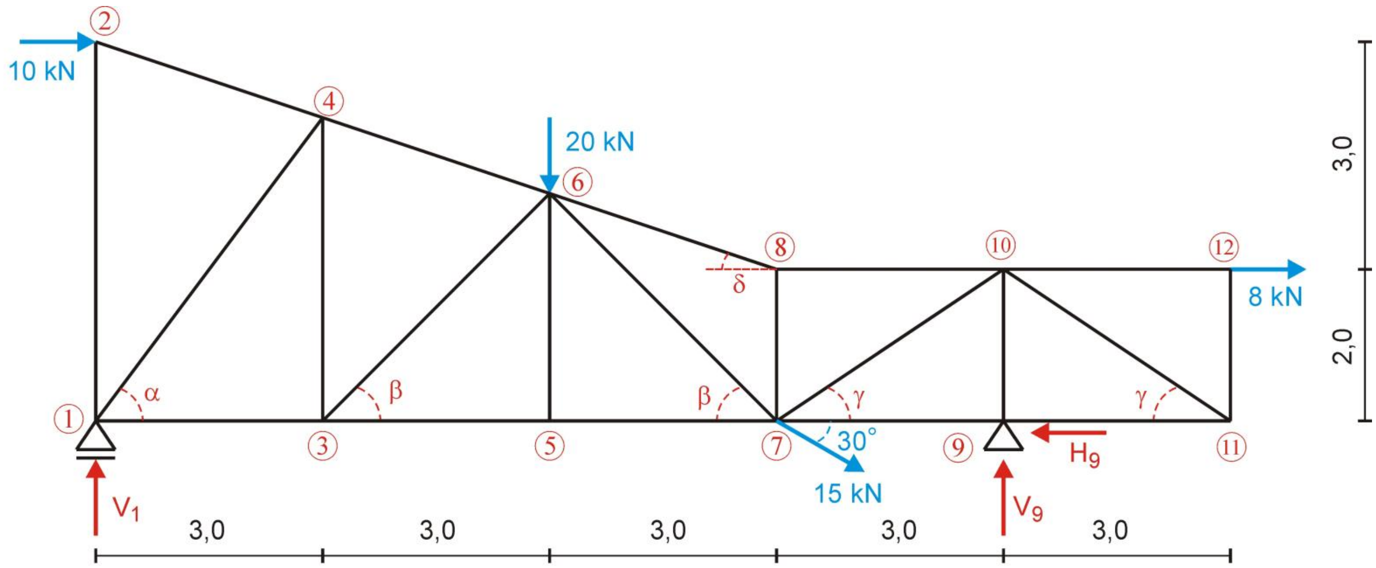
Rozwiązać kratownicę metodą równoważenia węzłów. Sprawdzić metodą Rittera w jednym przekroju.



1. Wyznaczenie wartości pomocniczych, czyli funkcji trygonometrycznych kątów zaznaczonych na rysunku.

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}} = 0.6 \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071 \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} = 0,8321 \qquad \cos\delta = \frac{9}{\sqrt{9^2+3^2}} = 0,9487$$

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = 0.8 \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071 \qquad \sin\gamma = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}} = 0,5547 \qquad \sin\delta = \frac{3}{\sqrt{9^2+3^2}} = 0,3162$$

2. Wyznaczenie reakcji

$$\begin{cases} \sum X = -H_9 + 10 + 8 + 15\cos 30° = 0 \\ \sum M_9 = 12V_1 + 10\cdot 5 - 20\cdot 6 + 8\cdot 2 - 15\sin 30°\cdot 3 = 0 \\ \sum Y = V_1 + V_9 - 20 - 25\sin 30° = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_9 = 30,990 \text{ kN} \\ V_1 = 6,375 \text{ kN} \\ V_9 = 21,125 \text{ kN} \end{cases}$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_{12} = 21,125\cdot 3 + 30,990\cdot 2 - 15\sin 30°\cdot 6 - 15\cos 30°\cdot 2 - 20\cdot 9 + 10\cdot 3 + 6,375\cdot 15 = -7,6\cdot 10^{-4} \approx 0$$

3. Metoda równoważenia węzłów.

Wydzielamy węzły kratownicy. W metodzie równoważenia węzłów możemy rozwiązywać tylko te węzły, w których występują dwie siły niewiadome, ponieważ każdy węzeł stanowi zbieżny płaski układ sił, który zapewnia dwa równania równowagi.

