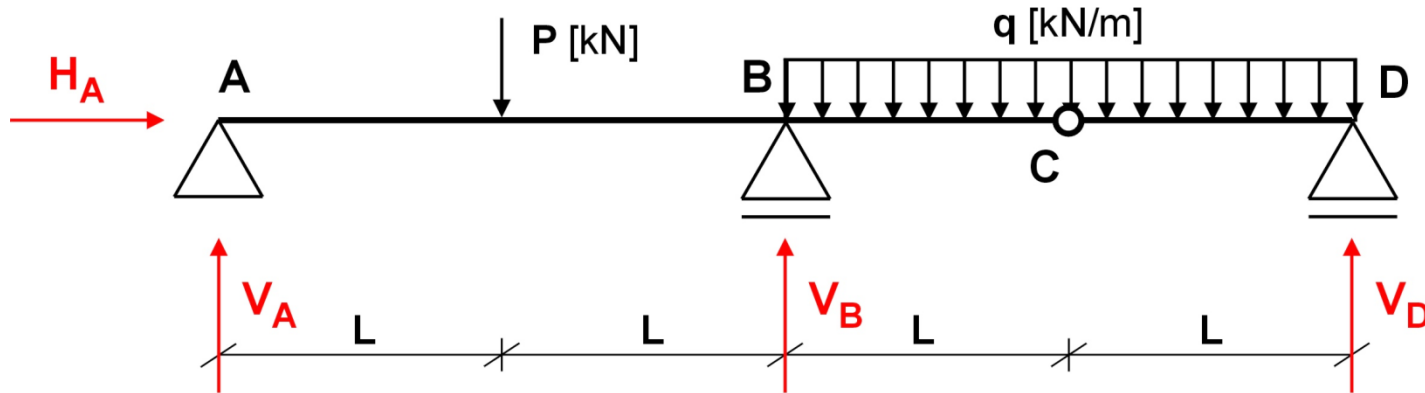
- Dodatkowe równanie względem przegubu musi wykorzystywać własność przegubu, tj. że moment w przegubie równy jest 0, a więc dodatkowe równanie nie może być zwykłą sumą momentów względem przegubu, a musi być sumą momentów od sił z jednej strony przegubu.
- Każdy przegub musi zostać wykorzystany co najmniej jeden raz.
- Jeżeli chcemy zapisać równanie dla przegubu z drugiej strony, to zastępuje ono jedno z równań podstawowych (sumę momentów względem dowolnego punktu).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_n P_{ix} = 0 \\ \sum_n P_{iy} = 0 \\ \sum_i M_{i0} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i M_{iA} = 0 \\ \sum_i M_{iB} = 0 \\ \sum_i M_{iC} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i P_{ix} = 0 \\ \sum_i M_{iA} = 0 \\ \sum_i M_{iB} = 0 \end{array} \right.$$

Dodatkowo:

$$\sum M_{\text{przegub}}^{\text{lewo}} = 0 \quad \text{lub:} \quad \sum M_{\text{przegub}}^{\text{prawo}} = 0$$

Przykład 5



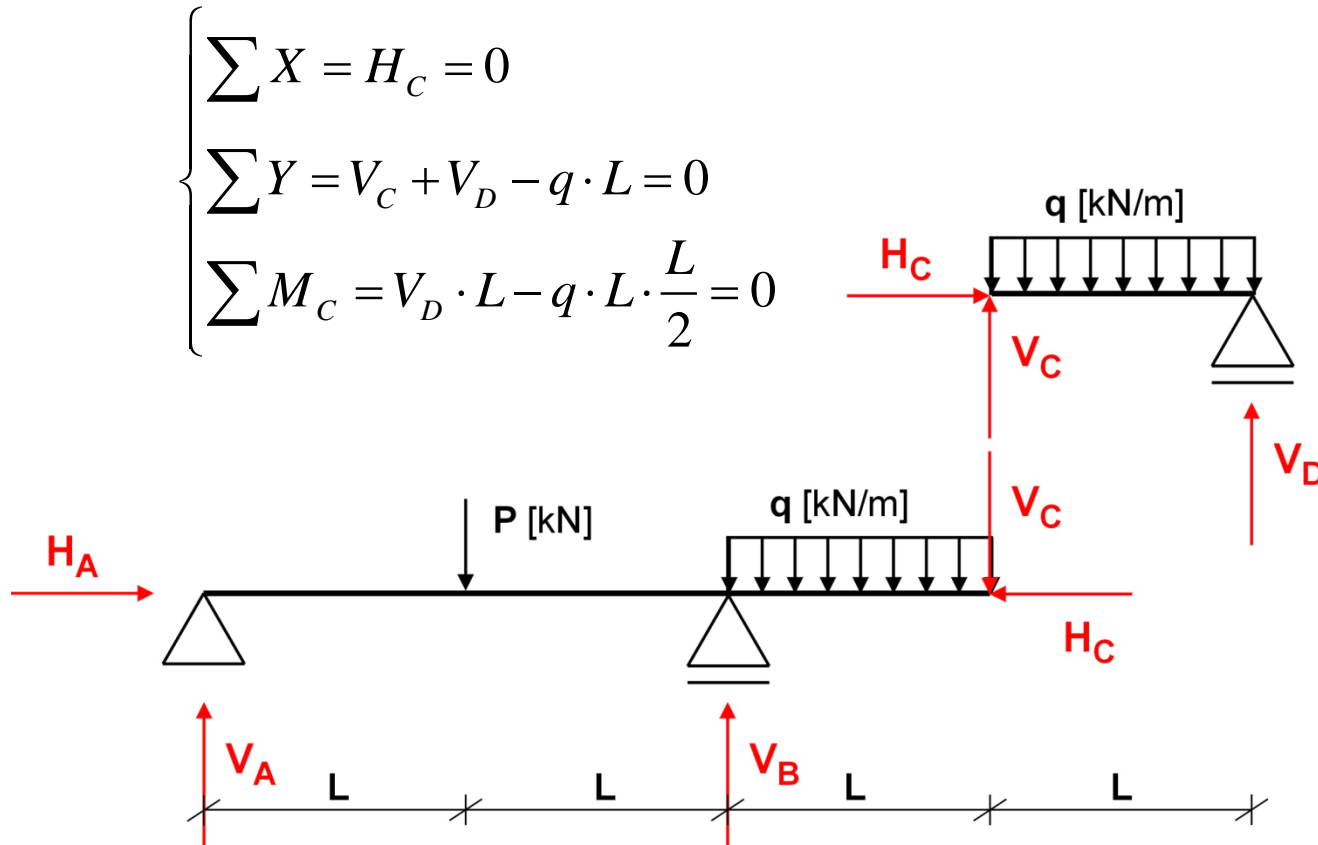
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = H_A = 0 \\ \sum Y = V_A + V_B + V_D - P - q \cdot 2L = 0 \\ \sum M_A = V_B \cdot 2L + V_D \cdot 4L - P \cdot L - q \cdot 2L \cdot (2L + L) = 0 \\ \sum M_C^P = V_D \cdot L - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = \frac{P}{2} - \frac{qL}{2} \\ V_B = \frac{P}{2} + 2qL \\ V_D = \frac{qL}{2} \end{array} \right.$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = -V_A \cdot 2L + P \cdot L - q \cdot 2L \cdot L + V_D \cdot 2L = 0$$

