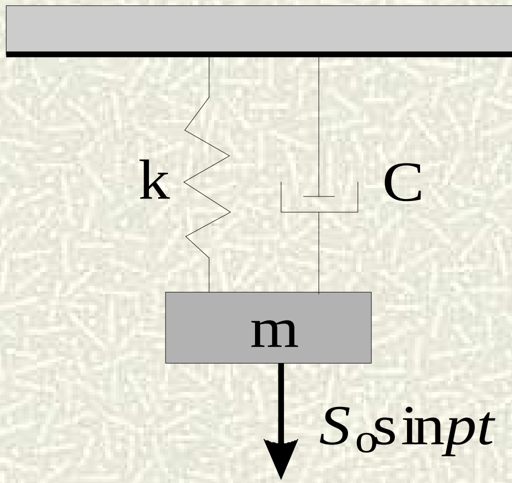
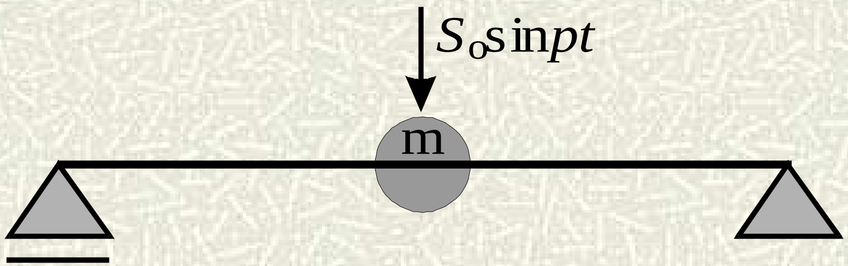
Rodzaje drgań na przykładzie układu o jednym stopniu swobody

Układ o jednym stopniu swobody

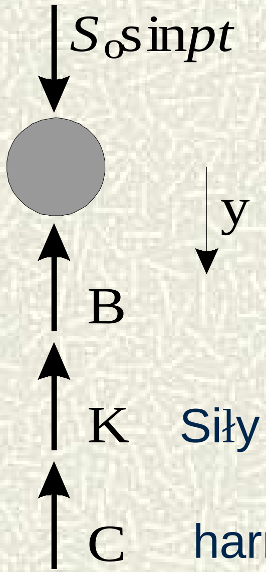


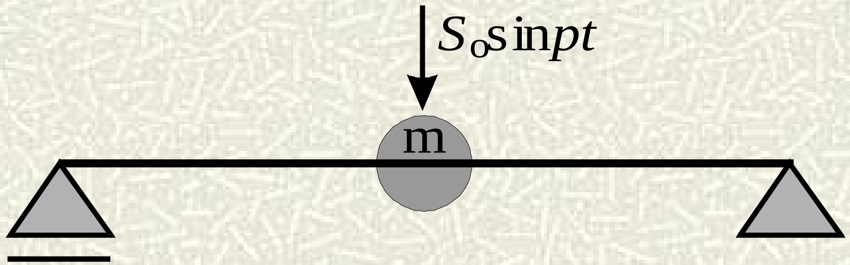
Schemat układu
o jednym stopniu swobody



Przykład układu
o jednym stopniu swobody

Zestawienie sił w układzie o jednym stopniu swobody z harmoniczną siłą wymuszającą





Siły działające na układ:

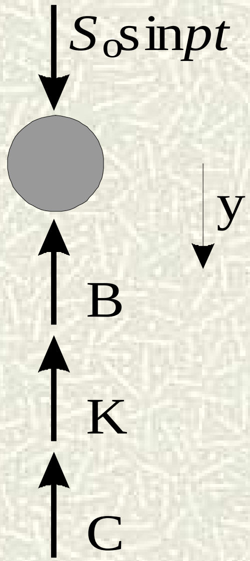
harmoniczna siła wymuszająca - $S_o \sin pt$

siła sprężystości (sztywność belki przeciwstawiająca się ruchowi) - $K = ky$

siła tłumienia (tłumienie wiskotyczne materiałowo-konstrukcyjne) – $C = c\dot{y}$

siła bezwładności - $B = m\ddot{y}$

Równanie ruchu układu o jednym stopniu swobody



Siła wymuszająca (zmienna w czasie)

tłumienie

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = S_o \sin pt$$

siła bezwładności

sztywność

Zestawienie rodzajów drgań

Drgania własne $$m\ddot{y} + ky = 0$$

Drgania swobodne (drgania tłumione)

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

Drgania wymuszone nie tłumione

$$m\ddot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Drgania wymuszone tłumione

