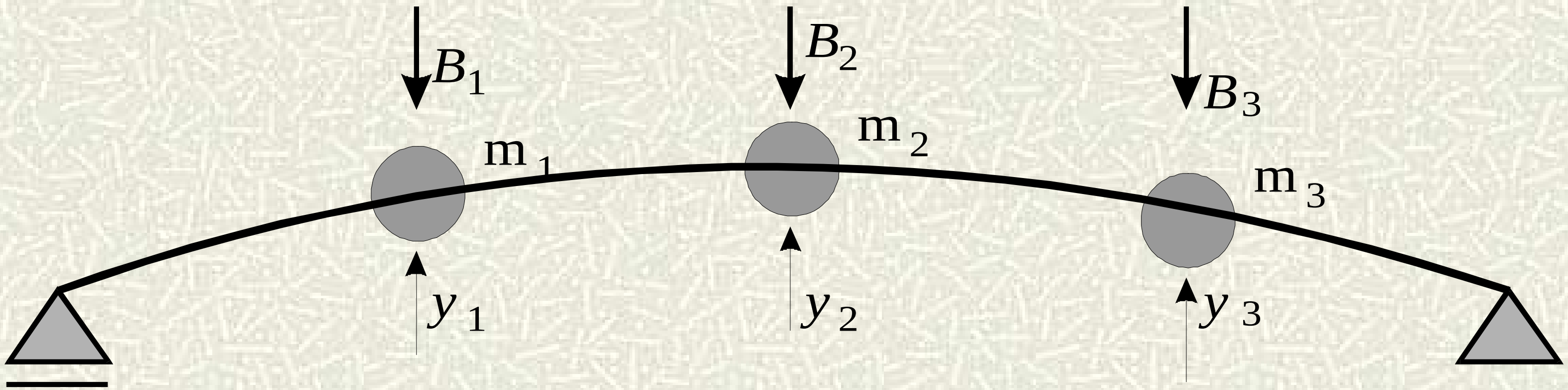
Drgania układu o wielu stopniu swobody

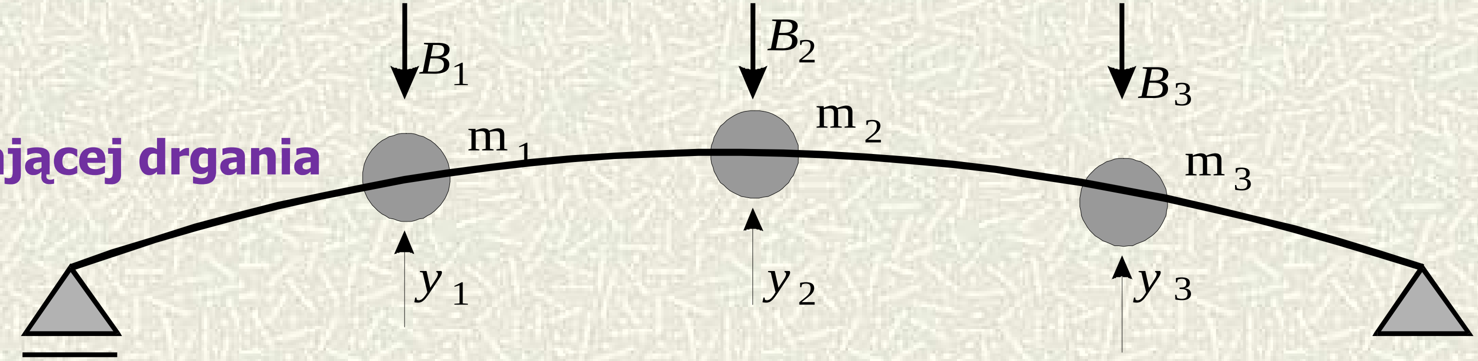
Zasada d'Alamberta



Zasada d'Alemberta: w odniesieniu do konstrukcji, znajdującej się pod wpływem sił zmiennych w czasie, można stosować zasady statyki pod warunkiem, że uwzględni się siły bezwładności.

