Mechanika teoretyczna

Wykład nr 1

Wprowadzenie i podstawowe pojęcia

Rachunek wektorowy

Wypadkowa układu sił

Przedmiot

- Mechanika:
  - ogólna, techniczna, **teoretyczna**.
- Dział fizyki zajmujący się badaniem **ruchu** i **równowagi** ciał materialnych, ustalaniem ogólnych praw ruchu oraz ich stosowaniem do wyidealizowanych ciał rzeczywistych (punkt materialny oraz ciało doskonale sztywne, konstrukcje prętowe: **belki, ramy, kratownice, łuki**).

Program zajęć (1)

- Podstawowe pojęcia.
- Rachunek wektorowy.
- Układy sił.
- Stan równowagi statycznej.
- Reakcje więzów w płaskich układach prętowych.
- Siły wewnętrzne w kratownicach.

Program zajęć (2)

- Siły wewnętrzne:
  - w belkach;
  - w ramach.
- Reakcje więzów w układach przestrzennych.
- Zjawisko tarcia i prawa tarcia.
- Elementy kinematyki.
- Podstawy dynamiki.

Literatura

- J. Leyko: Mechanika ogólna
- J. Leyko: Zbiór zadań z mechaniki ogólnej
- J. Misiak: Mechanika ogólna, T. 1-3 (Statyka, Kinematyka, Dynamika)
- J. Misiak: Zadania z mechaniki ogólnej
- A. Chudzikiewicz: Statyka budowli (Tom 1)
- Z. Cywiński: Mechanika budowli w zadaniach Układy statycznie wyznaczalne
- W. Szcześniak, Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej. Statyka

Zaliczenie

- Ćwiczenia audytoryjne i ćwiczenia projektowe:
  - obecności;
  - ćwiczenia projektowe;
  - obrony projektów;
  - kolokwia.
- Egzamin pisemny.

Działy mechaniki

- **Statyka** – bada przypadki, kiedy siły działające na ciało nie wywołują sił bezwładności, tj. są przykładane w nieskończenie długim czasie oraz równoważą się wzajemnie.
- **Kinematyka** – zajmuje się badaniem ruchu ciał niezależnie od czynników wywołujących ten ruch. Przedmiotem badań są: droga, prędkość, przyspieszenie itd.
- **Dynamika** – rozpatruje ruch ciał w zależności od sił działających na nie, bada zależności między takimi wielkościami jak: prędkość, przyspieszenie, pęd, siła, energia itd.

Zasady dynamiki Newtona (1)

- **Prawo I**

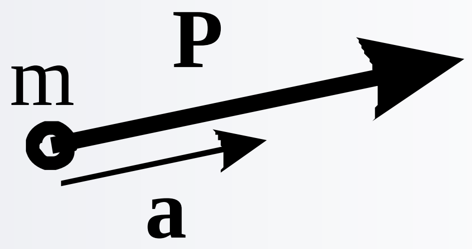
Punkt materialny, na który nie działa żadna siła lub działające siły równoważą się, pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

Zasady dynamiki Newtona (2)

- **Prawo II**

Przyspieszenie punktu materialnego jest wprost proporcjonalne do siły działającej na ten punkt, a odwrotnie proporcjonalne do masy punktu materialnego. Jego zwrot i kierunek zgodny jest ze zwrotem i kierunkiem wektora siły.

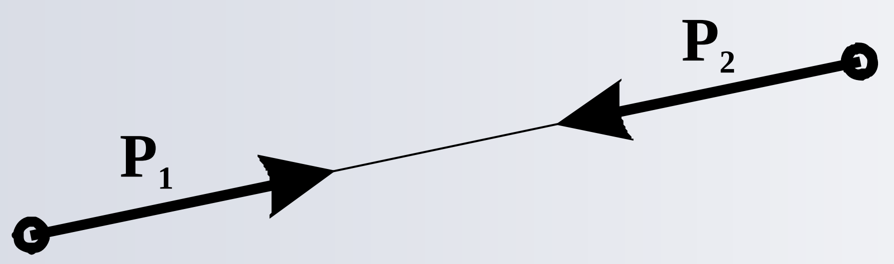
$$\mathbf{P} = m \cdot \mathbf{a}$$



Zasady dynamiki Newtona (3)

- **Prawo III**

Dwa punkty materialne działają na siebie dwoma siłami równymi co do wartości, tym samym kierunku, ale o przeciwnym zwrocie.



$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2$$

$$P_1 = P_2$$

Idealizacje (1)

- **Punkt materialny** – ciało o nieskończenie małych wymiarach, ale posiadające masę.
- Modeluje ciała o bardzo małych wymiarach w porównaniu z wymiarami otoczenia.
- Wymiary na tyle małe, aby można było pominąć obrót ciała względem układu odniesienia.

Idealizacje (2)

- **Ciało doskonale sztywne** – odległości między jego punktami nie zmieniają się (nie podlega odkształceniom pod wpływem działających sił).
- Model ciała rzeczywistego, gdy odkształcenia są pomijalnie małe w stosunku do wymiarów.

Idealizacje (3)

- **Zasada zesztywnienia**
- Warunki równowagi sił działających na ciało odkształcalne nie zostaną naruszone przez zesztywnienie tego ciała.
- Punkt przyłożenia siły nie ulega przesunięciu mimo odkształcenia konstrukcji.

Zasada superpozycji

- Działania poszczególnych obciążeń są od siebie niezależne.
- Efekt działania (odkształcenie, siła wewnętrzna, przyspieszenie) dwóch lub więcej wpływów (obciążeń) może zostać wyznaczony jako suma efektów wywołanych działaniem tych wpływów oddzielnie.

Skalar i wektor

- **Skalar** – do opisania niezbędne jest podanie jednej wartości w odniesieniu do określonego punktu w przestrzeni.
- **Wektor** – do opisania poza miarą (modułem, długością wektora), niezbędne jest podanie:
  - kierunku i punktu zaczepienia (linii działania),
  - zwrotu (uporządkowania punktów od początku do końca wektora).

Interpretacja geometryczna, przykłady

- Wektor można przedstawić jako uporządkowaną parę punktów, z których jeden jest początkiem wektora, a drugi jego końcem.
- Skalary:
  - gęstość, masa, temperatura, energia;
- Wektory
  - przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie, siła.

Rodzaje wektorów

- Wektory **zaczepione** – związane z punktem przyłożenia;
- Wektory **ślizgające** się – mogące poruszać się wzdłuż linii działania (np. wektory sił w mechanice);
- Wektory **swobodne** – mogą zostać przyłożone w dowolnym punkcie (np. wektory momentów sił).

Podstawowe jednostki

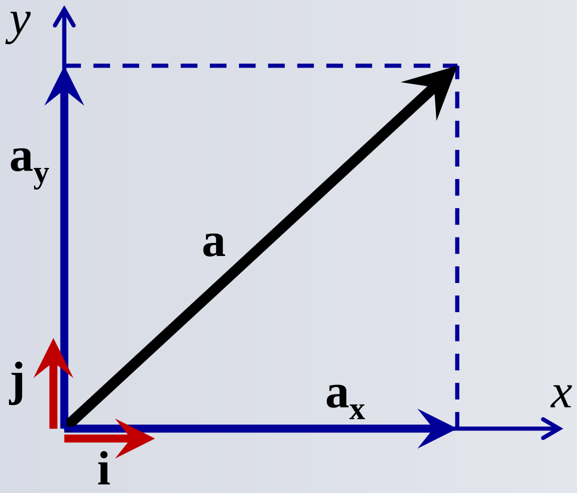
- **Masa**: g (gram); **kg** = 1000 g (kilogram)
- **Długość**: mm = 0,001 m (milimetr);
  m (metr); km = 1000 m (kilometr)
- **Czas**: **s** (sekunda); min = 60 s (minuta);
  h = 60 min = 3600 s (godzina)
- **Siła**: N = kg·m/s^2 (niuton);
  kN = 1000 N (kiloniuton)
- **Moment siły**: Nm (Niutonometr);
  kNm = 1000 Nm (kiloniutonometr)

Działania na wektorach

- Suma wektorów;
- Różnica wektorów;
- Mnożenie wektora przez skalar;
- Iloczyn wektorów:
  - skalarny;
  - wektorowy;
  - mieszany;
  - inne wielokrotne iloczyny wektorów.