Przykład 5 – z wyznaczeniem sił w przegubach



$$\begin{cases} \sum X = H_C = 0 \\ \sum Y = V_C + V_D - q \cdot L = 0 \\ \sum M_C = V_D \cdot L - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0 \end{cases}$$

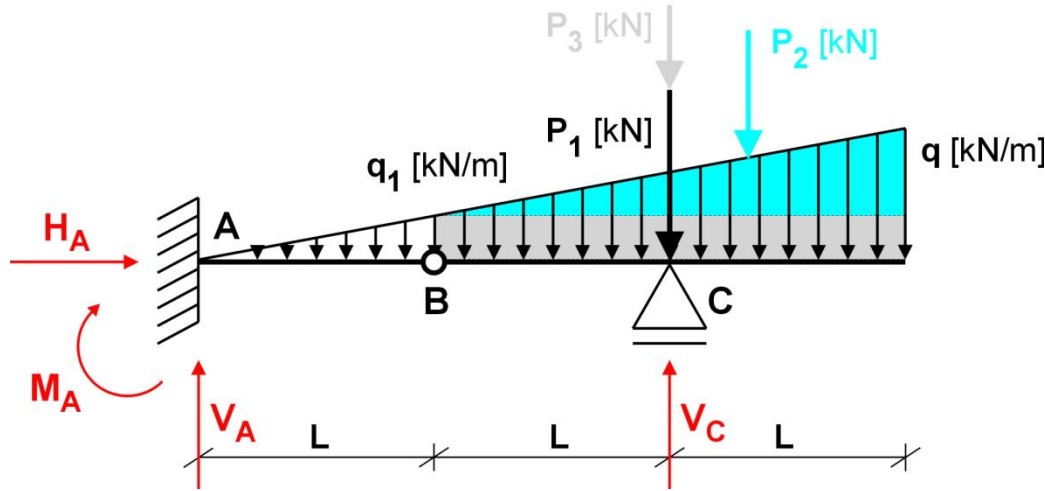
$$\begin{cases} \sum X = H_A - H_C = 0 \\ \sum Y = V_A + V_B - V_C - P - q \cdot L = 0 \\ \sum M_A = V_B \cdot 2L - P \cdot L - q \cdot L \cdot 2.5L - V_C \cdot 3L = 0 \end{cases}$$

Uwaga !!!

W każdej belce lub ramie, w której występują przeguby:

- ❑ Można wyznaczyć reakcje zewnętrzne – w przykładzie 5, z 4 równań.
- ❑ Można rozłączyć układ w przegubach i wyznaczyć reakcje i siły w przegubie – w przykładzie 5, z 6 równań
- ❑ Można sposoby łączyć – najpierw wyznaczyć reakcje zewnętrzne, następnie rozłączyć układ i wyznaczyć siły w przegubach.

Przykład 6



$$\frac{q_1}{L} = \frac{q}{3L} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{3}q$$

$$P_1 = \frac{1}{2}q \cdot 3L$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(q - q_1) \cdot 2L$$

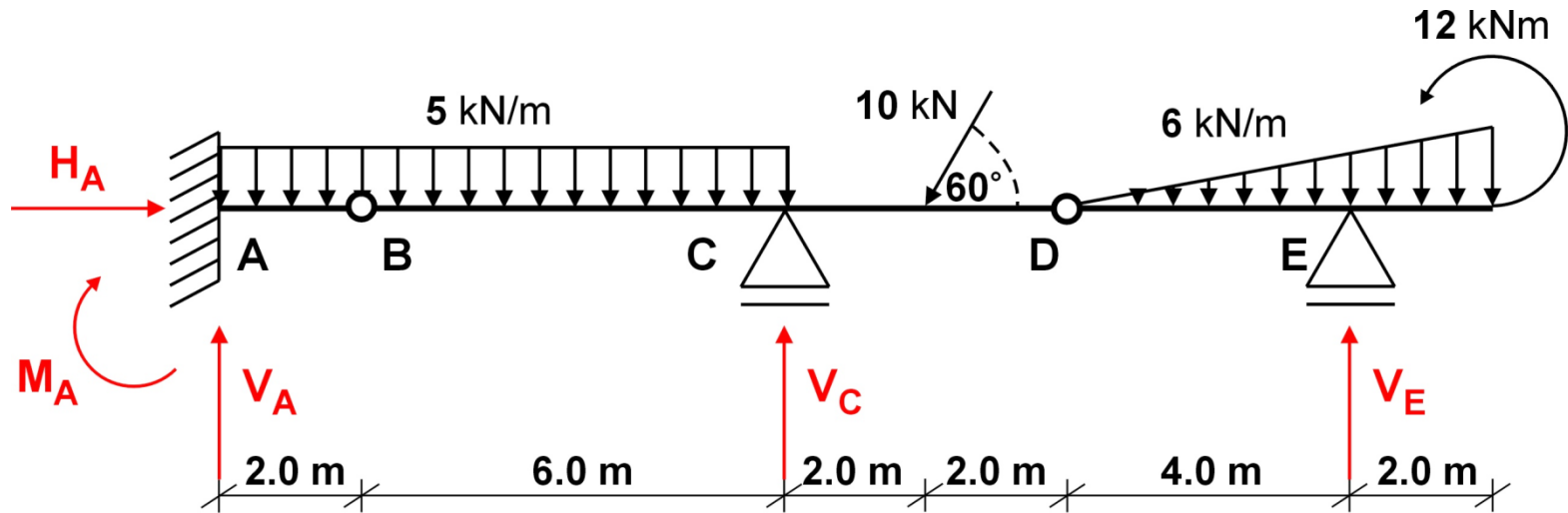
$$P_3 = q_1 \cdot 2L$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = H_A = 0 \\ \sum M_B^P = V_C \cdot L - q_1 \cdot 2L \cdot L - \frac{1}{2}(q - q_1) \cdot 2L \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2L\right) = 0 \\ \sum M_A = V_C \cdot 2L - M_A - \frac{1}{2}q \cdot 3L \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3L\right) = 0 \\ \sum Y = V_A + V_C - \frac{1}{2}q \cdot 3L = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = -\frac{1}{18} \cdot qL \\ M_A = \frac{1}{9} \cdot qL^2 \\ V_C = \frac{14}{9} \cdot qL \end{array} \right.$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_c = -2L \cdot V_A - M_A = 0$$