Przyjęto następującą kolejność rozwiązania: węzły: 2 – 1 – 3 – 4 – 5 – 12 – 11 – 9 – 10 – 8 – 7 – 6.

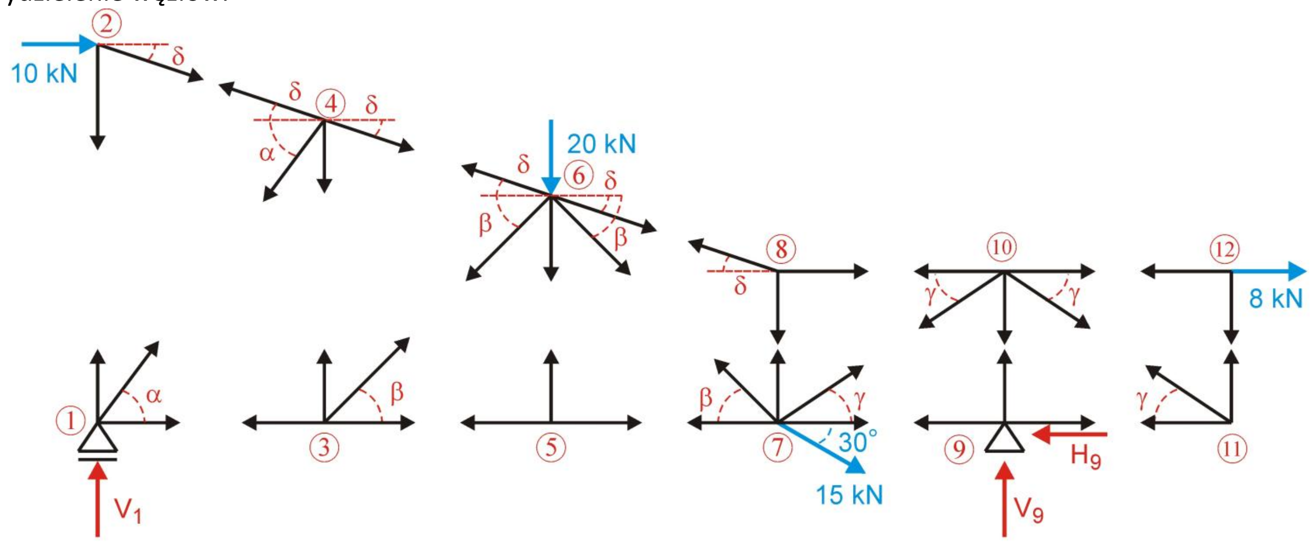
W metodzie równoważenia węzłów ostatnie 3 równania stanowią sprawdzenie poprawności rozwiązania. W niniejszym przypadku będzie to jedno równanie w węźle 7 oraz dwa równania w węźle 6.

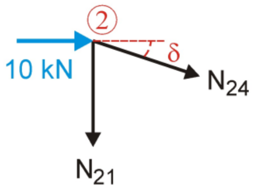
Wskazane jest w trakcie obliczeń metodą równoważenia węzłów zrobić sprawdzenie metodą Rittera. Unika się wówczas propagacji możliwego błędu, który ujawni się dopiero w równaniach sprawdzających. W przykładzie sprawdzenie metodą Rittera wykonano po rozwiązaniu węzła nr 4 lub 5.

W każdym węźle siłę niewiadomą kierujemy na zewnątrz węzła, co oznacza rozciąganie węzła, a więc i rozciąganie pręta. Wynik rozwiązania dodatni "+" oznacza rozciąganie węzła i pręta, wynik ujemny "-" ściskanie węzła i pręta.

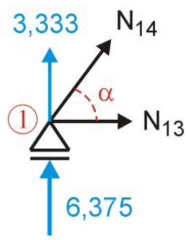
W kolejnych węzłach znane już siły kierujemy odpowiednio: od węzła – rozciąganie "+", do węzła – ściskanie "-".

Wydzielenie węzłów.