Zapis analityczny i graficzny wektora

- płaszczyzna

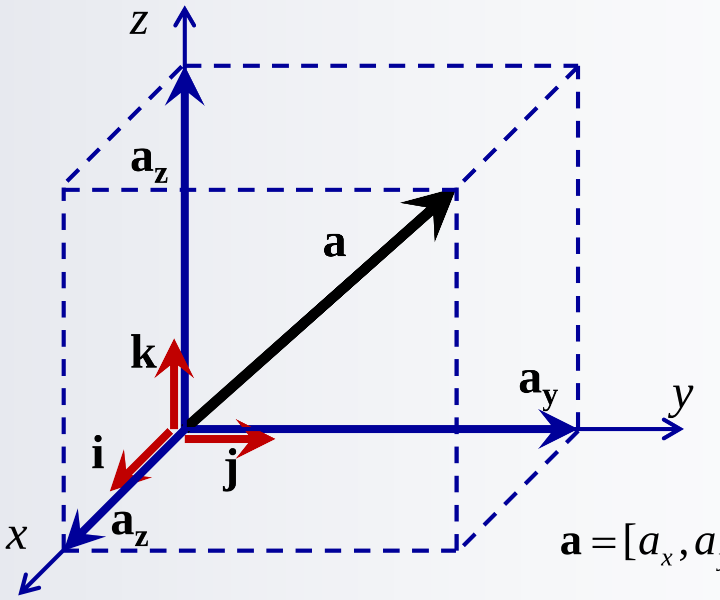


$$\mathbf{a} = [a_x, a_y]$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$$

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}}$$

- przestrzeń



$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$

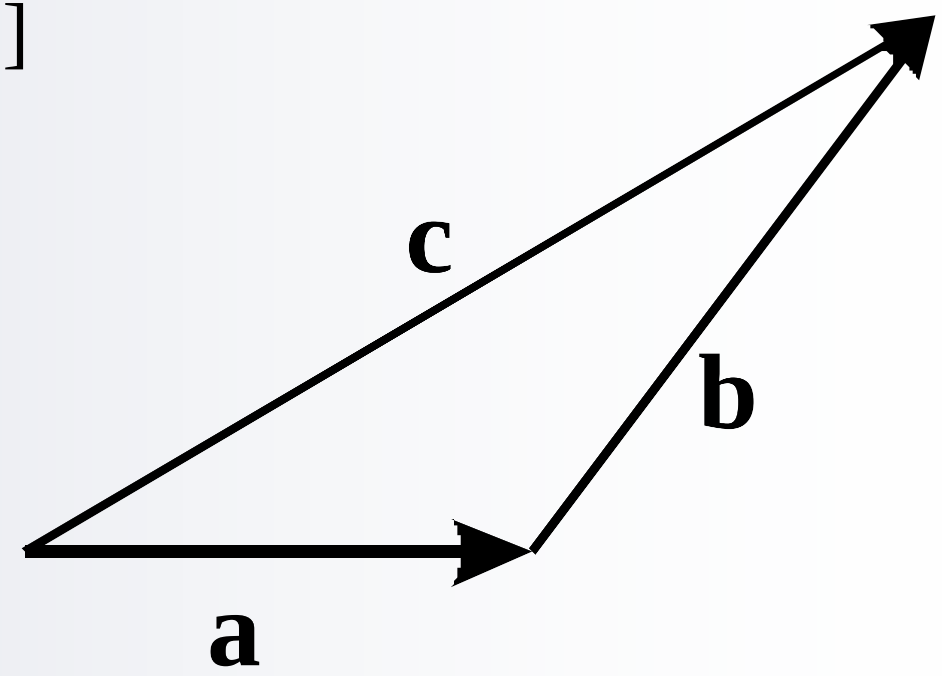
Dodawanie wektorów

- Suma wektorowa wektorów a i b:

$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z] \quad \mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$$

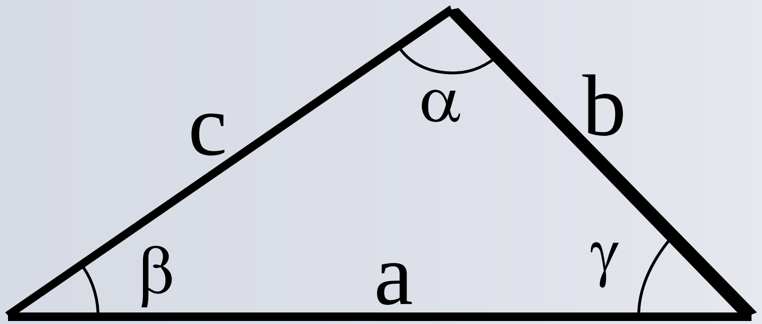
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{c} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$



Twierdzenie cosinusów

- Kwadrat długości boku trójkąta leżącego naprzeciw kąta γ jest równy sumie kwadratów długości boków leżących przy tym kącie oraz podwojonego iloczynu tych długości boków i cosinusa tego kąta γ.

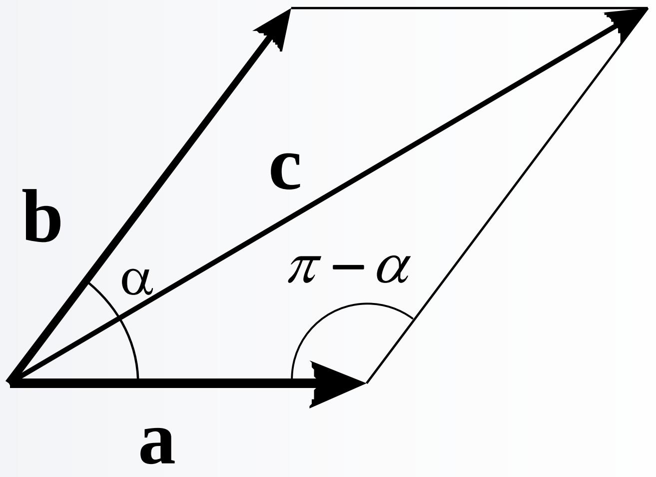


$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

Zasada równoległoboku

- Suma dwóch wektorów może zostać przedstawiona jako przekątna równoległoboku zbudowanego na bazie sumowanych wektorów przecinająca kąt między tymi wektorami.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha)} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$



Odejmowanie wektorów (1)