Przykład 7



$$\sum X = H_A = 0$$

$$\sum M_D^P = V_E \cdot 4m - \frac{1}{2} \cdot 6kN/m \cdot 6m \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6m\right) + 12kNm = 0$$

$$\sum M_B^P = V_C \cdot 6m - 5kN/m \cdot 6m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6m\right) - 10kN \cdot \sin 60^\circ \cdot 8m - \frac{1}{2} \cdot 6kN/m \cdot 6m \cdot \left(10m + \frac{2}{3} \cdot 6m\right) + V_E \cdot 14m + 12kNm = 0$$

$$\sum M_A = -M_A + V_C \cdot 8m - 5kN/m \cdot 8m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8m\right) - 10kN \cdot \sin 60^\circ \cdot 10m - \frac{1}{2} \cdot 6kN/m \cdot 6m \cdot \left(12m + \frac{2}{3} \cdot 6m\right) + V_E \cdot 16m + 12kNm = 0$$

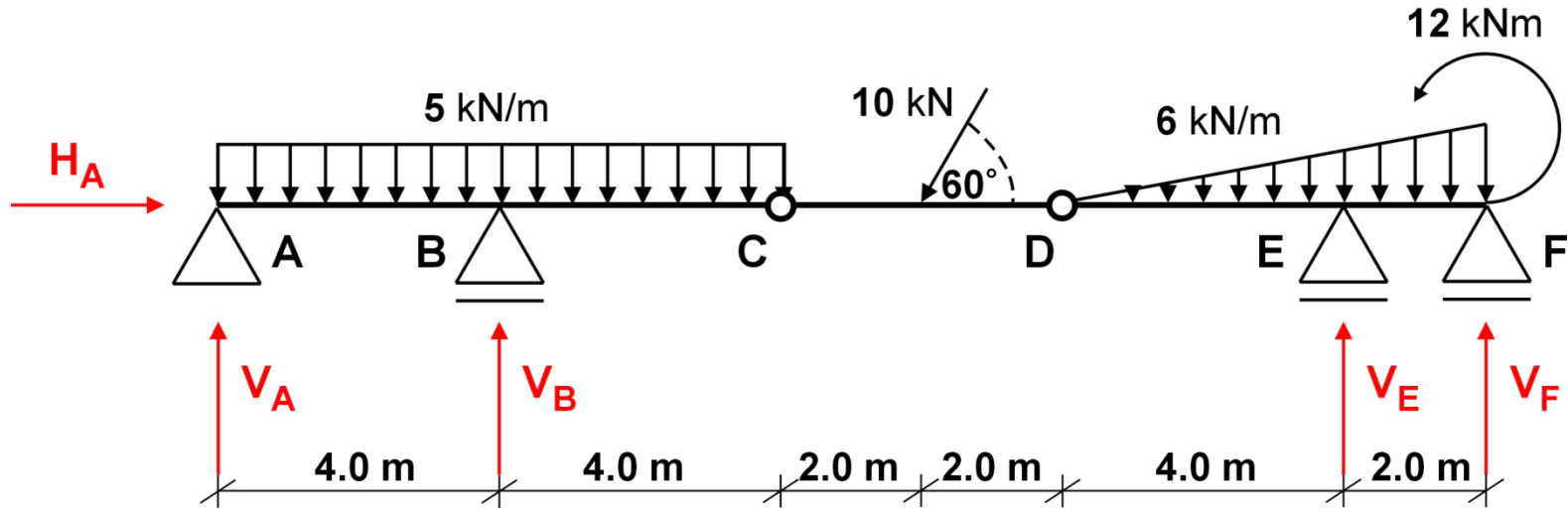
$$\sum M_B^L = -M_A - V_A \cdot 2m + 5kN/m \cdot 2m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2m\right) = 0$$

Sprawdzenie:

$$\sum Y = V_A + V_C + V_E - 5kN/m \cdot 8m - 10kN \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 6kN/m \cdot 6m = 0$$

$$\begin{cases} H_A = 5kN \\ V_E = 15kN \\ V_C = 31.547kN \\ M_A = -30.226kNm \\ V_A = 20.113kN \end{cases}$$

Przykład 8



$$\sum X = H_A = 0$$

$$\sum M_D^P = V_E \cdot 4m + V_F \cdot 6m - \frac{1}{2} \cdot 6kN/m \cdot 6m \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6m\right) + 12kNm = 0$$

$$\sum M_C^P = V_E \cdot 8m + V_F \cdot 10m - 10kN \cdot \sin 60^\circ \cdot 2m - \frac{1}{2} \cdot 6kN/m \cdot 6m \cdot \left(4m + \frac{2}{3} \cdot 6m\right) + 12kNm = 0$$

$$\sum M_D^L = -V_A \cdot 12m - V_B \cdot 8m + 5kN/m \cdot 8m \cdot \left(4m + \frac{1}{2} \cdot 8m\right) + 10kN \cdot \sin 60^\circ \cdot 2m = 0$$