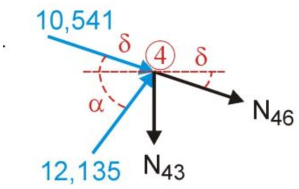




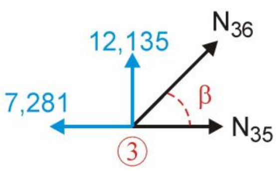
$$\begin{cases}\sum X = N_{24}\cos\delta + 10 = 0 \\ \sum Y = -N_{21} - N_{24}\sin\delta = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{24} = -10{,}541\ \text{kN} \\ N_{21} = 3{,}333\ \text{kN}\end{cases}$$



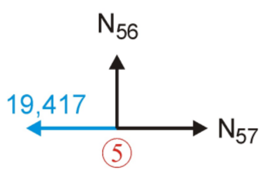
$$\begin{cases}\sum Y = N_{14}\sin\alpha + 6{,}375 + 3{,}333 = 0 \\ \sum X = N_{13} + N_{14}\cos\alpha = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{14} = -12{,}135\ \text{kN} \\ N_{13} = 7{,}281\ \text{kN}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\sum X = N_{46}\cos\delta + 10{,}541\cos\delta + 12{,}135\cos\alpha = 0 \\ \sum Y = -N_{46}\sin\delta - 10{,}541\sin\delta + 12{,}135\sin\alpha - N_{43} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{46} = -18{,}216\ \text{kN} \\ N_{43} = 12{,}135\ \text{kN}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\sum Y = N_{36}\sin\beta + 12{,}135 = 0 \\ \sum X = N_{35} + N_{36}\cos\beta - 7{,}281 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{36} = -17{,}162\ \text{kN} \\ N_{35} = 19{,}417\ \text{kN}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\sum X = N_{57} - 19{,}417 = 0 \\ \sum Y = N_{56} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{57} = 19{,}417\ \text{kN} \\ N_{56} = 0\end{cases}$$

4. Sprawdzenie metodą Rittera.

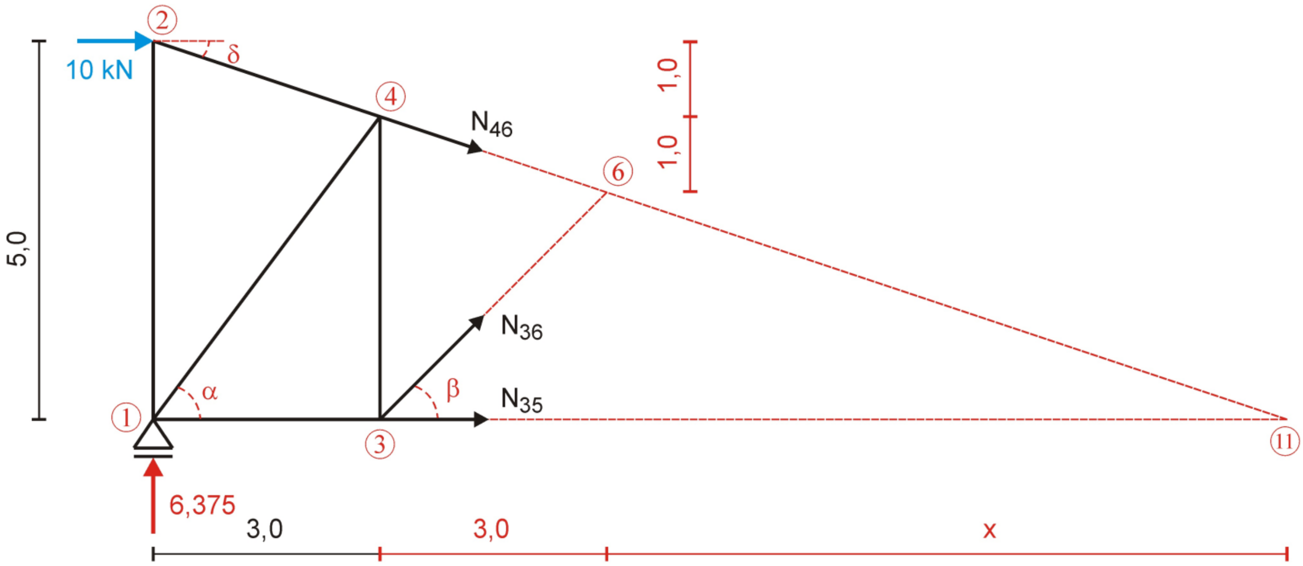
Należy wykonać przekrój przez 3 pręty nieprzecinające się w jednym punkcie.