Drgania własne układ o wielu stopniach swobody

Brak siły wymuszającej drgania



Przemieszczenia poszczególnych mas równają się sumie przemieszczeń od poszczególnych sił bezwładności:

$$-y_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} B_j \quad \text{gdzie:} \quad B_j = m_j \ddot{y}_j$$

a dla belki powyżej

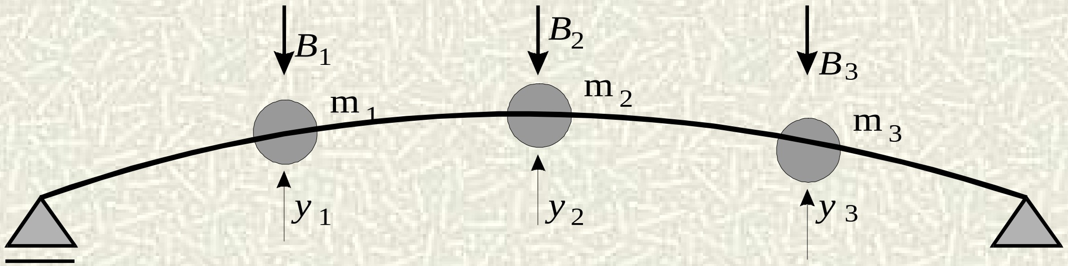
$$\begin{cases} -y_1 = \delta_{11} B_1 + \delta_{12} B_2 + \delta_{13} B_3 \\ -y_2 = \delta_{21} B_1 + \delta_{22} B_2 + \delta_{23} B_3 \\ -y_3 = \delta_{31} B_1 + \delta_{32} B_2 + \delta_{33} B_3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y_1 = \delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{13} m_3 \ddot{y}_3 \\ y_2 = \delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{23} m_3 \ddot{y}_3 \\ y_3 = \delta_{31} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{32} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{33} \end{cases}$$

Drgania własne układ o wielu stopniach swobody

Rozwiązanie równania różniczkowego ma formę:

$y_i = A_i \sin(\omega t)$ czyli $\ddot{y}_i = -A_i \omega^2 \sin(\omega t)$

gdzie ω – częstość drgań własnych

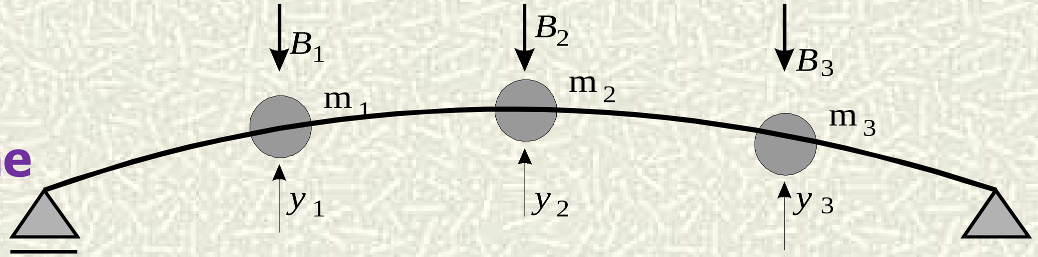


$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{13} m_3 \ddot{y}_3 \\ y_2 = \delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{23} m_3 \ddot{y}_3 \\ y_3 = \delta_{31} m_1 \ddot{y}_1 + \delta_{32} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{33} m_3 \ddot{y}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \sin(\omega t) = \delta_{11} m_1 A_1 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{12} m_2 A_2 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{13} m_3 A_3 \omega^2 \sin(\omega t) \\ A_2 \sin(\omega t) = \delta_{21} m_1 A_1 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{22} m_2 A_2 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{23} m_3 A_3 \omega^2 \sin(\omega t) \\ A_3 \sin(\omega t) = \delta_{31} m_1 A_1 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{32} m_2 A_2 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{33} m_3 A_3 \omega^2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Równanie ruchu układu o kilku stopniach swobody

Brak siły wymuszającej drgania własne



$$\begin{cases} A_1 \sin(\omega t) = \delta_{11} m_1 A_1 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{12} m_2 A_2 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{13} m_3 A_3 \omega^2 \sin(\omega t) \\ A_2 \sin(\omega t) = \delta_{21} m_1 A_1 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{22} m_2 A_2 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{23} m_3 A_3 \omega^2 \sin(\omega t) \\ A_3 \sin(\omega t) = \delta_{31} m_1 A_1 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{32} m_2 A_2 \omega^2 \sin(\omega t) + \delta_{33} m_3 A_3 \omega^2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Po przekształceniach układ równań przybiera formę:

$$\begin{cases} 0 = \left(\delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2}\right) A_1 + \delta_{12} m_2 A_2 + \delta_{13} m_3 A_3 \\ 0 = \delta_{21} m_1 A_1 + \left(\delta_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2}\right) A_2 + \delta_{23} m_3 A_3 \\ 0 = \delta_{31} m_1 A_1 + \delta_{32} m_2 A_2 + \left(\delta_{33} m_3 - \frac{1}{\omega^2}\right) A_3 \end{cases}$$