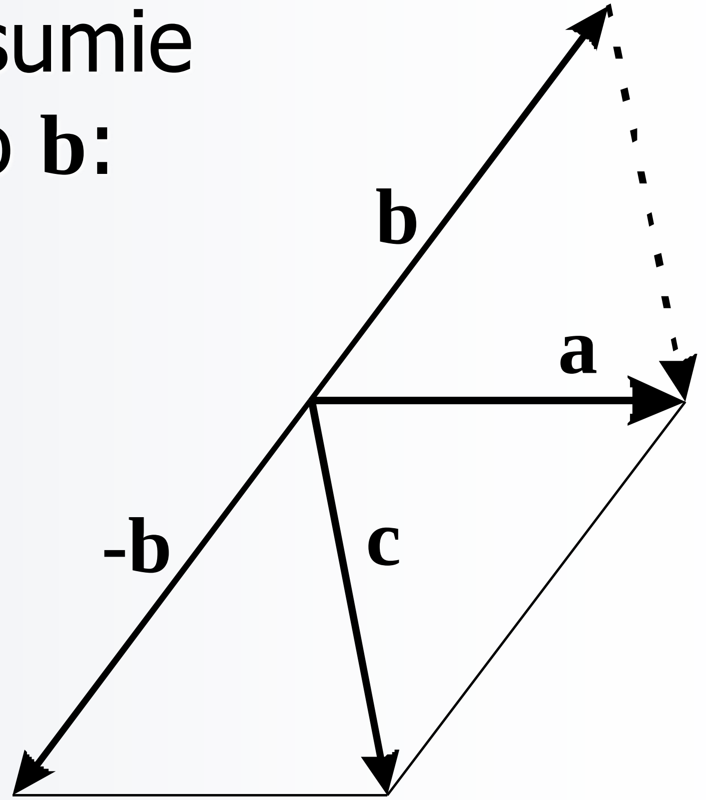
- Różnica wektorów **a** i **b** jest równa sumie wektora **a** i wektora przeciwnego do **b**:

$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

$$\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z] \qquad -\mathbf{b} = [-b_x, -b_y, -b_z]$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = [a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z]$$



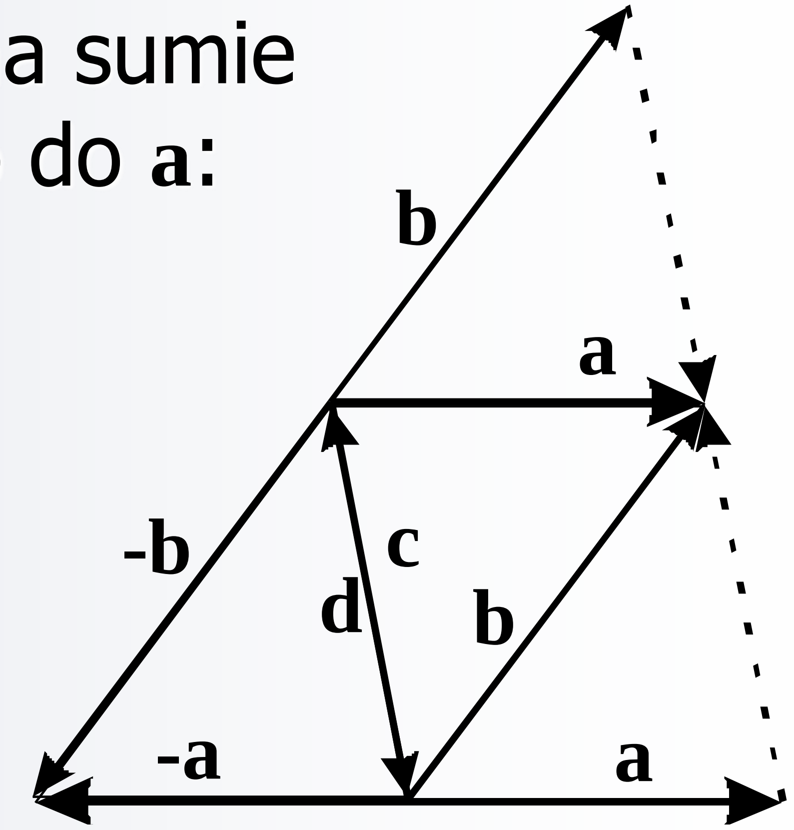
Odejmowanie wektorów (2)

- Różnica wektorów **b** i **a** jest równa sumie wektora **b** i wektora przeciwnego do **a**:

$$-a = [-a_x, -a_y, -a_z]$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

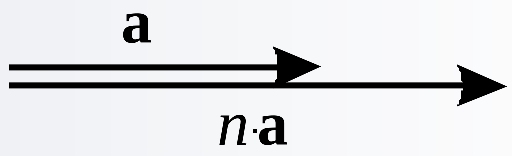
$$\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = [b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z]$$



Skalowanie wektora

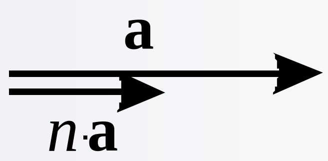
- Mnożenie wektora przez skalar (n) – wyniku otrzymuje się wektor o takim samym kierunku, mierze n razy większej (przy $|n|>1$)

$n>1$



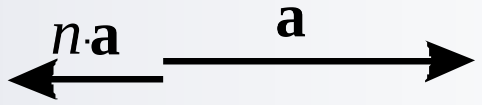
- lub $1/n$ razy mniejszej (przy $|n|<1$) i takim samym zwrocie, jeżeli $n>0$,

$0<n<1$

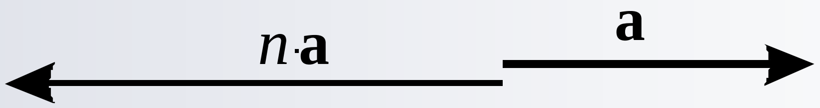


- zaś przeciwnym, jeżeli $n<0$.

$-1<n<0$



$n<-1$



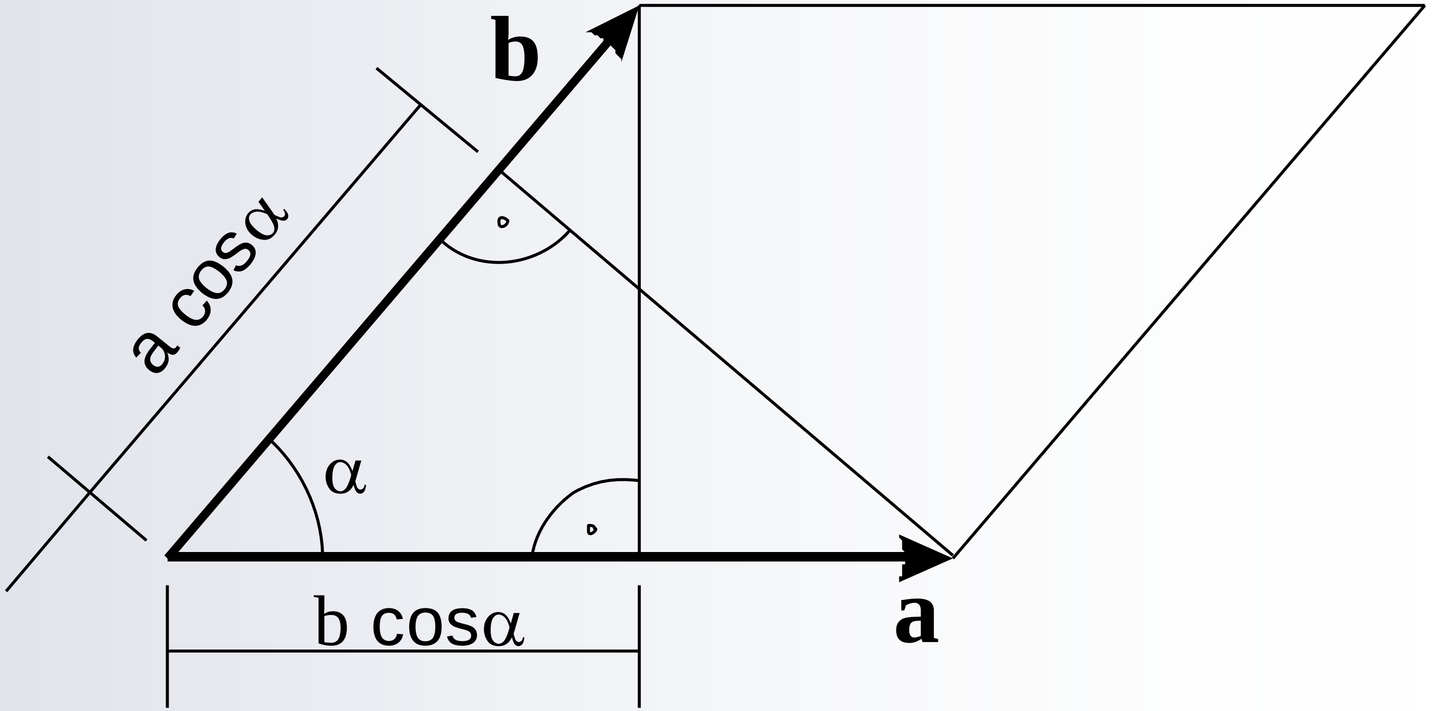
Iloczyn skalarny (1)