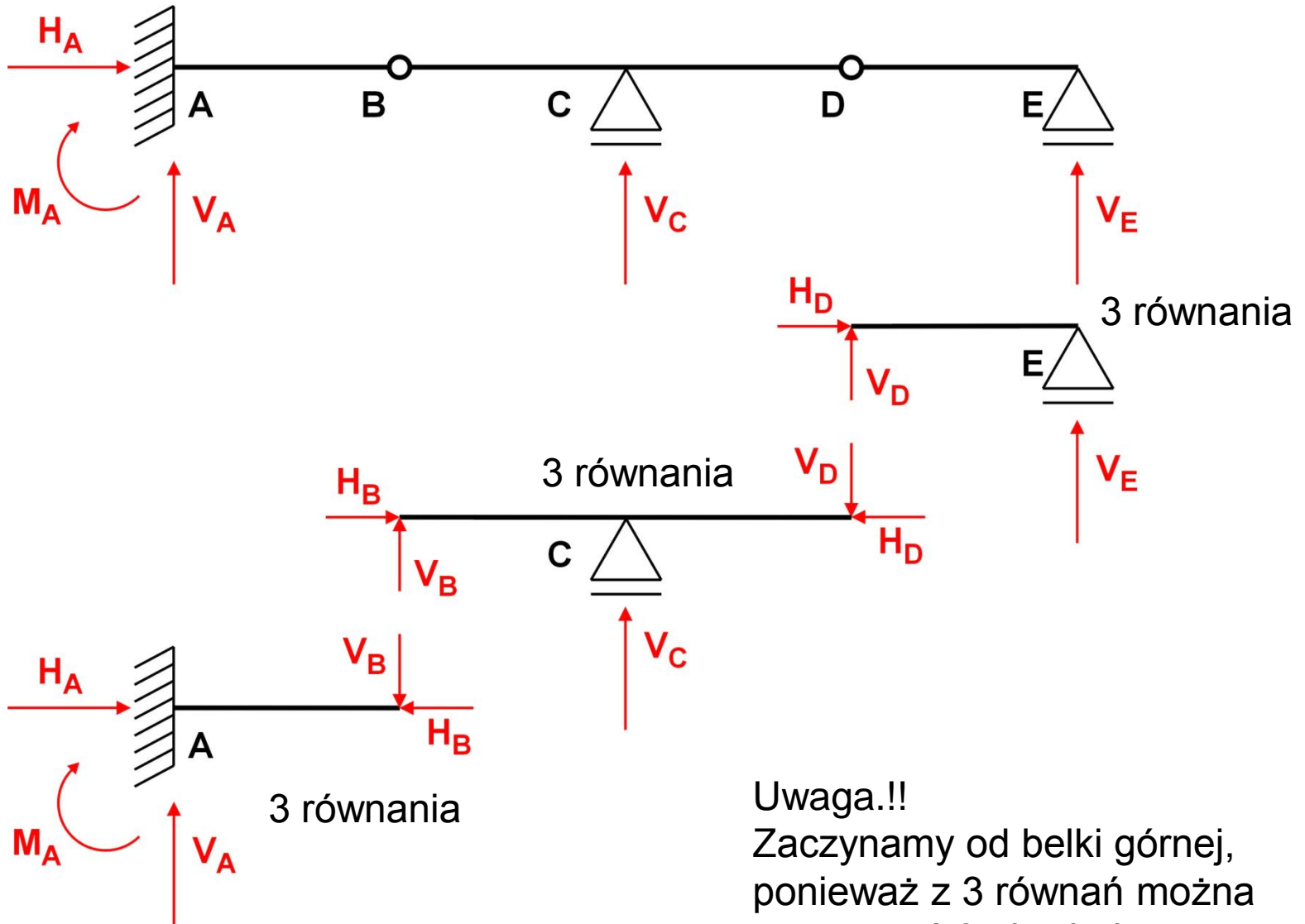
$$\sum M_C^L = -V_A \cdot 8m - V_B \cdot 4m + 5kN/m \cdot 8m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8m\right) = 0$$

$$\begin{cases} H_A = 5kN \\ V_E = 36.990kN \\ V_F = -14.660kN \\ V_A = -4.333kN \\ V_B = 48.660kN \end{cases}$$

Sprawdzenie:

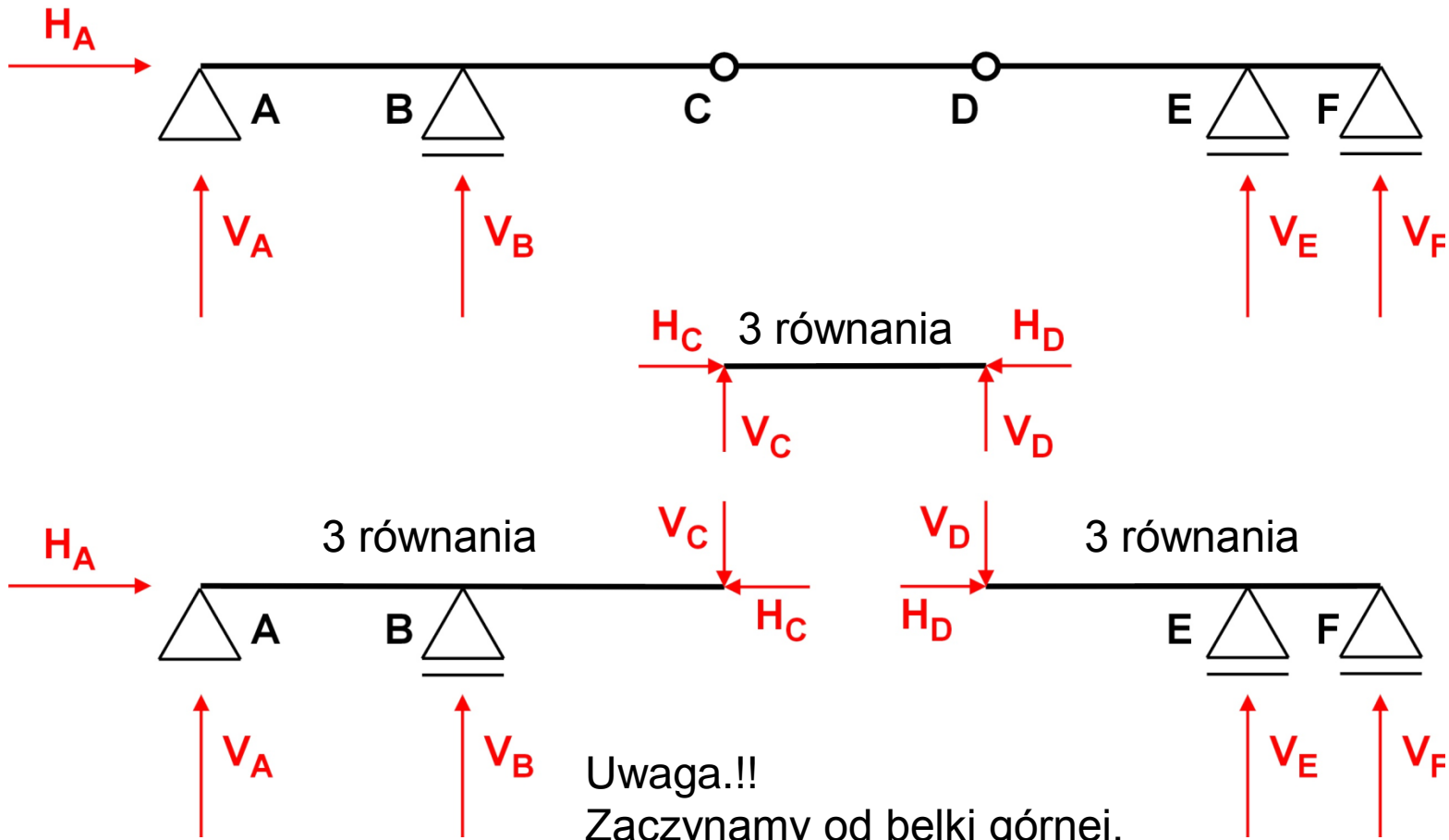
$$\sum Y = V_A + V_B + V_E + V_F - 5kN/m \cdot 8m - 10kN \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 6kN/m \cdot 6m = -0.000254 \approx 0$$