Wyznaczanie częstości drgań własnych

Układ równań opisujący ruch:

$$
\begin{cases}
0 = \left(\delta_{11}m_1 - \dfrac{1}{\omega^2}\right)A_1 + \delta_{12}m_2A_2 + \delta_{13}m_3A_3 \\
0 = \delta_{21}m_1A_1 + \left(\delta_{22}m_2 - \dfrac{1}{\omega^2}\right)A_2 + \delta_{23}m_3A_3 \\
0 = \delta_{31}m_1A_1 + \delta_{32}m_2A_2 + \left(\delta_{33}m_3 - \dfrac{1}{\omega^2}\right)A_3
\end{cases}
$$

lub

$$
\begin{bmatrix}
\delta_{11}m_1 - \dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2 & \delta_{13}m_3 \\
\delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{31}m_3 \\
\delta_{31}m_1 & \delta_{32}m_2 & \delta_{33}m_3 - \dfrac{1}{\omega^2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0
$$

Wyznaczanie częstości drgań własnych

Układ równań opisujący ruch:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}m_1 - \dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2 & \delta_{13}m_3 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{31}m_3 \\ \delta_{31}m_1 & \delta_{32}m_2 & \delta_{33}m_3 - \dfrac{1}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0$$

gdzie:

niewiadomymi są ω – częstość drgań własnych [rad/s], A_i – amplitudy drgań mas na i –tym stopniu swobody

a znane są m_i – masy na i –tym stopniu swobody, δ_{ij} – przemieszczenia na kierunku i wywołane siłą jednostkowych, działającą na kierunku j

Wyznaczanie częstości drgań własnych

Rozwiązanie układu równań :

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - \dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2 & \delta_{13}m_3 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{31}m_3 \\ \delta_{31}m_1 & \delta_{32}m_2 & \delta_{33}m_3 - \dfrac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{lub} \quad \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} = 0$$

To jest nie prawdą

czyli to musi być równe zero

Wyznaczanie częstości drgań własnych

Częstości są rozwiązaniem równania jakie powstanie po policzeniu wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} m_1 - \dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{12} m_2 & \delta_{13} m_3 \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 - \dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{31} m_3 \\ \delta_{31} m_1 & \delta_{32} m_2 & \delta_{33} m_3 - \dfrac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0$$

Po podzieleniu kolumn przez m_i ten wyznacznik wygląda tak:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} - \dfrac{1}{\omega^2 m_1} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \dfrac{1}{\omega^2 m_2} & \delta_{31} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} - \dfrac{1}{\omega^2 m_3} \end{vmatrix} = 0$$

Wyznaczanie amplitud drgań własnych

Amplitud drgań własnych nie można policzyć, natomiast można policzyć stosunek amplitud. Układ równań:

$$\begin{cases} 0 = \left(\delta_{11} m_1 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) A_1 + \delta_{12} m_2 A_2 + \delta_{13} m_3 A_3 \\ 0 = \delta_{21} m_1 A_1 + \left(\delta_{22} m_2 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) A_2 + \delta_{23} m_3 A_3 \\ 0 = \delta_{31} m_1 A_1 + \delta_{32} m_2 A_2 + \left(\delta_{33} m_3 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) A_3 \end{cases}$$

Dzielimy przez A_1 czyli otrzymujemy:

$$\begin{cases} 0 = \left(\delta_{11} m_1 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) + \delta_{12} m_2 \dfrac{A_2}{A_1} + \delta_{13} m_3 \dfrac{A_3}{A_1} \\ 0 = \delta_{21} m_1 + \left(\delta_{22} m_2 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) \dfrac{A_2}{A_1} + \delta_{23} m_3 \dfrac{A_3}{A_1} \\ 0 = \delta_{31} m_1 + \delta_{32} m_2 \dfrac{A_2}{A_1} + \left(\delta_{33} m_3 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) \dfrac{A_3}{A_1} \end{cases}$$