- **Iloczyn skalarny** – wielkość skalarna równa iloczynowi modułów mnożonych wektorów i cosinusa kąta zawartego między nimi (iloczyn miary jednego wektora przez rzut prostokątny drugiego na kierunek pierwszego).

Iloczyn skalarny (2)

$$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

$$\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$$



$$s = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \sphericalangle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Iloczyn wektorowy (1)

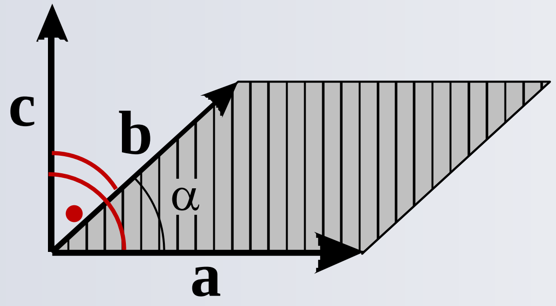
- **Iloczyn wektorowy** (wektor):
  - kierunek prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez mnożone wektory,
  - zwrot określony zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej,
  - miara równa iloczynowi miar mnożonych wektorów i sinusa kąta między nimi (pole powierzchni równoległoboku zbudowanego na mnożonych wektorach).

Iloczyn wektorowy (2)

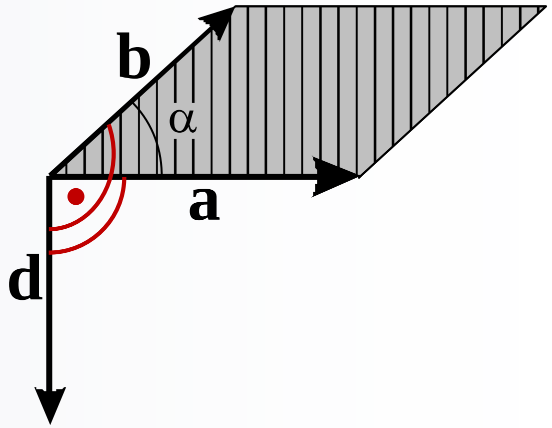
$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ $\qquad$ $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$

$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ $\qquad$ $\mathbf{d} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ $\qquad$ $\mathbf{d} = -\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



$$\mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$



$$\mathbf{c} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\mathbf{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\mathbf{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\mathbf{k}$$

$$c = d = a \cdot b \cdot \sin\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\left(a_y b_z - a_z b_y\right)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)^2}$$

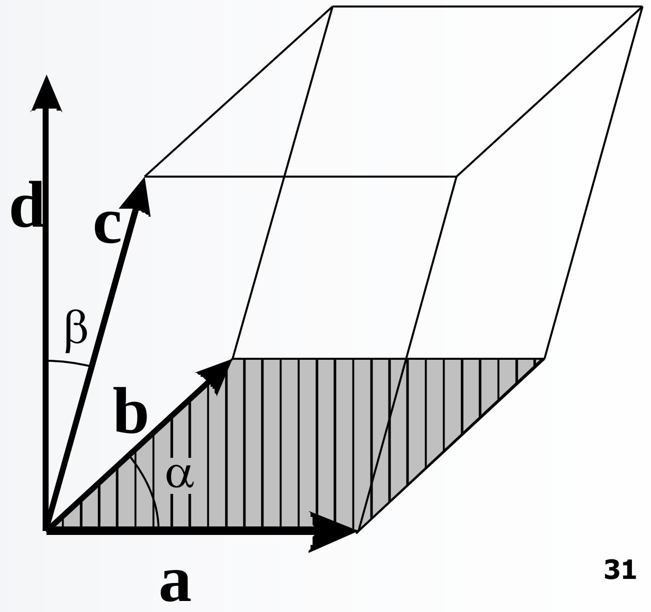
Iloczyn mieszany

- **Iloczyn mieszany** – wielkość skalarna równa objętości równoległościanu zbudowanego na mnożonych wektorach jako na krawędziach.

$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \circ \mathbf{c}$$

$$V = \mathbf{d} \circ \mathbf{c} = d \cdot c \cos\beta$$

$$d = ab \sin\alpha \qquad V = ab\sin\alpha \cdot c\cos\beta$$



Przemienność działań

- Suma wektorów i iloczyn skalarny są działaniami przemiennymi, natomiast różnica wektorów i iloczyn wektorowy nie są przemienne.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c} \qquad \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = -\mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \qquad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = -\mathbf{c}$$

Pojęcie siły

- **Siła** – wzajemne oddziaływanie ciał, które przejawia się w wyprowadzeniu ciała ze stanu spoczynku, bądź przez zmianę ruchu już poruszającego się ciała. Aby scharakteryzować siłę należy podać wektor, opisujący tą siłę, oraz punkt przyłożenia siły.

Układy sił

- **Układ sił** – dowolna grupa oddziaływań ciał zewnętrznych na analizowane ciało.
- **Równoważne układy sił**

Dwa układy sił są równoważne wtedy, gdy zastąpienie jednego układu, działającego na ciało sztywne, przez drugi układ sił **nie wywoła zmiany ruchu**, czyli nie spowoduje zmiany kierunku ruchu, prędkości, przyśpieszenia, itd.

Wypadkowa

- **Siła wypadkowa** – wektor, który jest sumą wszystkich wektorów sił z układu, przyłożonego do punktu materialnego i stanowi układ równoważny, pod warunkiem, że siła wypadkowa jest przyłożona do tego samego punktu materialnego.

Płaski i przestrzenny układ sił

- Układ sił nazywamy **płaskim**, jeżeli kierunki wszystkich sił tego układu położone są w jednej płaszczyźnie.
- W każdym innym przypadku układ nazywamy **przestrzennym**.