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Drgania własne

Rozwiązanie równania drgań własnych

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

jest całką ogólną równania, opisującego drgania wymuszone nie tłumione czyli

$$m\ddot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Drgania własne

Rozwiązanie równania drgań własnych

$$y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

Po uwzględnieniu warunków początkowych:

$$y_o = A_o \sin(\omega t)$$

gdzie
ω – częstość drgań własnych,
A_o – amplituda drgań własnych zależna od warunków początkowych

Drgania swobodne układu

Drgania swobodne są to drgania układu rzeczywistego z tłumieniem jakie można obserwować po wstępnym wymuszeniu ruchu, a następnie pozostawieniu konstrukcji bez dodatkowych obciążeń zmiennych.

Rozwiązanie równania drgań swobodnych

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

jest całką ogólną równania, opisującego drgania wymuszone tłumione czyli

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Drgania swobodne układu

Rozwiązanie równania drgań swobodnych, otrzymujemy na podstawie równania

$$mr^2 + cr + k = 0$$

które uzyskujemy po podstawieniu wzoru: $y = e^{rt}$

Rozwiązanie równania zależy od parametru równania kwadratowego:

$$\Delta = c^2 - 4m^2\omega^2$$

Drgania swobodne układu

Analizę problemu wykonuje się dla równania w prostszej formie, którą uzyskuje się po podzieleniu obu stron równania przez *m*

$$mr^2 + cr + k = 0 \;/\; m$$

czyli $r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$

gdzie:
ω – częstość drgań własnych,
γ – współczynnik tłumienia.

Delta równania kwadratowego wynosi: $\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega^2$
i przybiera prostszą formę

Drgania swobodne układu

Rozwiązanie równania drgań swobodnych zależy od wzajemnej relacji ω i γ czyli mamy trzy przypadki:

Przypadek 1 - Duże tłumienie $\gamma>\omega$ czyli $\Delta > 0$

Przypadek 2 -Tłumienie krytyczne $\gamma = \omega$ czyli $\Delta = 0$

Sytuacja najczęściej spotykana w konstrukcjach

Przypadek 3 - Małe tłumienie $\gamma<\omega$ czyli $\Delta < 0$

Drgania swobodne układu
Przypadek 1 - Duże tłumienie $\gamma > \omega$

$$\Delta > 0 \qquad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Pierwiastki równania kwadratowego $r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$

$$r_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

$$r_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego: $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega^2 y = 0$

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 1 - Wyznaczenie stałych

Warunki początkowe: $t=0$, $y=y_o$, $\dot{y}=v=v_o$

Równanie ruchu (rozwiązanie równania)

$y=C_1 e^{r_1 t}+C_2 e^{r_2 t}$ i po uwzględnieniu warunków początkowych

$$y_o=C_1+C_2$$

Równanie prędkości po zróżniczkowaniu równania ruchu względem czasu

$$\dot{y}=C_1 r_1 e^{r_1 t}+C_2 r_2 e^{r_2 t}$$

i po uwzględnieniu warunków początkowych

$$v_o=C_1 r_1+C_2 r_2$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 1 - Wyznaczenie stałych

Stałe wyznaczamy z układu równań:

$$\begin{cases} y_o = C_1 + C_2 \\ v_o = C_1 r_1 + C_2 r_2 \end{cases}$$

gdzie:

$$r_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

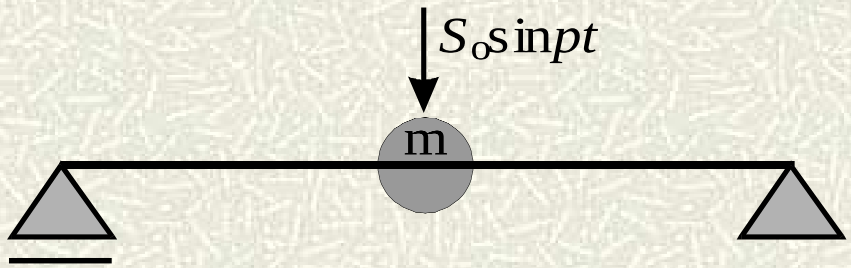
$$r_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

i są one opisane wzorami:

$$C_1 = \frac{v_o + y_o\gamma - y_0\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}{-2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}$$

$$C_2 = \frac{v_o + y_o\gamma + y_o\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 1 - Przykład



Dane:

Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=2 rad/s,
Częstość drgań własnych układu ω= 1 rad/s.