Wyznaczanie amplitud drgań własnych

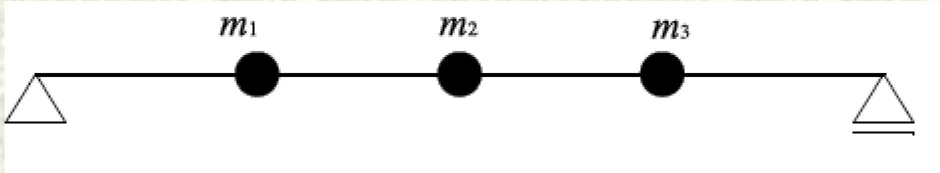
Układ równań, opisujący amplitudy drgań własnych

$$
\begin{cases}
0 = \left(\delta_{11} m_1 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) + \delta_{12} m_2 \dfrac{A_2}{A_1} + \delta_{13} m_3 \dfrac{A_3}{A_1} \\
0 = \delta_{21} m_1 + \left(\delta_{22} m_2 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) \dfrac{A_2}{A_1} + \delta_{23} m_3 \dfrac{A_3}{A_1} \\
0 = \delta_{31} m_1 + \delta_{32} m_2 \dfrac{A_2}{A_1} + \left(\delta_{33} m_3 - \dfrac{1}{\omega^2}\right) \dfrac{A_3}{A_1}
\end{cases}
$$

Z powyższego układu równań wybieramy dwa równania i wyznaczamy:

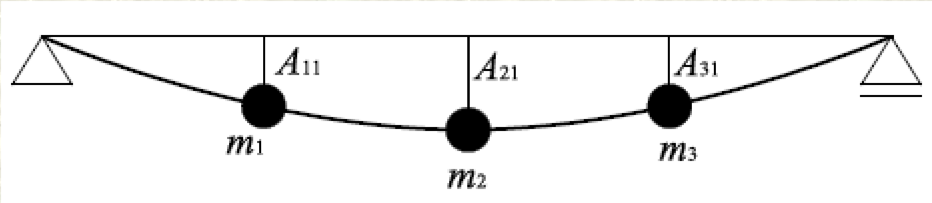
$$
\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_3}{A_1}
$$

Formy drgań własnych



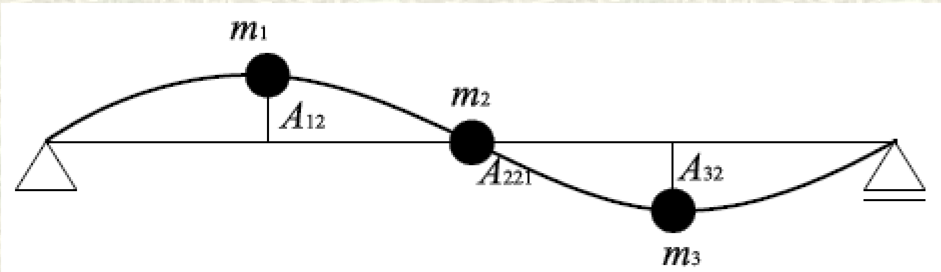
Na podstawie amplitud rysujemy formy drgań własnych:

ω_1



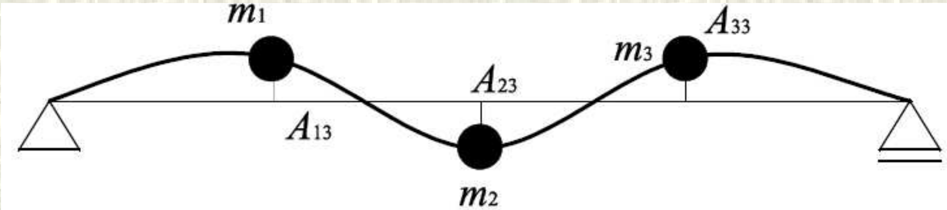
$$A_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}}, A_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, A_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

ω_2



$$A_{12} = \frac{a_{12}}{a_{12}}, A_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}}, A_{32} = \frac{a_{32}}{a_{12}}$$

ω_3



$$A_{13} = \frac{a_{13}}{a_{13}}, A_{23} = \frac{a_{23}}{a_{13}}, A_{33} = \frac{a_{33}}{a_{13}}$$

Ortogonalność drgań własnych

Amplitudy drgań własnych spełniają warunek ortogonalności czyli:

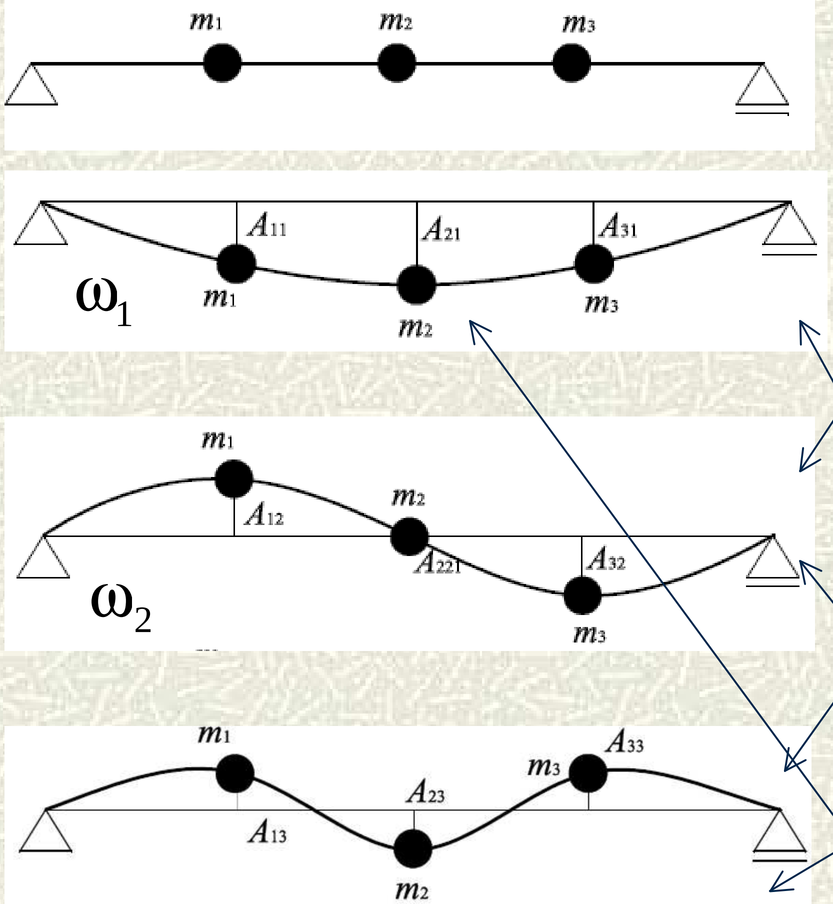
$$\sum_{i=1}^{n} m_i A_{ij} A_{ik} = 0$$

gdzie m_i – masy skupione, A_{ij} – amplituda drgań masy m_i przy częstości ω_j, A_{ik} – amplituda drgań masy m_i przy częstości ω_k.

A_{ij} – pierwszy indeks oznacza kierunek drgania, a drugi częstość drgań własnych, dla której amplituda (stosunek do amplitudy A_{1j}) została wyznaczona.

Ortogonalność sprawdzamy dla dwóch form drgań własnych

Ortogonalność drgań własnych



Amplitudy drgań własnych powinny spełniać warunki ortogonalności czyli:

dla ω_1 i ω_2

$$m_1 A_{11} A_{12} + m_2 A_{21} A_{22} + m_3 A_{31} A_{32} = 0$$

dla ω_2 i ω_3

$$m_1 A_{12} A_{13} + m_2 A_{22} A_{23} + m_3 A_{32} A_{33} = 0$$

dla ω_1 i ω_3

$$m_1 A_{11} A_{13} + m_2 A_{21} A_{23} + m_3 A_{31} A_{33} = 0$$

Metody szacowania pierwszej częstości drgań własnych

Metoda Dunkerley'a (lub Geigera):

$$\omega_D = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{ii}}} \quad \text{lub} \quad \omega_D = \sqrt{\frac{1}{m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22} + m_3\delta_{33}}}$$