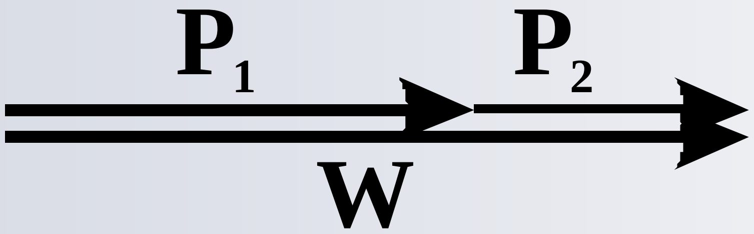
Układ sił zbieżnych

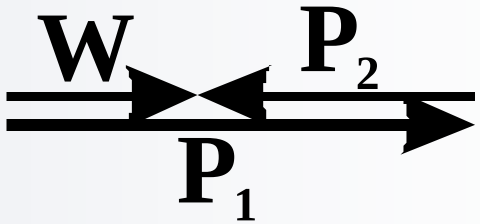
- **Układ sił zbieżnych** – linie działania wszystkich sił przecinają się w jednym punkcie, tzw. punkcie zbieżności.
- Określanie wypadkowej układu sił:
  - działających wzdłuż jednej prostej;
  - zbieżnych
    - metoda graficzna;
    - metoda analityczna.

Siły działające wzdłuż jednej prostej

- Wypadkowa układu sił działających wzdłuż jednej prostej jest wektorem o także działającym wzdłuż tej prostej, zwrocie zgodnym z większą ze składanych sił i mierze równej sumie, gdy miary wektorów składowych są zgodne, lub różnicy miar wektorów składowych, gdy zwroty składowych są przeciwne.

$$W = P_1 + P_2$$

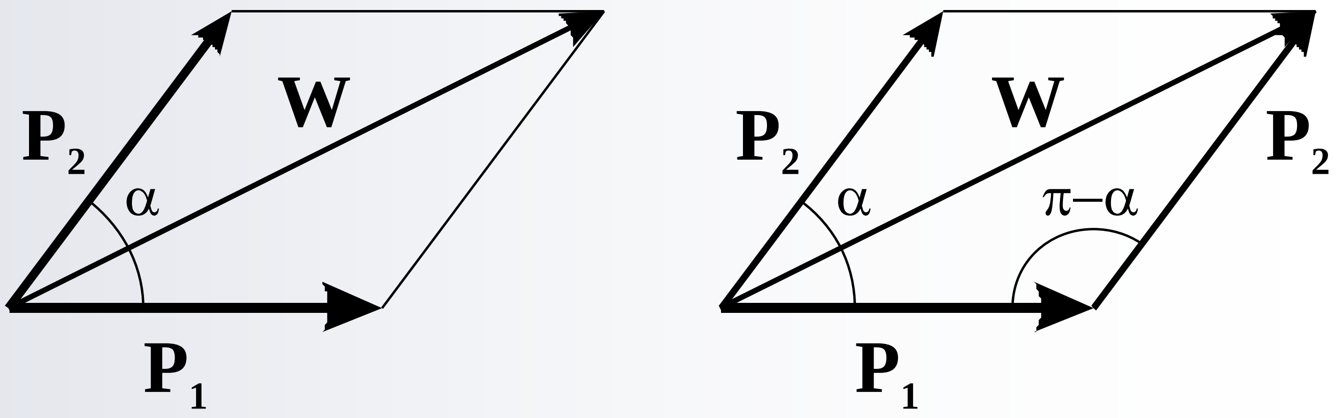




$$W = P_1 - P_2$$

Wypadkowa
- metoda graficzna

- Wypadkowa układu dwóch sił może zostać wyznaczona jako przekątna równoległoboku zbudowanego w oparciu o wektory składowe przecinająca kąt między tymi wektorami.

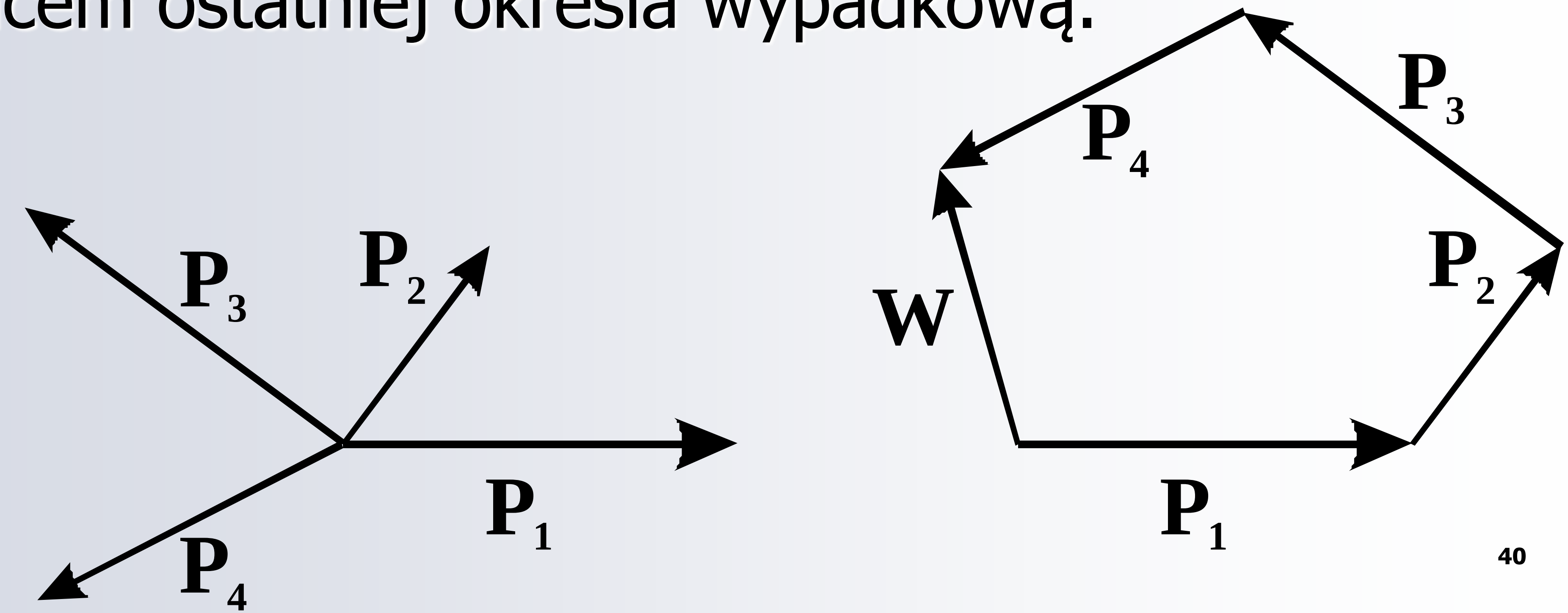


$$W = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos(\pi - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha}$$