Drgania swobodne układu
Przypadek 1 - Przykład

Dane:
Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=2 rad/s,
Częstość drgań własnych układu ω= 1 rad/s.

Szukamy wielkości z równania: $$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$r_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad r_1 = -2 - \sqrt{3} = -3.73205\,[\mathrm{rad/s}]$$

$$r_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad r_2 = -2 + \sqrt{3} = -0.26795\,[\mathrm{rad/s}]$$

Drgania swobodne układu Przypadek 1 - Przykład

Dane:
Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=2 rad/s,
Częstość drgań własnych układu ω= 1 rad/s.

Szukamy wielkości z równania:

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$C_1 = \frac{v_o + y_o\gamma - y_0\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}{-2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}$$

$$C_1 = \frac{10\text{m/s} + 0.05\text{m}\cdot 2\text{rad/s} - 0.05\text{m}\sqrt{2^2 - 1^2}\,\text{rad/s}}{-2\sqrt{2^2 - 1^2}\,\text{rad/s}} = -0.264\text{m}$$

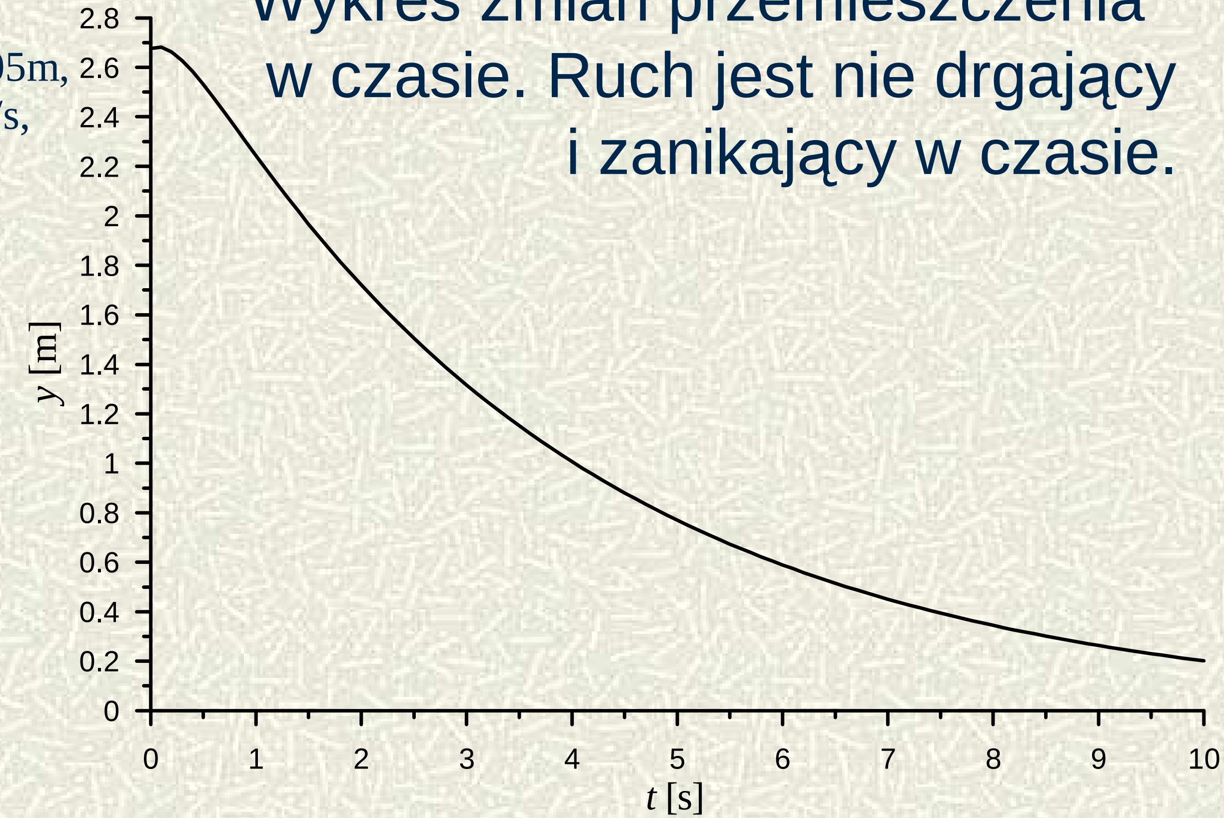
$$C_2 = \frac{v_o + y_o\gamma + y_o\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}$$

$$C_2 = \frac{10\text{m/s} + 0.05\text{m}\cdot 2\text{rad/s} + 0.05\text{m}\sqrt{2^2 - 1^2}\,\text{rad/s}}{2\sqrt{2^2 - 1^2}\,\text{rad/s}} = 2.941\text{m}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 1 - Przykład

Dane:
Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=2 rad/s,
Częstość drgań
własnych układu ω= 1 rad/s.