Otrzymany układ sił jest płaskim dowolnym układem sił, a więc dysponujemy 3 równaniami równowagi. Równania równowagi to suma momentów (czasem suma rzutów sił).

Aby wyznaczyć siłę w jednym z prętów w przekroju należy napisać równanie sumy momentów względem punktu przecięcia się dwóch pozostałych prętów dla lewej lub prawej strony kraty.

W celu zilustrowania obliczeń wykonano obliczenia dla lewej i prawej strony kratownicy

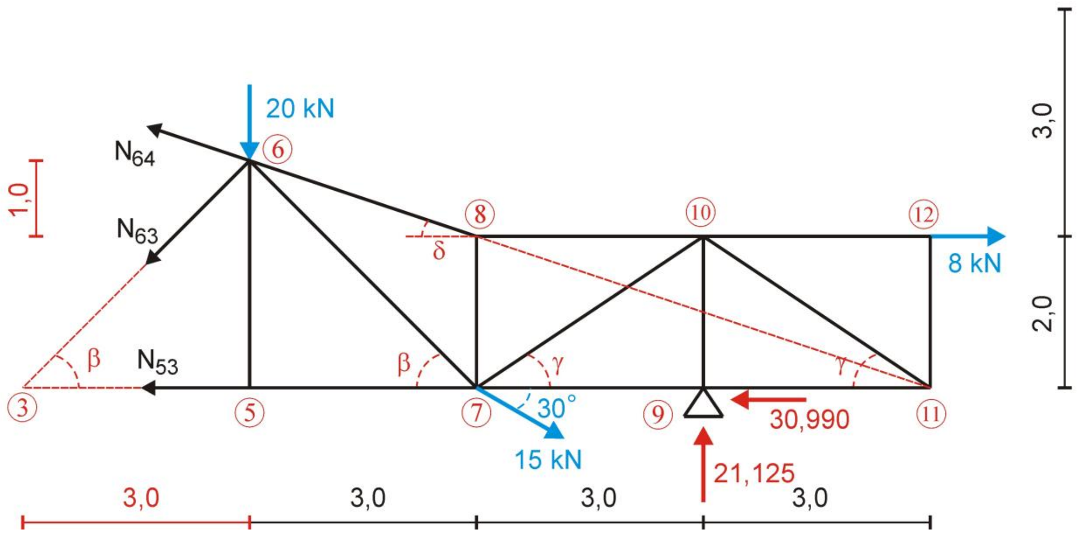
"lewo"



$$\frac{5}{6+x}=\frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad x=9\ \mathrm{m}$$

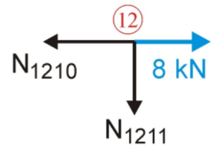
$$\begin{cases} \sum M_3^{\mathrm{lewo}} = 6,375\cdot 3+10\cdot 5+N_{46}\cos\delta\cdot 4=0 \\ \sum M_6^{\mathrm{lewo}} = 6,375\cdot 6+10\cdot 2-N_{35}\cdot 3=0 \\ \sum M_{11}^{\mathrm{lewo}} = 6,375\cdot 15+10\cdot 5+N_{36}\sin\beta\cdot 12=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_{46}=-18,216\ \mathrm{kN} \\ N_{35}=19,417\ \mathrm{kN} \\ N_{36}=-17,162\ \mathrm{kN} \end{cases}$$

"prawo"