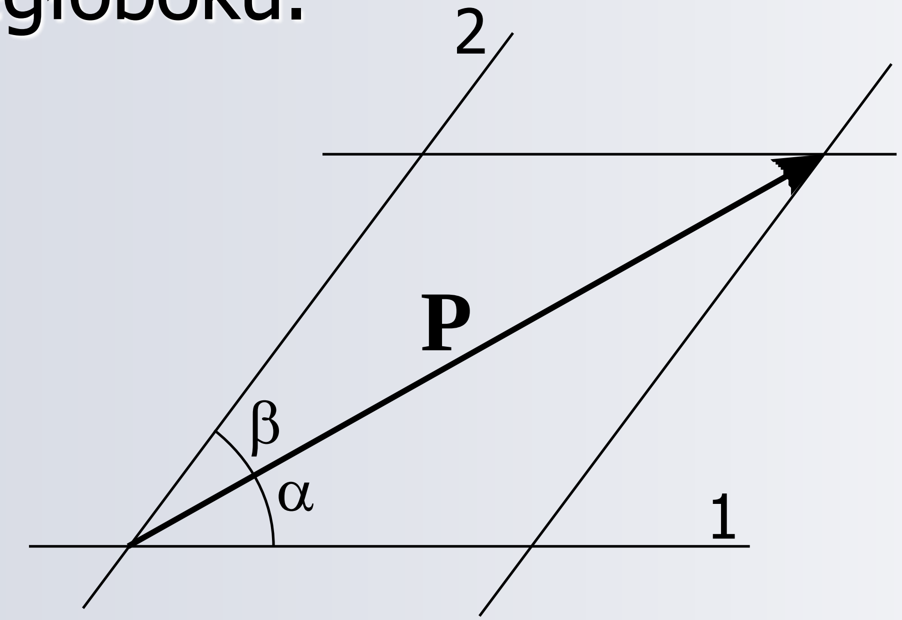
Wielobok sznurowy

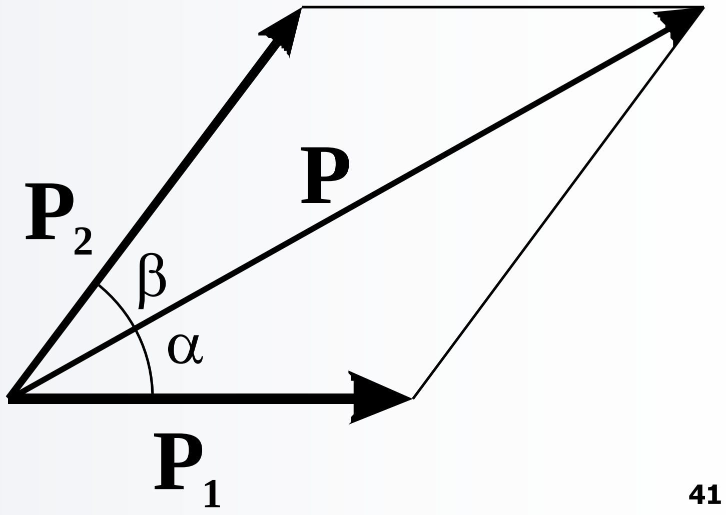
- Do końca pierwszej siły przykładany jest początek siły następnej, itd. Początek pierwszej siły połączony z końcem ostatniej określa wypadkową.



Rozkładanie siły na składowe

- Przez początek i koniec danej siły przeprowadza się kierunki, na które siła ma zostać rozłożona. Siły składowe mogą zostać wyznaczone jako boki tak zbudowanego równoległoboku.

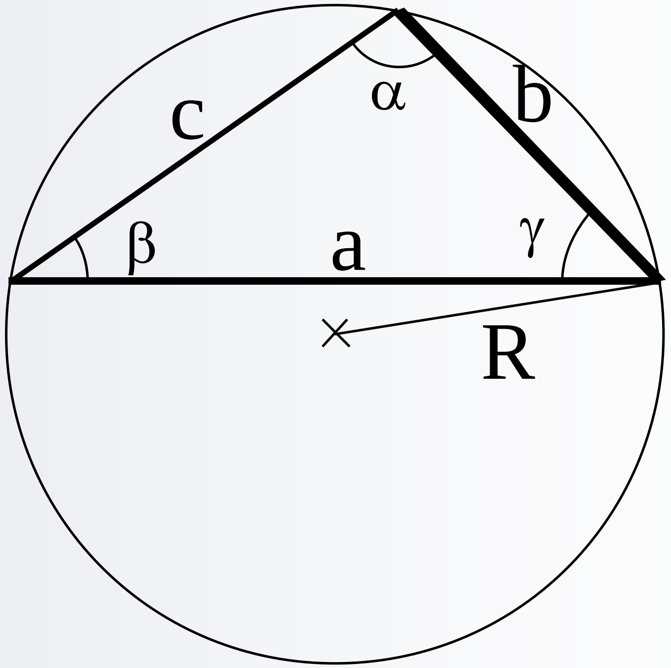




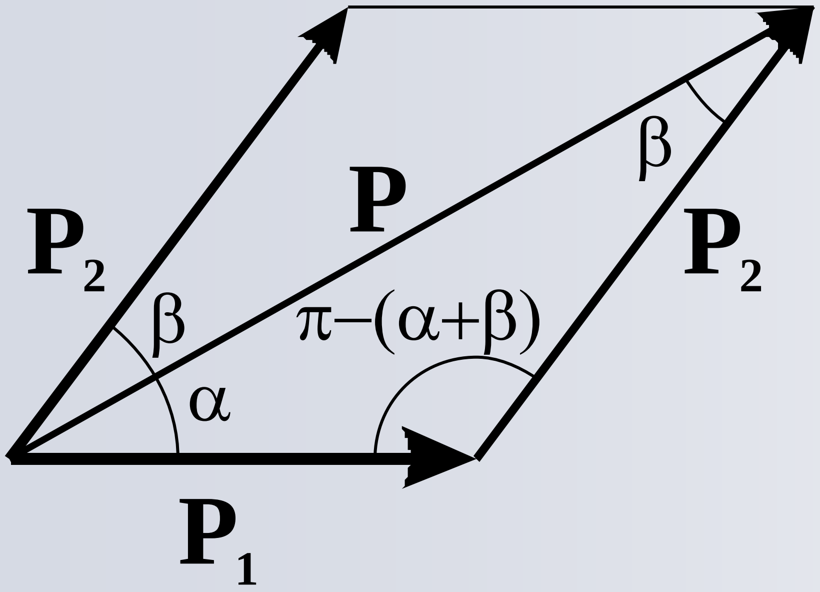
Twierdzenie sinusów

- W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa przeciwległego kąta jest stały i równa się długości średnicy okręgu opisanego na trójkącie.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$



Miary wektorów składowych (1)



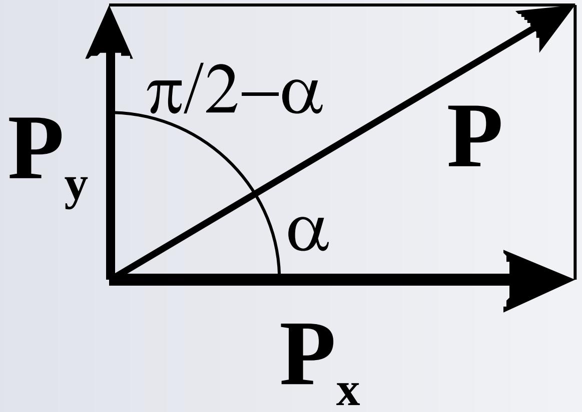
$$\frac{P_1}{\sin\beta} = \frac{P_2}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin\left(\pi - (\alpha+\beta)\right)}$$

$$P_1 = \frac{P\sin\beta}{\sin\left(\pi - (\alpha+\beta)\right)} = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$P_2 = \frac{P\sin\alpha}{\sin\left(\pi - (\alpha+\beta)\right)} = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Miary wektorów składowych (2)

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$



$$P_1 = \frac{P\sin\beta}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))} = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$P_x = \frac{P\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{2}} = P\cos\alpha$$

$$P_2 = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))} = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$P_y = \frac{P\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}} = P\sin\alpha$$

Wypadkowa
- metoda analityczna

- Składowe sił układu:

$$P_{ix} = P_i \cos \alpha_i \qquad P_{iy} = P_i \sin \alpha_i$$

- Składowe wypadkowej:

$$W_x = P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} \qquad W_y = P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny}$$