Wykres zmian przemieszczenia w czasie. Ruch jest nie drgający i zanikający w czasie.



Rozwiązanie:

$$y = -0.264\text{m} \cdot e^{-3.73205\text{rad/s}\,t} + 2.941\text{m} \cdot e^{-0.26795\text{rad/s}\,t}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 2 - Tłumienie krytyczne $\gamma=\omega$

$$\Delta = 0 \qquad \sqrt{\Delta} = 0$$

Pierwiastki równania kwadratowego $r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$

$$r = r_1 = r_2 = -\gamma$$

Rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

$$y = \left(C_1 t + C_2\right)e^{rt}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 2 - Tłumienie krytyczne $\gamma=\omega$

Warunki początkowe: $t=0$, $y=y_o$, $\dot{y}=v=v_o$

Równanie ruchu (rozwiązanie równania) $y=\left(C_1 t+C_2\right)e^{rt}$

i po uwzględnieniu warunków początkowych $y_o=C_2$

Równanie prędkości po zróżniczkowaniu równania ruchu względem czasu

$$\dot{y}=C_1\left(tr+1\right)e^{rt}+C_2 r e^{rt}$$

i po uwzględnieniu warunków początkowych

$$v_o=C_1+C_2\gamma$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 2 - Wyznaczenie stałych

Stałe wyznaczamy z układu równań: $y = \left(C_1 t + C_2\right) e^{rt}$

$$\begin{cases} y_o = C_2 \\ v_o = C_1 + C_2 \gamma \end{cases}$$

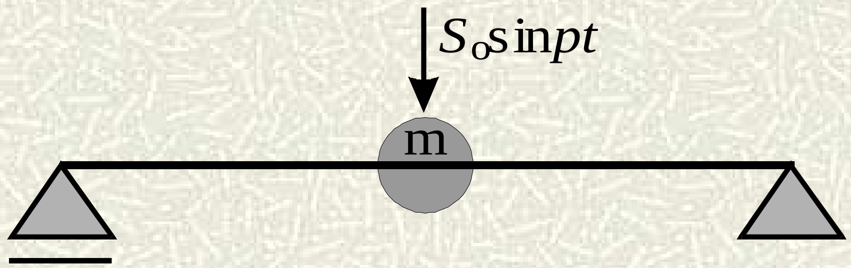
gdzie: $r = -\gamma$

i są one opisane wzorami:

$$C_1 = v_o - y_o \gamma$$

$$C_2 = y_o$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 2 - Przykład



Dane:

Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=1 rad/s,
Częstość drgań własnych układu ω= 1 rad/s.

Drgania swobodne układu
Przypadek 2 - Przykład

Dane:
Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=1 rad/s,
Częstość drgań własnych układu ω= 1 rad/s.

Szukamy wielkości z równania:

$$y = \left(C_1 t + C_2\right)e^{rt}$$

$$r = -\gamma \qquad r = -1\,\mathrm{rad/s}$$

$$C_1 = v_o - y_o\gamma \qquad C_1 = 9.95\,\mathrm{m/s}$$

$$C_2 = y_o \qquad C_2 = 0.05\,\mathrm{m}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 2 - Przykład

Dane:
Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=1 rad/s,
Częstość drgań
własnych układu ω= 1 rad/s.

Wykres zmian przemieszczenia w czasie. Ruch jest nie drgający i zanikający w czasie.

Rozwiązanie:

$$y = \left(9.95\mathrm{m/s} \cdot t + 0.05\mathrm{m}\right) e^{-1\mathrm{rad/s}t}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 3 - Małe tłumienie $\gamma<\omega$

$$\Delta < 0 \qquad \sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Urojone pierwiastki równania kwadratowego

$$r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$$

$$r_1 = -\gamma - i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad r_2 = \alpha - \beta i$$

$$r_2 = -\gamma + i\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad r_1 = \alpha + \beta i$$

Rozwiązanie równania różniczkowego: $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega^2 y = 0$

$$y = e^{\alpha t}\left(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)\right)$$

gdzie: $\alpha = -\gamma \qquad \beta = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = \omega_1$