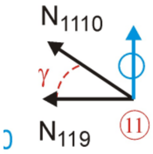


$$\begin{cases} \sum M_3^{\mathrm{prawo}} = -N_{64}\cos\delta\cdot 3-N_{64}\sin\delta\cdot 3+20\cdot 3+15\sin 30^\circ\cdot 6-21,125\cdot 9+8\cdot 2=0 \\ \sum M_6^{\mathrm{prawo}} = N_{53}\cdot 3+15\sin 30^\circ\cdot 3-15\cos 30^\circ\cdot 3-21,125\cdot 6+30,990\cdot 3-8\cdot 1=0 \\ \sum M_{11}^{\mathrm{prawo}} = -N_{63}\cos\beta\cdot 3-N_{63}\sin\beta\cdot 9-20\cdot 9-15\sin 30^\circ\cdot 6+21,125\cdot 3+8\cdot 2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_{64}=-18,216\ \mathrm{kN} \\ N_{53}=19,417\ \mathrm{kN} \\ N_{63}=-17,162\ \mathrm{kN} \end{cases}$$

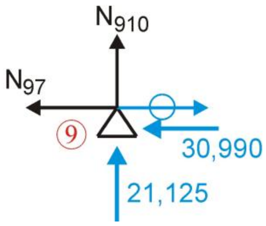
5. Kontynuacja obliczeń metodą równoważenia węzłów.



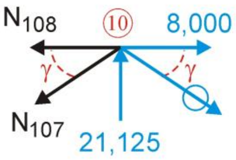
$$\begin{cases}\sum X = -N_{1210} + 8 = 0 \\ \sum Y = N_{1211} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{1210} = 8{,}000 \text{ kN} \\ N_{1211} = 0\end{cases}$$



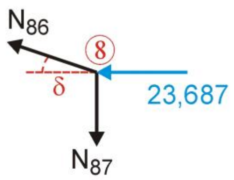
$$\begin{cases}\sum Y = N_{1110} \sin\gamma = 0 \\ \sum X = -N_{119} - N_{1110}\cos\gamma = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{1110} = 0 \\ N_{119} = 0\end{cases}$$



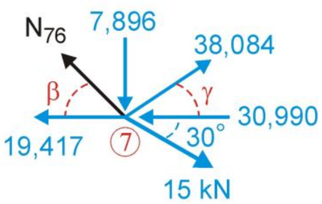
$$\begin{cases}\sum Y = N_{910} + 21{,}125 = 0 \\ \sum X = -N_{97} - 30{,}990 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{910} = -21{,}125 \text{ kN} \\ N_{97} = -30{,}990 \text{ kN}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\sum Y = -N_{107} \sin\gamma + 21{,}125 - 0 = 0 \\ \sum X = -N_{108} - N_{107}\cos\gamma + 8 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{107} = 38{,}084 \text{ kN} \\ N_{108} = -23{,}687 \text{ kN}\end{cases}$$



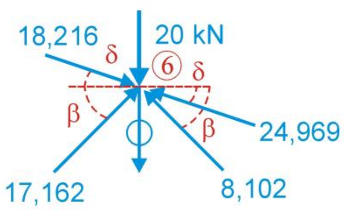
$$\begin{cases}\sum X = -N_{86}\cos\delta - 23{,}687 = 0 \\ \sum Y = -N_{87} + N_{86}\sin\delta = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}N_{86} = -24{,}969 \text{ kN} \\ N_{87} = -7{,}896 \text{ kN}\end{cases}$$



$$\sum X = -N_{76}\cos\beta - 19{,}417 + 15\cos 30° - 30{,}990 + 38{,}084\cos\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{76} = -8{,}102 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum Y = -8{,}102\sin\beta - 7{,}896 + 38{,}084 - 15\sin 30° \approx 0$$



$$\begin{cases}\sum Y = -18{,}216\sin\delta - 20 + 24{,}969\sin\delta + 8{,}102\sin\beta - 0 + 17{,}162\sin\beta \approx 0 \\ \sum X = 18{,}216\cos\delta - 24{,}969\cos\delta - 8{,}102\cos\beta - 0 + 17{,}162\cos\beta \approx 0\end{cases}$$

6. Zestawienie sił na rysunku.

Rozwiązanie kratownicy to wyznaczenie reakcji i sił normalnych w prętach, których wartości pokazujemy na rysunku. Znak "+" oznacza rozciąganie, "-" ściskanie prętów. Wystarczy podać znak, bez konieczności używania strzałek. Najlepiej zestawienie wykonywać w trakcie obliczeń.