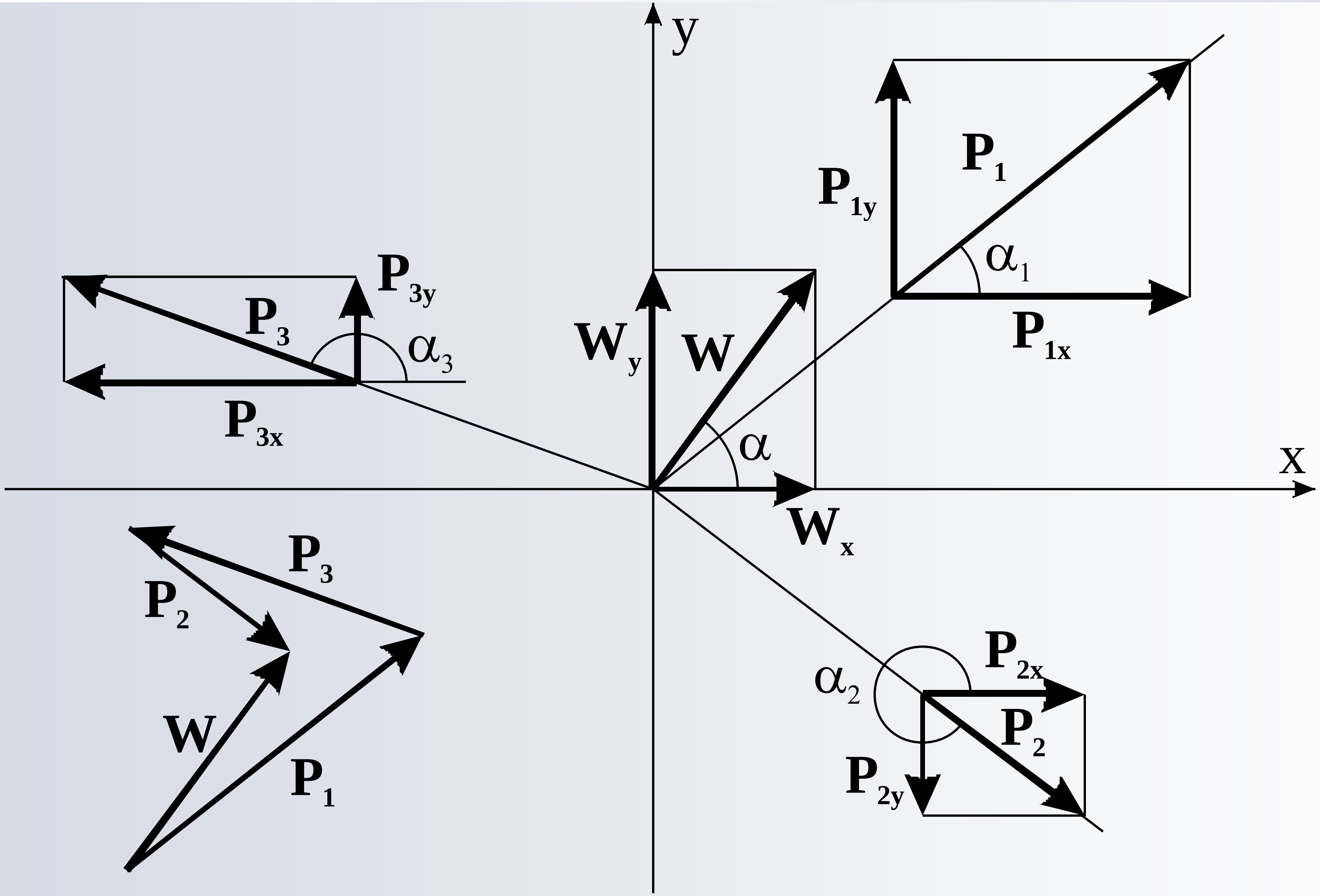
- Siła wypadkowa:

$$W = \sqrt{W_x{}^2 + W_y{}^2}$$

- Kierunek wypadkowej:

$$\cos \alpha = \frac{W_x}{W} \qquad \sin \alpha = \frac{W_y}{W}$$

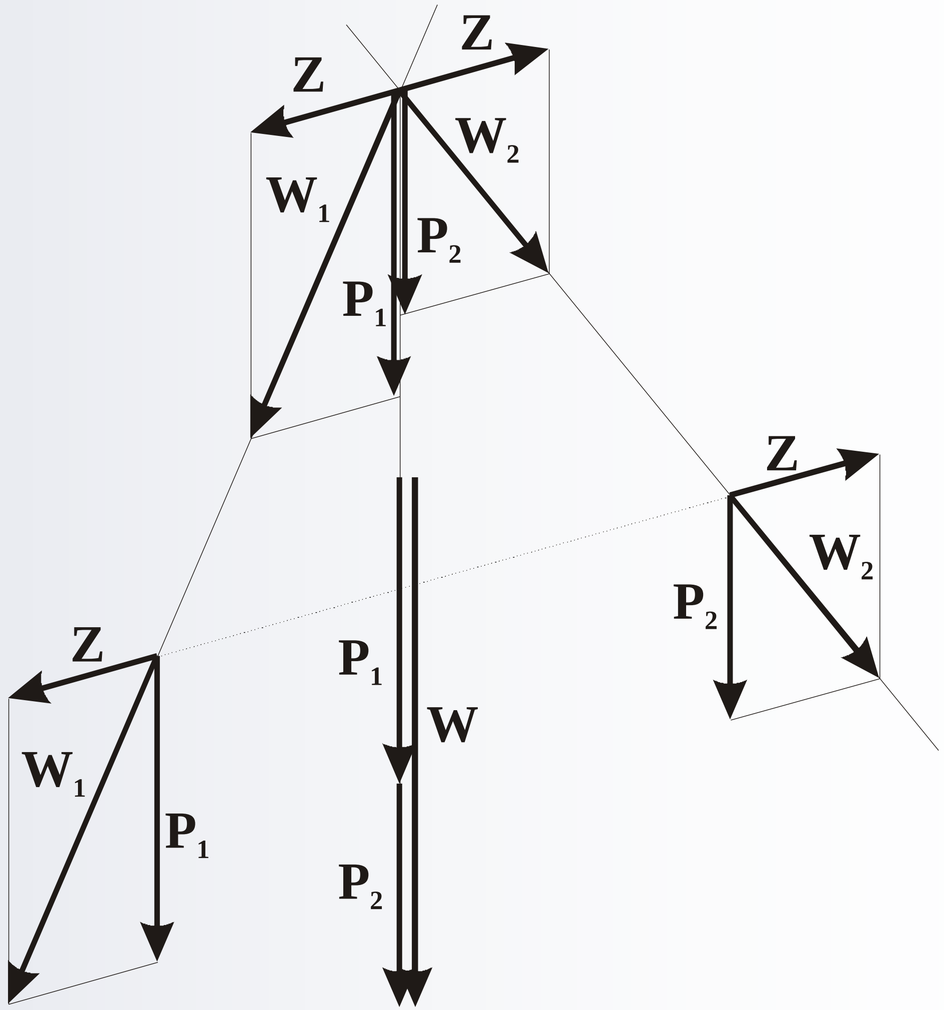
Przykład



y
x
P_1
P_{1y}
α_1
P_{1x}
P_{3y}
P_3
α_3
P_{3x}
W_y
W
α
W_x
P_3
P_2
W
P_1
P_{2x}
α_2
P_2
P_{2y}