Przykład 7 – z wyznaczeniem sił w przegubach



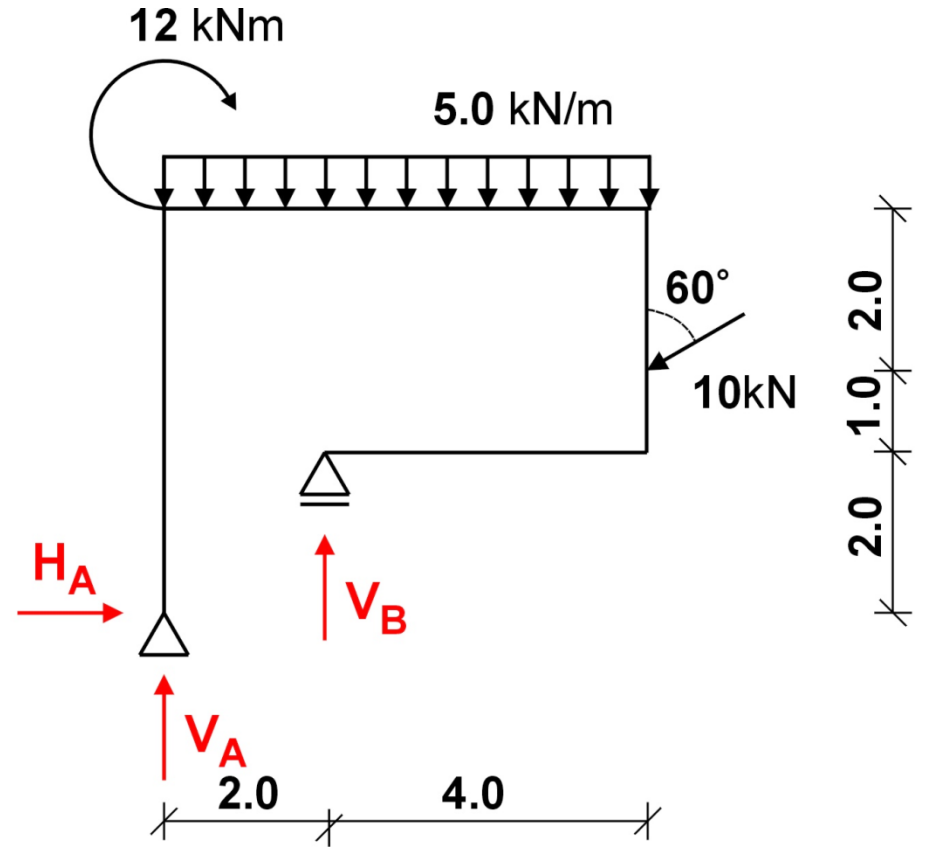
Uwaga!!
Zaczynamy od belki górnej,
ponieważ z 3 równań można
wyznaczyć 3 niewiadome

Przykład 8 – z wyznaczeniem sił w przegubach



Uwaga!!
Zaczynamy od belki górnej,
ponieważ z 2 równań można wyznaczyć V_C i V_D oraz powiązać H_C z H_D i przejść na belki dolne.

Przykład 9



$$\sum X = H_A - P \sin 60^\circ = 0$$

$$\sum Y = V_A + V_B - 5 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot \cos 60^\circ = 0$$

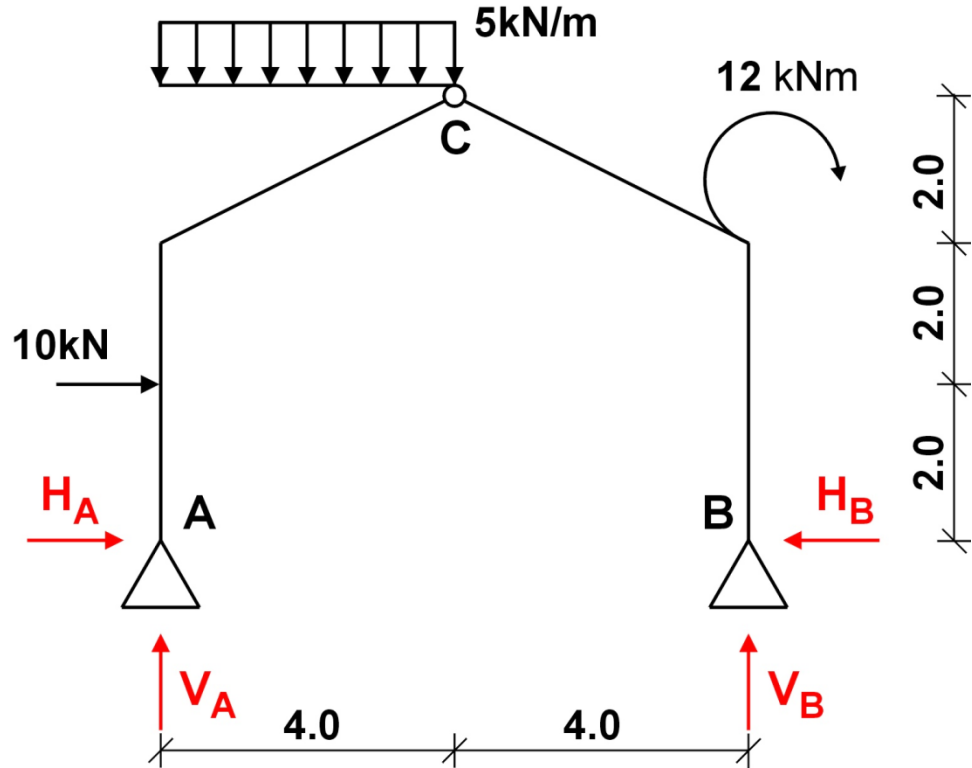
$$\sum M_A = V_B \cdot 2 \text{ m} - 12 \text{ kNm} - 5 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \text{ m}\right) - 10 \text{ kN} \cos 60^\circ \cdot 6 \text{ m} + 10 \text{ kN} \sin 60^\circ \cdot 3 \text{ m} = 0$$

$$\begin{cases} H_A = 8.66 \text{ kN} \\ V_A = -18.01 \text{ kN} \\ V_B = 53.01 \text{ kN} \end{cases}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = -V_A \cdot 2 \text{ m} + H_A \cdot 2 \text{ m} - 12 - 5 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 \text{ m} - 10 \text{ kN} \cdot \cos 60^\circ \cdot 4 \text{ m} = 0$$

Przykład 10



$$\sum X = H_A - H_B + 10kN = 0$$

$$\sum Y = V_A + V_B - 5kN / m \cdot 4m = 0$$

$$\sum M_A = V_B \cdot 8m - 10kN \cdot 2m - 5kN / m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m\right) - 12kNm = 0$$