ω_1 – częstość drgań swobodnych

Drgania swobodne układu
Przypadek 3 - Wyznaczenie stałych

Warunki początkowe: t=0, y=y_o , $\dot{y} = v = v_o$

Równanie ruchu (rozwiązanie równania)

$$y = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\right)$$

i po uwzględnieniu warunków początkowych $\qquad y_o = C_1$

Równanie prędkości po zróżniczkowaniu równania ruchu względem czasu

$$\dot{y} = \alpha e^{\alpha t}\left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\right) + e^{\alpha t}\left(-\beta C_1 \sin(\beta t) + \beta C_2 \cos(\beta t)\right)$$

i po uwzględnieniu warunków początkowych

$$v_o = -\gamma C_1 + C_2\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 3 - Wyznaczenie stałych

$$y = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\right)$$

Stałe wyznaczamy z układu równań:

$$\begin{cases} y_o = C_1 \\ v_o = -\gamma C_1 + C_2\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{cases}$$

, ,

i są one opisane wzorami:

$$C_1 = y_o$$

$$C_2 = \frac{v_o + \gamma y_o}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 3 -
Zmiana formy zapisu równania ruchu

Parametry drgań swobodnych z małym tłumieniem:

Składowa rzeczywista: $y_{x_1} = e^{\alpha t} C_1 \cos(\beta t)$

Składowa urojona: $y_{x_2} = e^{\alpha t} C_2 \sin(\beta t)$

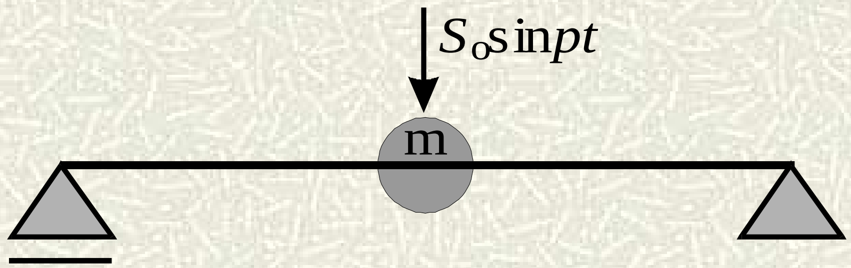
Początkowa amplituda drgań: $A_o = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

Faza drgań: $\varphi_o = \arctan \frac{C_1}{C_2}$

Równanie ruchu

$$y = A_o e^{\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_o)$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 3 - Przykład



Dane:

Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=0.5 rad/s,
Częstość drgań własnych układu ω= 1 rad/s.

Drgania swobodne układu
Przypadek 3 - Przykład

Dane:
Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=0.5 rad/s,
Częstość drgań własnych układu ω= 1 rad/s.

Szukamy wielkości z równania:

$$y = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\right)$$

$$\alpha = -\gamma \qquad \alpha = -0.5\,\mathrm{rad/s}$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = \omega_1 \qquad \beta = \sqrt{2^2 - 0.5^2} = \omega_1 = 0.866\,[\mathrm{rad/s}]$$

$$C_1 = y_o \qquad C_1 = 0.05\,\mathrm{m}$$

$$C_2 = \frac{v_o + \gamma y_o}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \qquad C_2 = 11.5758\ \mathrm{m}$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 3 - Przykład

Dane:
Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=0.5 rad/s,
Częstość drgań własnych układu ω= 1 rad/s.

Parametry drgań swobodnych z małym tłumieniem:

$$A_o = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

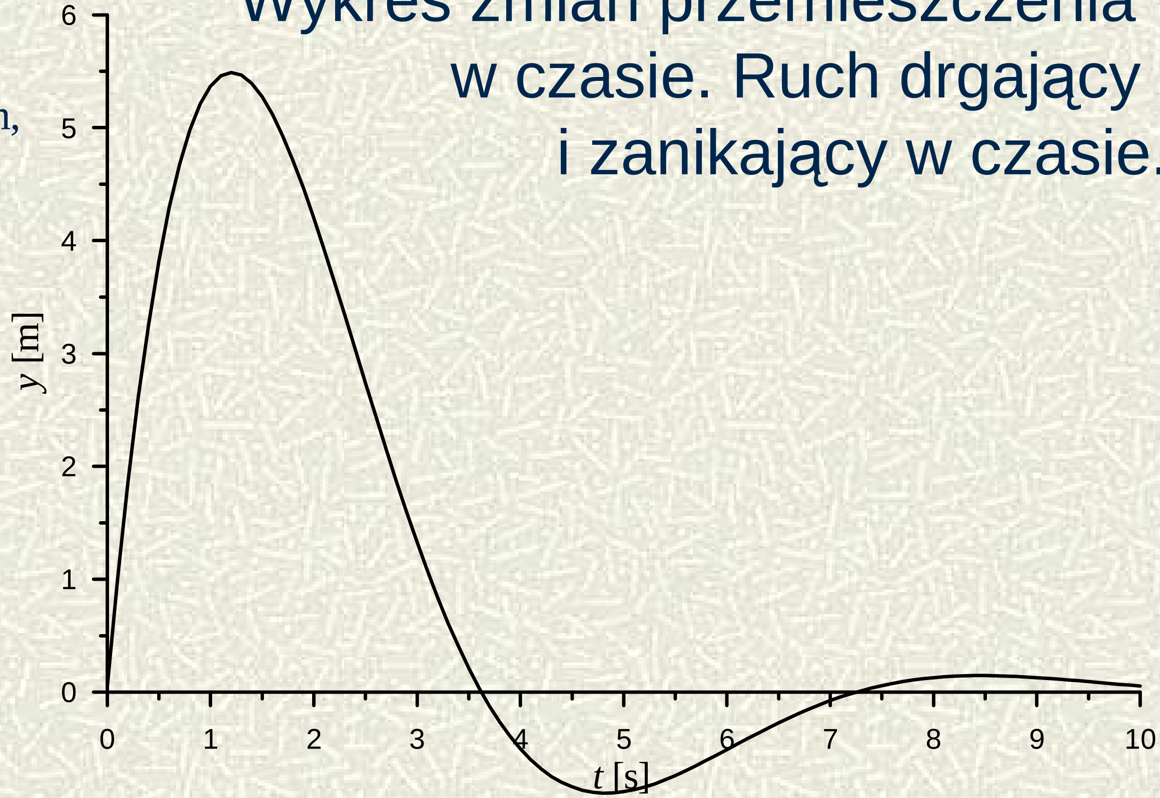
A_o=11.5759m

$$\varphi = \arctan\frac{C_1}{C_2} = 0.00432$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 3 - Przykład

Dane:
Początkowe wychylenie y_o=0.05m,
Początkowa prędkość v_o=10m/s,
Tłumienie układu γ=0.5 rad/s,
Częstość drgań
własnych układu ω= 1 rad/s.

Wykres zmian przemieszczenia w czasie. Ruch drgający i zanikający w czasie.



Rozwiązanie:

$$y = e^{-0.5\mathrm{rad/s}t}\left(0.05\mathrm{m}\cos(0.866\mathrm{rad/s}t) + 11.5758\mathrm{m}\sin(0.866\mathrm{rad/s}t)\right)$$

$$y = 11.5759\mathrm{m}\cdot e^{-0.5\mathrm{rad/s}\cdot t}\sin(0.866\mathrm{rad/s}\cdot t + 0.00432)$$