Metoda Rayleigh'a

$$\omega_R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i^2}} \quad \text{lub} \quad \omega_R = \sqrt{\frac{m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3}{m_1\delta_1^2 + m_2\delta_2^2 + m_3\delta_3^2}}$$

gdzie:

$$\delta_1 = m_1\delta_{11} + m_2\delta_{12} + m_3\delta_{13}$$

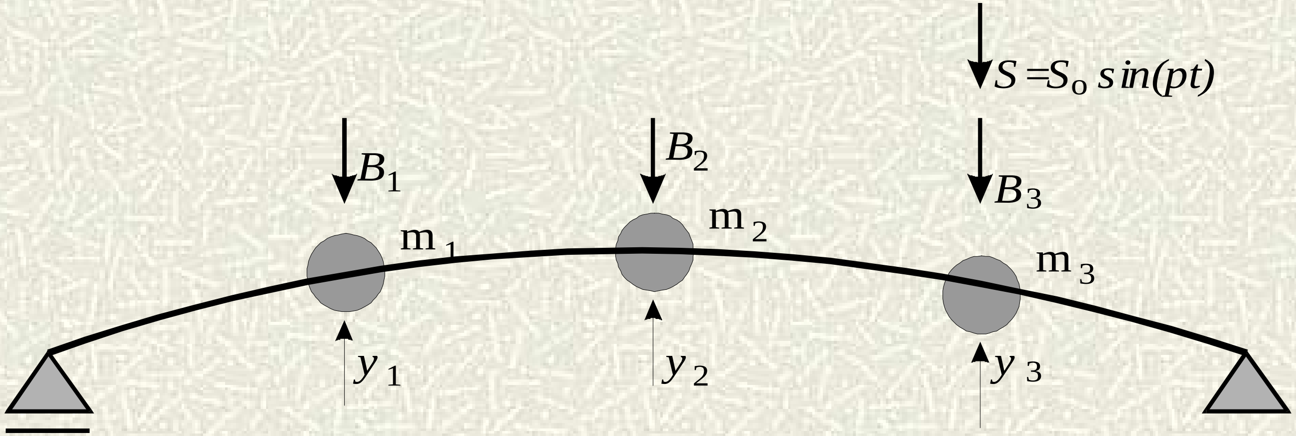
$$\delta_2 = m_1\delta_{21} + m_2\delta_{22} + m_3\delta_{23}$$

$$\delta_3 = m_1\delta_{31} + m_2\delta_{32} + m_3\delta_{33}$$

Zależność pomiędzy obliczonymi wartościami

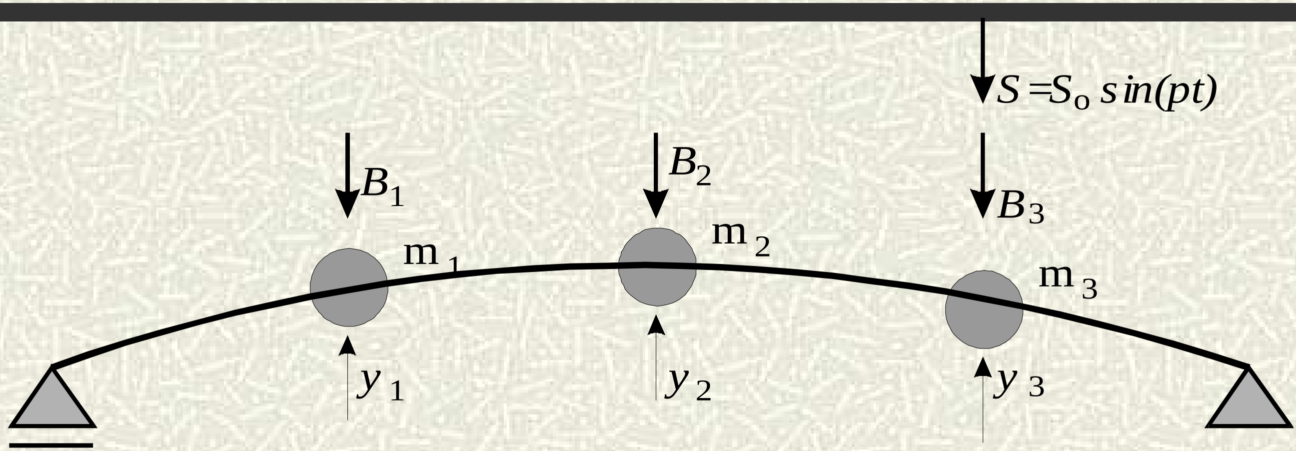
$$\omega_D < \omega_1 < \omega_R$$

Zasada d'Alamberta



Zasada d'Alemberta: w odniesieniu do konstrukcji, znajdującej się pod wpływem sił zmiennych w czasie, można stosować zasady statyki pod warunkiem, że uwzględni się siły bezwładności. Dotyczy to zarówno obliczania przemieszczeń jak i sił wewnętrznych. Do wyznaczenia ekstremalnych sił wewnętrznych potrzebne są amplitudy sił bezwładności.