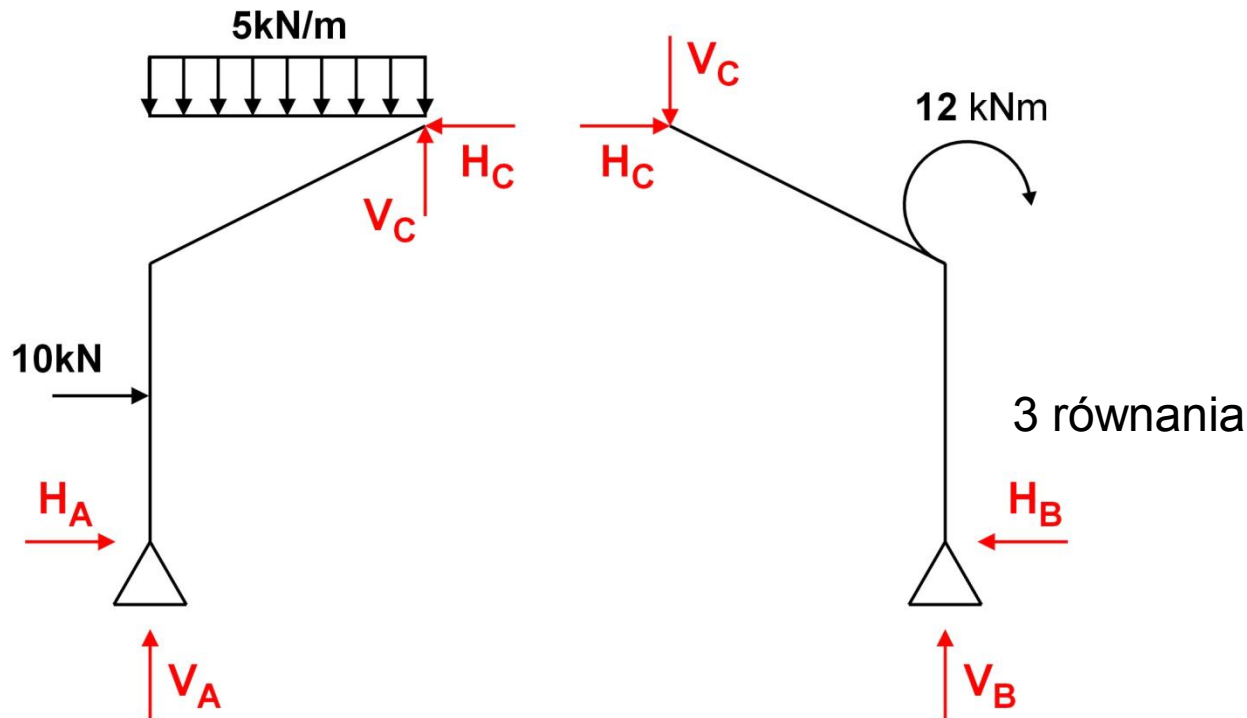
$$\sum M_C^p = V_B \cdot 4m - H_B \cdot 6m - 12kNm = 0$$

$$\begin{cases} H_A = -6kN \\ V_A = 11kN \\ V_B = 9kN \\ H_B = 4kN \end{cases}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_B = -V_A \cdot 8m - 10kN \cdot 2m + 5kN / m \cdot 4m \cdot 6m - 12kNm = 0$$

Przykład 10 – z wyznaczeniem sił w przegubach

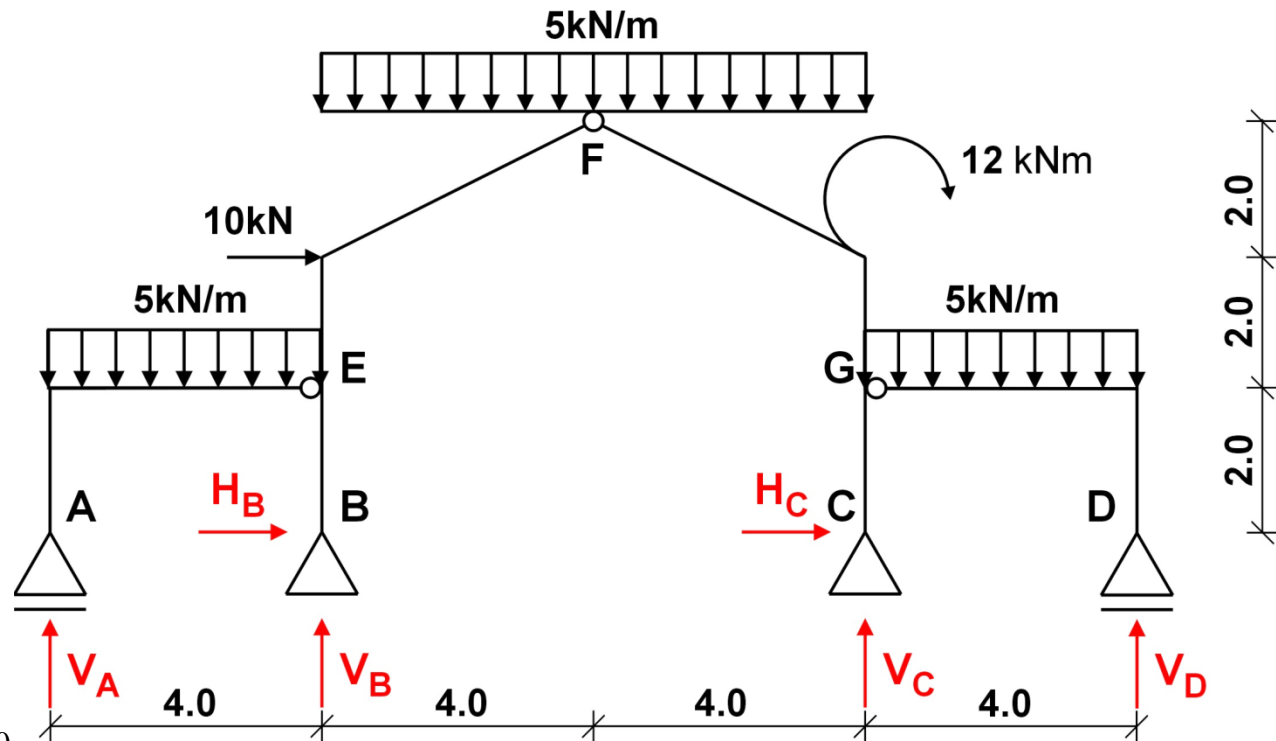


$$\begin{cases} \sum X = H_A - H_C + 10kN = 0 \\ \sum Y = V_A + V_C - 5kN / m \cdot 4m = 0 \\ \sum M_A = V_C \cdot 4m + H_C \cdot 6m - 5kN / m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m\right) - 10kN \cdot 2m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum X = H_C - H_B = 0 \\ \sum Y = V_B - V_C = 0 \\ \sum M_B = V_C \cdot 4m - H_C \cdot 6m - 12kNm = 0 \end{cases}$$

Sprawdzenie dla całości: $\sum Y = V_A + V_B - 5kN / m \cdot 4m = 0$

Przykład 11



$$\sum M_E^I = V_A \cdot 4m - 5kN/m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m\right) = 0$$

$$\sum M_G^P = V_D \cdot 4 - 5kN/m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m\right) = 0$$

$$\sum M_C = -V_A \cdot 12m - V_B \cdot 8m + V_D \cdot 4m + 5kN/m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m + 8m\right) + 5kN/m \cdot 8m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8m\right) - 5kN/m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m\right) - 10kN \cdot 4m - 12kNm = 0$$

$$\sum Y = V_A + V_B + V_C + V_D - 5kN/m \cdot 16m = 0$$

$$\sum M_F^P = V_C \cdot 4m + H_C \cdot 6m + V_D \cdot 8m - 5kN/m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m\right) - 5kN/m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m + 4m\right) - 12 = 0$$