Drgania swobodne układu
Przypadek 3 - Parametry tłumienia

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

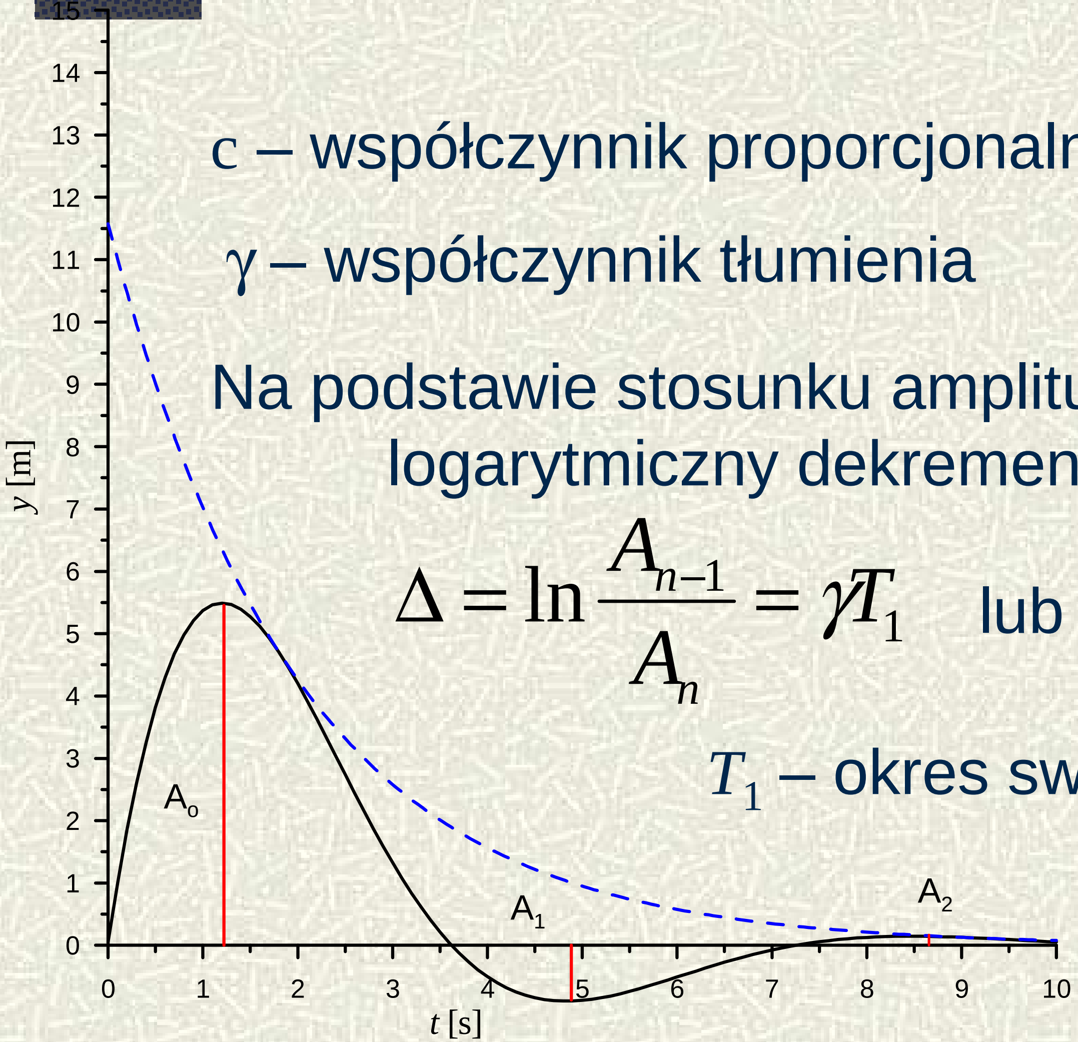
c – współczynnik proporcjonalności tłumienia do prędkości

γ – współczynnik tłumienia

Na podstawie stosunku amplitud wyznacza się logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\Delta = \ln \frac{A_{n-1}}{A_n} = \gamma T_1 \quad \text{lub} \quad \Delta = \ln \frac{y(t)}{y(t+T_1)} = \gamma T_1$$

T_1 – okres swobodnych drgań tłumionych



Równanie krzywej przerywanej

$$y = A_o e^{-\gamma t}$$

Drgania wymuszone

Drgania wymuszone nie tłumione

$$m\ddot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Drgania wymuszone tłumione

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Rozwiązanie (suma całki ogólnej i szczególnej)

$$y = y_o + y_p$$

Drgania wymuszone nie tłumione

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$m\ddot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Całka szczególna

$$y_p = A_p \sin\left(pt\right)$$

gdzie:

$$A_p = \frac{S_o}{m}\frac{1}{\left(\omega^2 - p^2\right)}$$

Drgania wymuszone nie tłumione

Równanie różniczkowe

$$m\ddot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Rozwiązanie

$$y = A_p \sin(pt) + A_o \sin(\omega t)$$

Drgania wymuszone tłumione

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Całka szczególna

$$y_p = A_p \sin\left(pt - \varphi\right)$$

gdzie:

$$A_p = \frac{S_o}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4\gamma^2 p^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\gamma p}{\omega^2 - p^2}$$

Drgania wymuszone tłumione

Równanie różniczkowe

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = S_o \sin pt$$

Rozwiązanie

$$y = A_o e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi_o) + A_p \sin(pt - \varphi)$$

Współczynnik dynamiczny

Współczynnik dynamiczny jest to stosunek:

amplitudy drgań wywołanych siłą zmienną w czasie z amplitudą siły S_o

do

przemieszczenia statycznego wywołanego siłą S_o - y_{st}

Współczynnik dynamiczny drgań wymuszonych nie tłumionych

Amplituda drgań wymuszonych nie tłumionych

$$A_p = \frac{S_o}{m} \frac{1}{\left(\omega^2 - p^2\right)}$$

Przemieszczenie punktu konstrukcji o sztywności k

$$y_{st} = \frac{S_o}{k}$$

Współczynnik dynamiczny drgań wymuszonych nie tłumionych

Z definicji częstości drgań własnych wynika:

$$k = m\omega^2 \qquad \text{czyli} \qquad y_{st} = \frac{S_o}{m\omega^2}$$

$$A_p = \frac{S_o}{m}\frac{1}{\left(\omega^2 - p^2\right)}$$

$$\beta = \frac{A_p}{y_{st}} \qquad \beta = \frac{\dfrac{S_o}{m}\dfrac{1}{\left(\omega^2 - p^2\right)}}{\dfrac{S_o}{m}\dfrac{1}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2}$$