Drgania wymuszone układu o wielu stopniach swobody



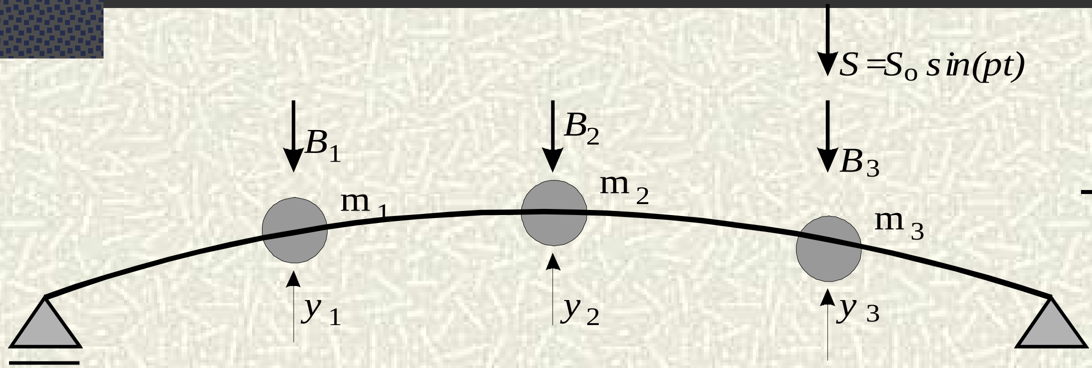
Przemieszczenia poszczególnych mas równają się sumie przemieszczeń od poszczególnych sił bezwładności i siły wymuszającej :

$$-y_i = \delta_{ik} S + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} B_j$$

gdzie: k – kierunek przyłożenia siły wymuszającej

$$B_j = m_j \ddot{y}_j$$

Drgania wymuszone układu o wielu stopniach swobody



$$-y_i = \delta_{ik} S + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} B_j$$

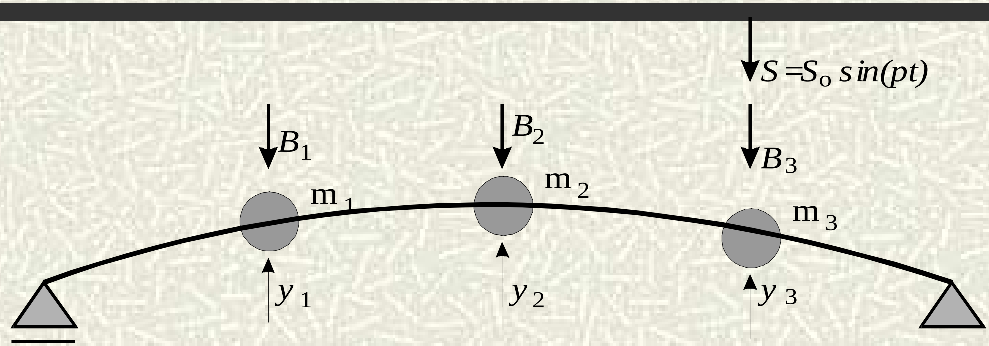
Dla belki powyżej

$$\begin{cases} -y_1 = \delta_{1k} S + \delta_{11} B_1 + \delta_{12} B_2 + \delta_{13} B_3 \\ -y_2 = \delta_{2k} S + \delta_{21} B_1 + \delta_{22} B_2 + \delta_{23} B_3 \\ -y_3 = \delta_{3k} S + \delta_{31} B_1 + \delta_{32} B_2 + \delta_{33} B_3 \end{cases}$$

Rozwiązanie ma formę $y_i = A_i \sin(pt)$

czyli $\ddot{y}_i = -A_i p^2 \sin(pt)$ $\quad B_i = -m_i A_i p^2 \sin(pt)$

Drgania wymuszone układu o wielu stopniach swobody



$$-y_i = \delta_{ik} S + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} B_j$$