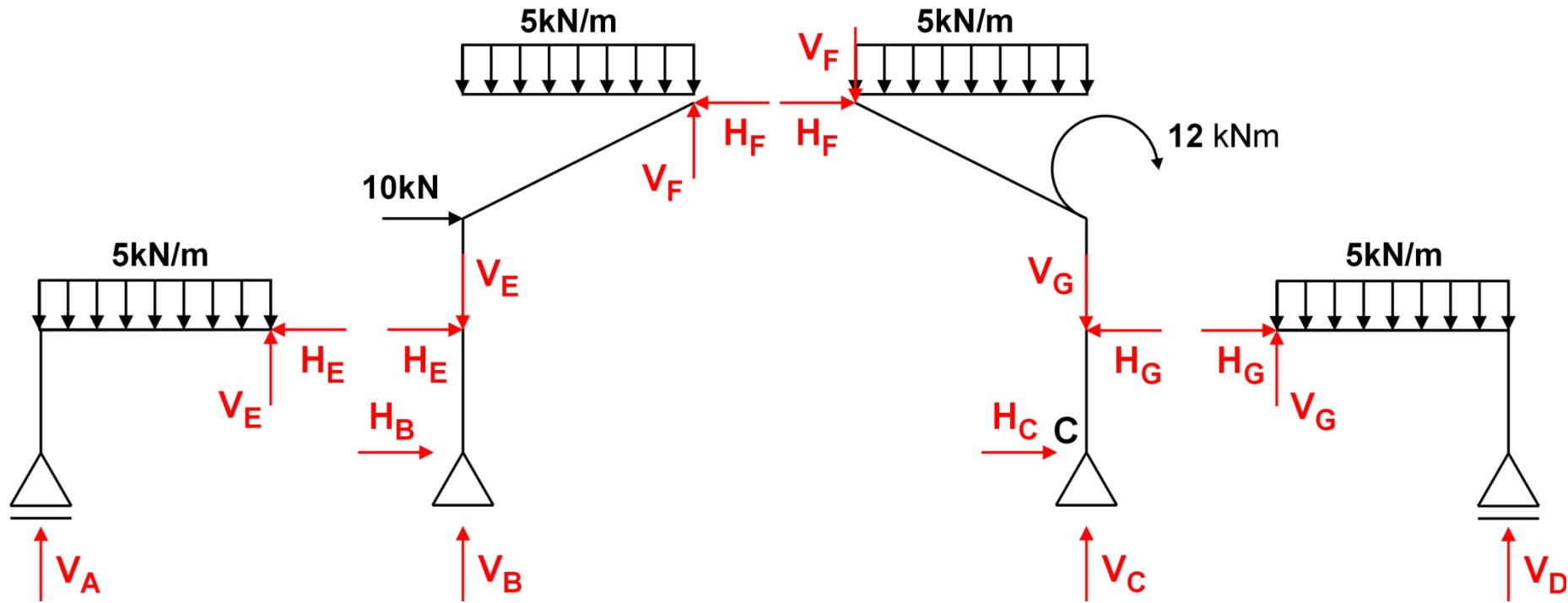
$$\sum X = H_B + H_C + 10 = 0$$

$$\begin{cases} V_A = 10.0kN \\ V_D = 10.0kN \\ V_B = 23.5kN \\ V_C = 36.5kN \\ H_C = -9.0kN \\ H_B = -1.0kN \end{cases}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_A = V_B \cdot 4m - V_C \cdot 12m + V_D \cdot 16m - 5kN/m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m\right) - 5kN/m \cdot 8m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8m + 4m\right) - 5kN/m \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4m + 12\right) - 10kN \cdot 4m - 12kNm = 0$$

Przykład 11 – z wyznaczeniem sił w przegubach



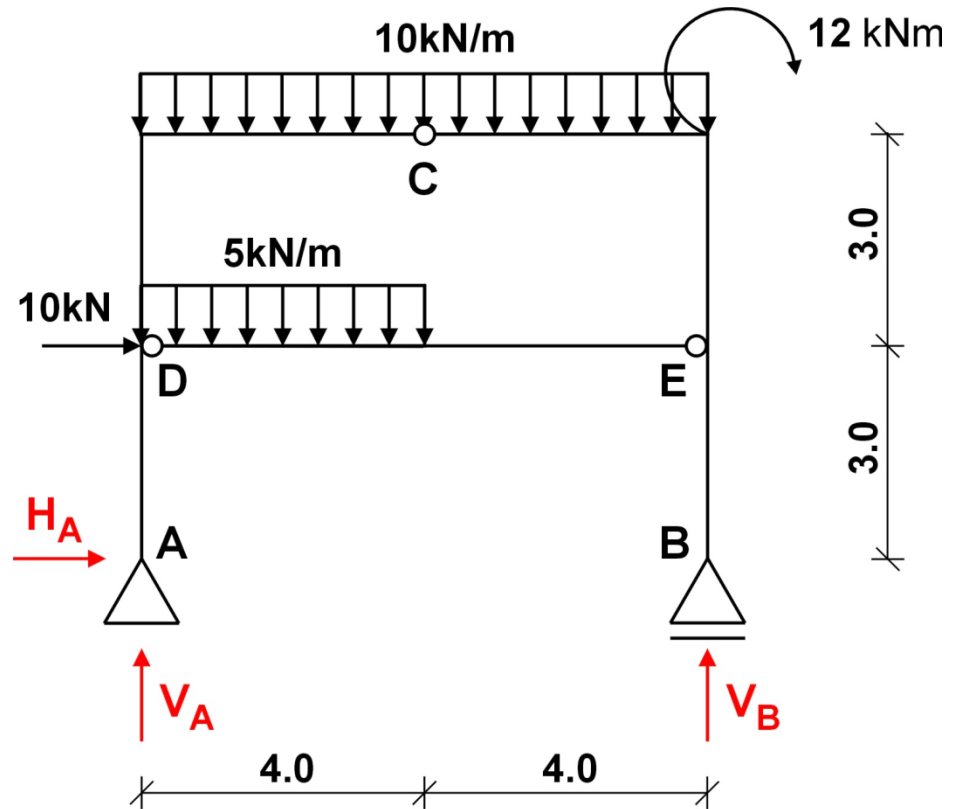
3 równania

3 równania

3 równania

3 równania

Przykład 12



Rama:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = H_A + 10kN = 0 \\ \sum Y = V_A + V_B - 5kN/m \cdot 4m - 10kN/m \cdot 8m = 0 \\ \sum M_A = V_B \cdot 8m - 10kN \cdot 3m - 12kNm - 5kN/m \cdot 4m \cdot \frac{1}{2} \cdot 4m - 10kN/m \cdot 8m \cdot \frac{1}{2} \cdot 8m = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = -10kN \\ V_A = 49.75kN \\ V_B = 50.25kN \end{array} \right.$$