Współczynnik dynamiczny drgań wymuszonych tłumionych

Amplituda drgań wymuszonych tłumionych

$$A_p = \frac{S_o}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4\gamma^2 p^2}}$$

Przemieszczenie punktu konstrukcji o sztywności k

$$y_{st} = \frac{S_o}{k} \qquad y_{st} = \frac{S_o}{m\omega^2}$$

Współczynnik dynamiczny drgań wymuszonych tłumionych

$$\beta = \frac{A_p}{y_{st}}$$

$$\beta = \frac{\dfrac{S_o}{m}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + 4\gamma^2 p^2}}}{\dfrac{S_o}{m}\dfrac{1}{\omega^2}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2\right)^2 + 4\gamma^2\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2}}$$

Rezonans drgań

Współczynnik dynamiczny
dla drgań wymuszonych tłumionych

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right)^2 + 4\gamma^2\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}$$

Jeżeli $\omega \to p$, to $\beta = \frac{1}{2\gamma}$

Rezonans drgań

Współczynnik dynamiczny
dla drgań wymuszonych nie tłumionych

$$\beta = \frac{1}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}$$

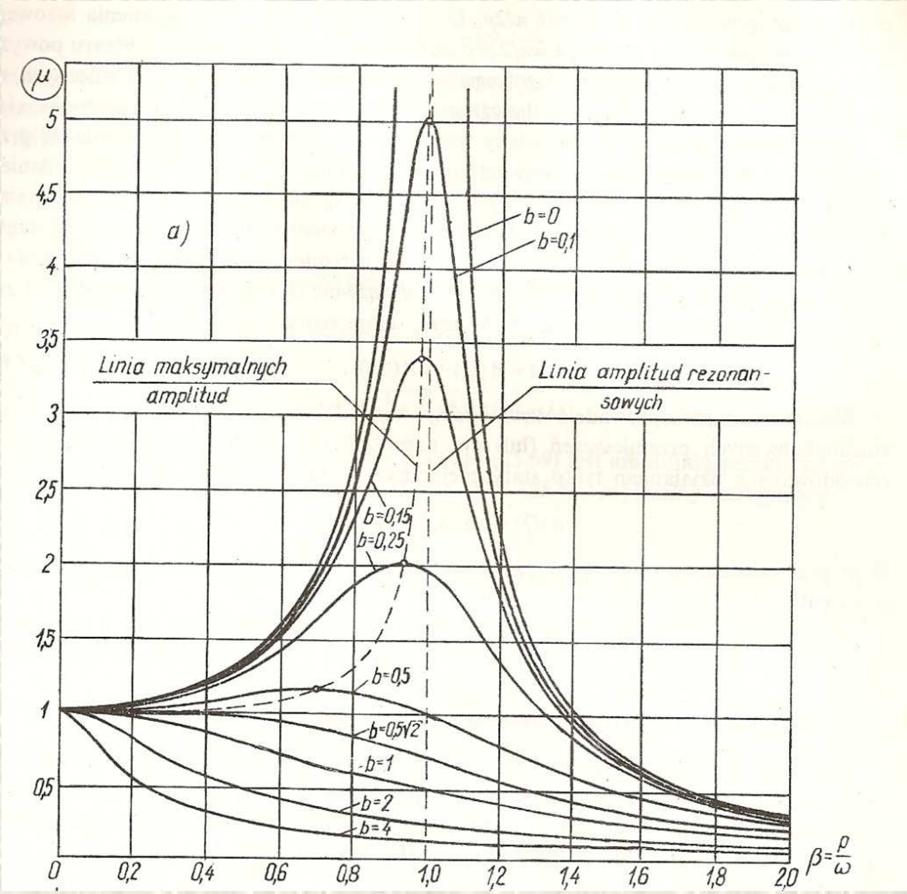
Jeżeli $\omega \to p$, to $\beta \to \infty$

W przypadku wymuszania drgań z częstością zbliżoną do częstości drgań własnych następuje znaczący wzrost amplitudy drgań. W przypadku braku tłumienia amplituda dąży do nieskończoności.

Rezonans drgań

μ - amplituda

$$b = \frac{\gamma}{\omega}$$



Z. Dyląg i in., Mechanika budowli.

Koniec