Układ równań, opisujący amplitudy drgań wymuszonych, ma formę:

$$\begin{cases} \left(\delta_{11} m_1 p^2 - 1\right) A_1 + \delta_{12} m_2 p^2 A_2 + \delta_{13} m_3 p^2 A_3 + \delta_{1k} S_o = 0 \\ \delta_{21} m_1 p^2 A_1 + \left(\delta_{22} m_2 p^2 - 1\right) A_2 + \delta_{23} m_3 p^2 A_3 + \delta_{2k} S_o = 0 \\ \delta_{31} m_1 p^2 A_1 + \delta_{32} m_2 p^2 A_2 + \left(\delta_{33} m_3 p^2 - 1\right) A_3 + \delta_{3k} S_o = 0 \end{cases}$$

gdzie niewiadomymi są amplitudy drgań wymuszonych A_i, znane są m_i – masy na i –tym stopniu swobody, δ_{ij} – przemieszczenia na kierunku i wywołane siłą jednostkowych, działającą na kierunku j, p – częstotliwość wymuszenia [rad/s]

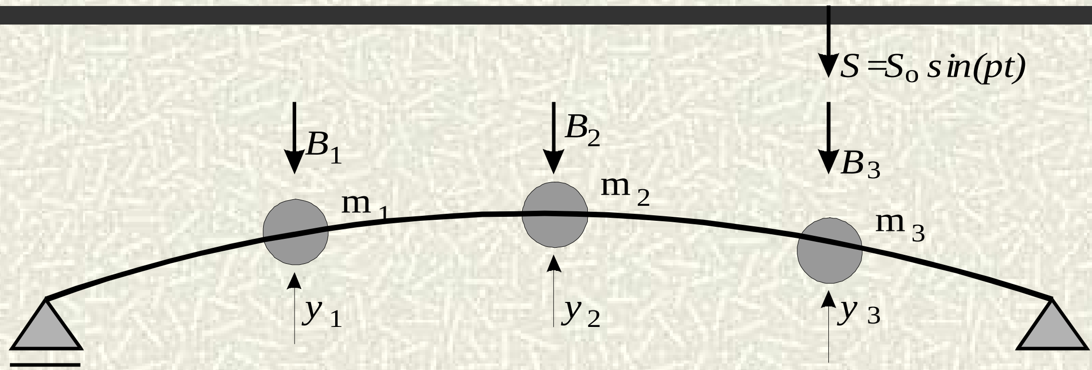
Drgania wymuszone układu o wielu stopniach swobody

Układ równań, opisujący amplitudy sił bezwładności:

$$\begin{cases} \left(\delta_{11} - \dfrac{1}{m_1 p^2}\right) B_1 + \delta_{12} B_2 + \delta_{13} B_3 + \delta_{1k} S_o = 0 \\ \delta_{21} B_1 + \left(\delta_{22} - \dfrac{1}{m_2 p^2}\right) B_2 + \delta_{23} B_3 + \delta_{2k} S_o = 0 \\ \delta_{31} B_1 + \delta_{32} B_2 + \left(\delta_{33} - \dfrac{1}{m_3 p^2}\right) B_3 + \delta_{3k} S_o = 0 \end{cases}$$

gdzie <u>niewiadomymi</u> są amplitudy sił bezwładności B_i, znane są m_i – masy na i –tym stopniu swobody, δ_{ij} – przemieszczenia na kierunku i wywołane siłą jednostkowych, działającą na kierunku j, p – częstotliwość wymuszenia [rad/s]

Ekstremalne siły wewnętrzne, wywołane drganiami wymuszonymi



Do wyznaczenia sił wewnętrznych wykorzystujemy wykresy od sił jednostkowych i korzystamy z zasady superpozycji czyli:

$$N = S_o N_k \pm B_1 N_1 \pm B_2 N_2 \pm B_2 N_2 = S_o N_k \pm \sum_j B_j N_j$$

$$T = S_o T_k \pm B_1 T_1 \pm B_2 T_2 \pm B_2 T_2 = S_o N_k \pm \sum_j B_j T_j$$

$$M = S_o M_k \pm B_1 M_1 \pm B_2 M_2 \pm B_2 M_2 = S_o M_k \pm \sum_j B_j M_j$$

gdzie: B_j - amplitudy sił bezwładności, S_o - amplituda siły wymuszającej, N_j , T_j , M_j - siły wewnętrzne od obciążeń jednostkowych.

Koniec