Przykład 12

Ściąg:

$$\begin{cases} \sum X = H_D - H_E = 0 \\ \sum Y = V_D + V_E - 5kN/m \cdot 4m = 0 \\ \sum M_D = V_E \cdot 8m - 5kN/m \cdot 4m \cdot \frac{1}{2} \cdot 4m = 0 \end{cases}$$

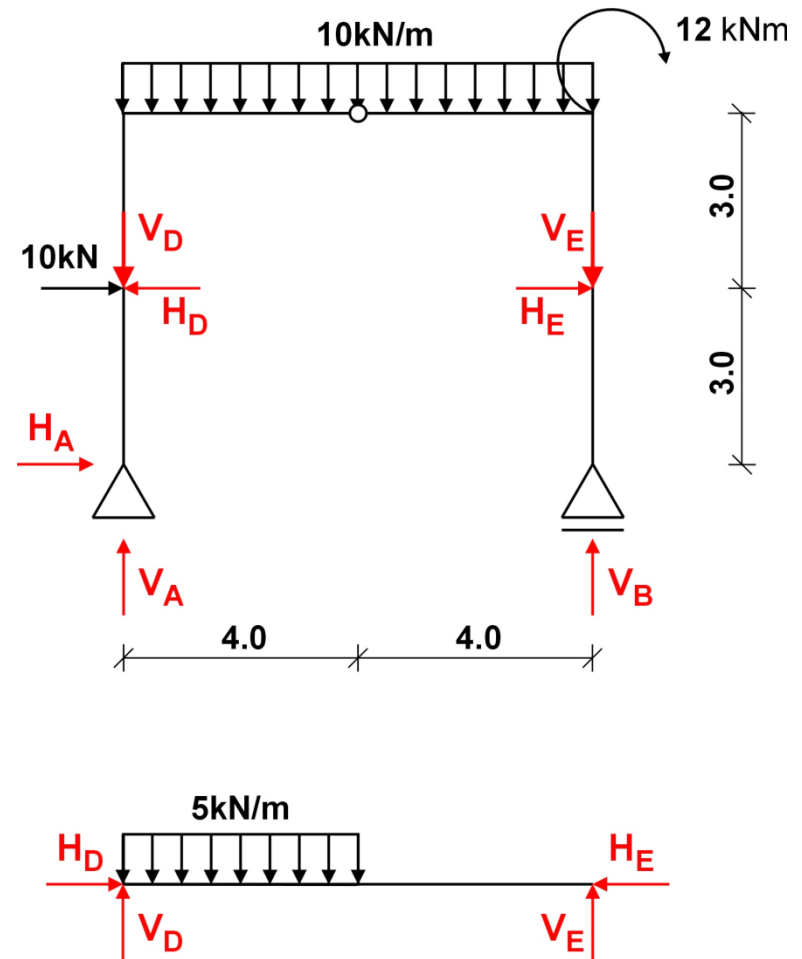
$$\begin{cases} H_D = H_E \\ V_D = 15kN \\ V_E = 5kN \end{cases}$$

Rama:

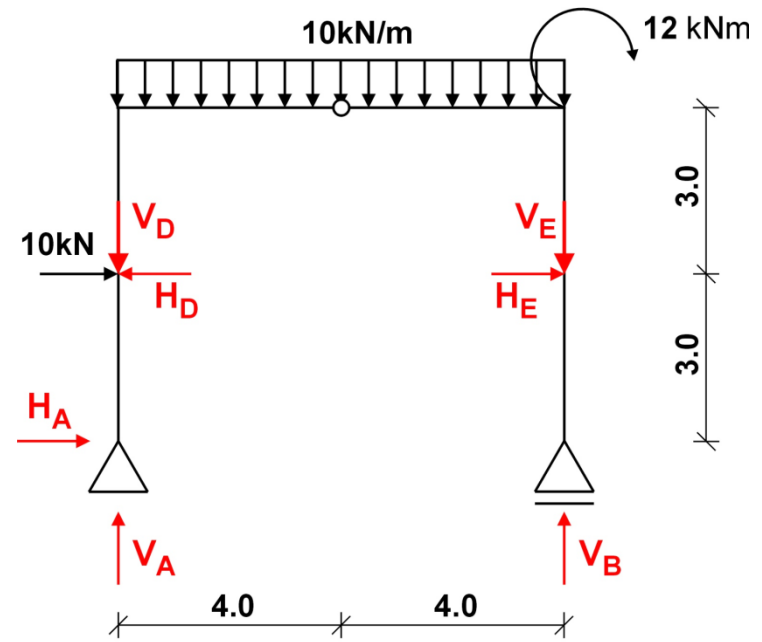
$$\sum M_C^P = -V_E \cdot 4m + H_E \cdot 3m + V_B \cdot 4m - 12kNm - 10kN/m \cdot 4m \cdot \frac{1}{2} \cdot 4m = 0$$

$$H_E = 29.667kN$$

$$H_D = 29.667kN$$



Przykład 12

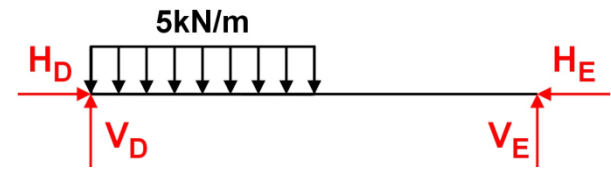


$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = H_D - H_E = 0 \\ \sum Y = V_D + V_E - 5kN/m \cdot 4m = 0 \\ \sum M_D = V_E \cdot 8m - 5kN/m \cdot 4m \cdot \frac{1}{2} \cdot 4m = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = H_A + 10kN = 0 \\ \sum Y = V_A + V_B - 5kN/m \cdot 4m - 10kN/m \cdot 8m = 0 \\ \sum M_A = V_B \cdot 8m - 10kN \cdot 3m - 12kNm - 5kN/m \cdot 4m \cdot \frac{1}{2} \cdot 4m - 10kN/m \cdot 8m \cdot \frac{1}{2} \cdot 8m = 0 \\ \sum M_C^P = -V_E \cdot 4m + H_E \cdot 3m + V_B \cdot 4m - 12kNm - 10kN/m \cdot 4m \cdot \frac{1}{2} \cdot 4m = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_A = -10kN \\ V_A = 49.75kN \\ V_B = 50.25kN \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_D = 29.667kN \\ H_E = 29.667kN \\ V_D = 15kN \\ V_E = 5kN \end{array} \right.$$

Sprawdzenie np.: $\sum M_B = 0$



Przykład 12