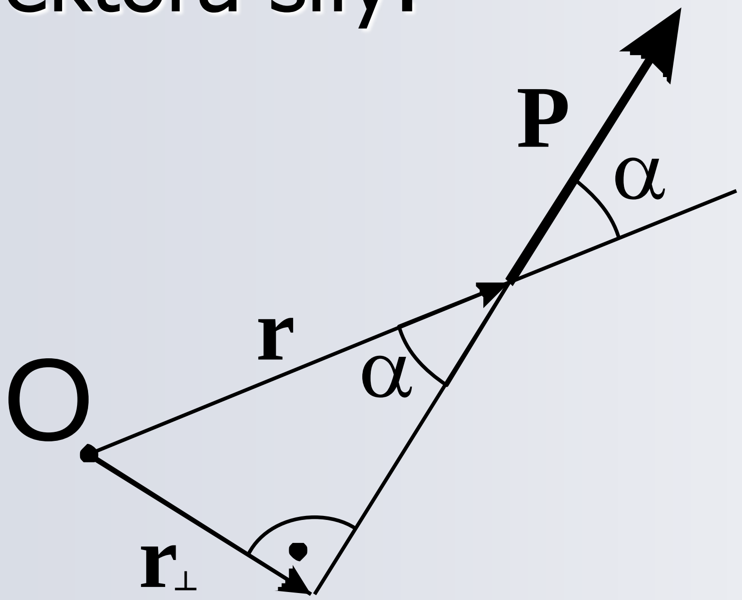
Wypadkowa układu sił równoległych

- Przyłożenie układu zerowego (układ sił równoważących się, np. dwie siły o takiej samej mierze, linii działania i przeciwnych zwrotach) nie wpływa na stan równowagi ciała.



Moment siły (1)

- **Moment siły względem punktu** – iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego omawiany punkt i punkt przyłożenia siły, oraz wektora siły:



$$\mathbf{M}_O^P = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

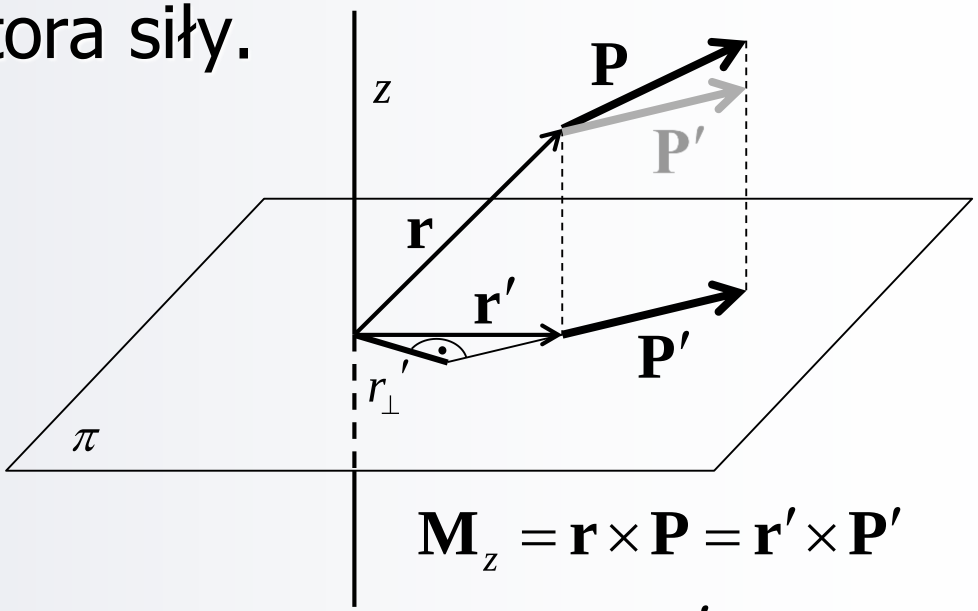
$$M_O^P = r \cdot P \sin\alpha$$

$$r_\perp = r \cdot \sin\alpha$$

$$M_O^P = r_\perp \cdot P$$

Moment siły (2)

- **Moment siły względem prostej** - Momentem względem prostej nazywamy iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego punkt prostej najbliższy kierunkowi siły i punkt przyłożenia siły, i wektora siły.
- Moment siły względem osi równy jest momentowi rzutu siły na płaszczyznę prostopadłą do osi względem punktu, w którym oś przebija płaszczyznę.

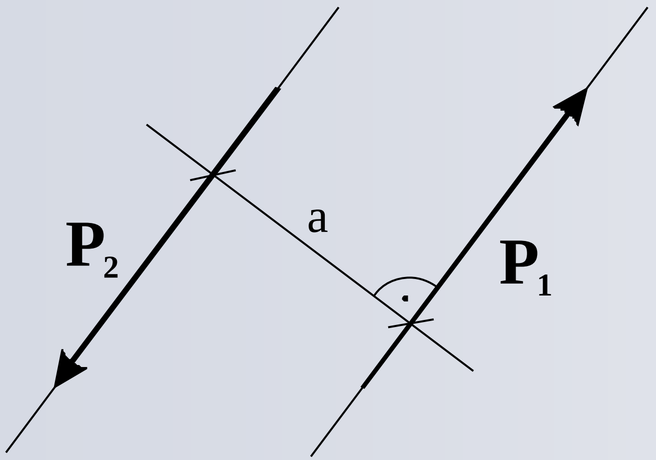


$$\mathbf{M}_z = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{r}' \times \mathbf{P}'$$

$$M_z = P' \cdot r_\perp'$$

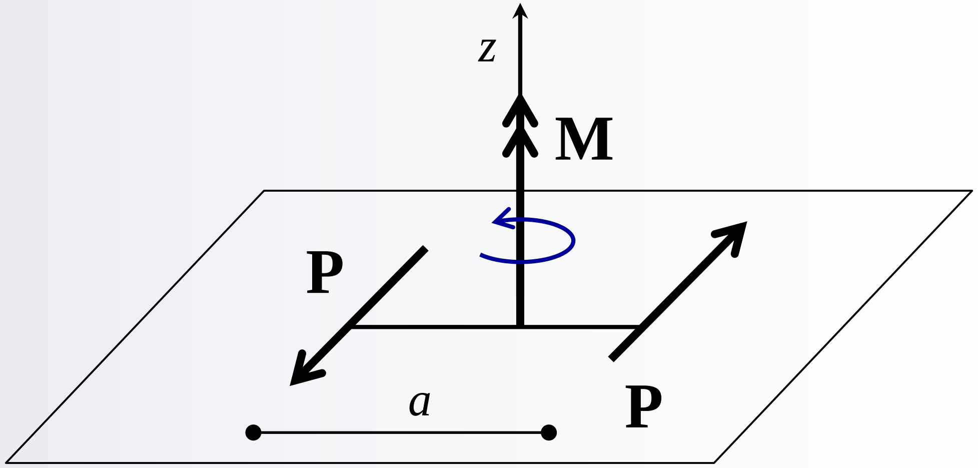
Para sił

- **Parę sił** stanowią dwie siły o równoległych liniach działania, o przeciwnych zwrotach, zaś o tych samych miarach.
- **Ramię pary sił** – odległość pomiędzy kierunkami sił.



$$P_1 = P_2 = P$$

$$M = Pa$$



Dowolny płaski układ sił (1)

- Redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w biegunie redukcji i wypadkowego momentu względem tego bieguna.
- Siły składowe mogą zostać przeniesione do bieguna redukcji, pod warunkiem przyłożenie momentu od tych sił względem bieguna redukcji.

Dowolny płaski układ sił (2)

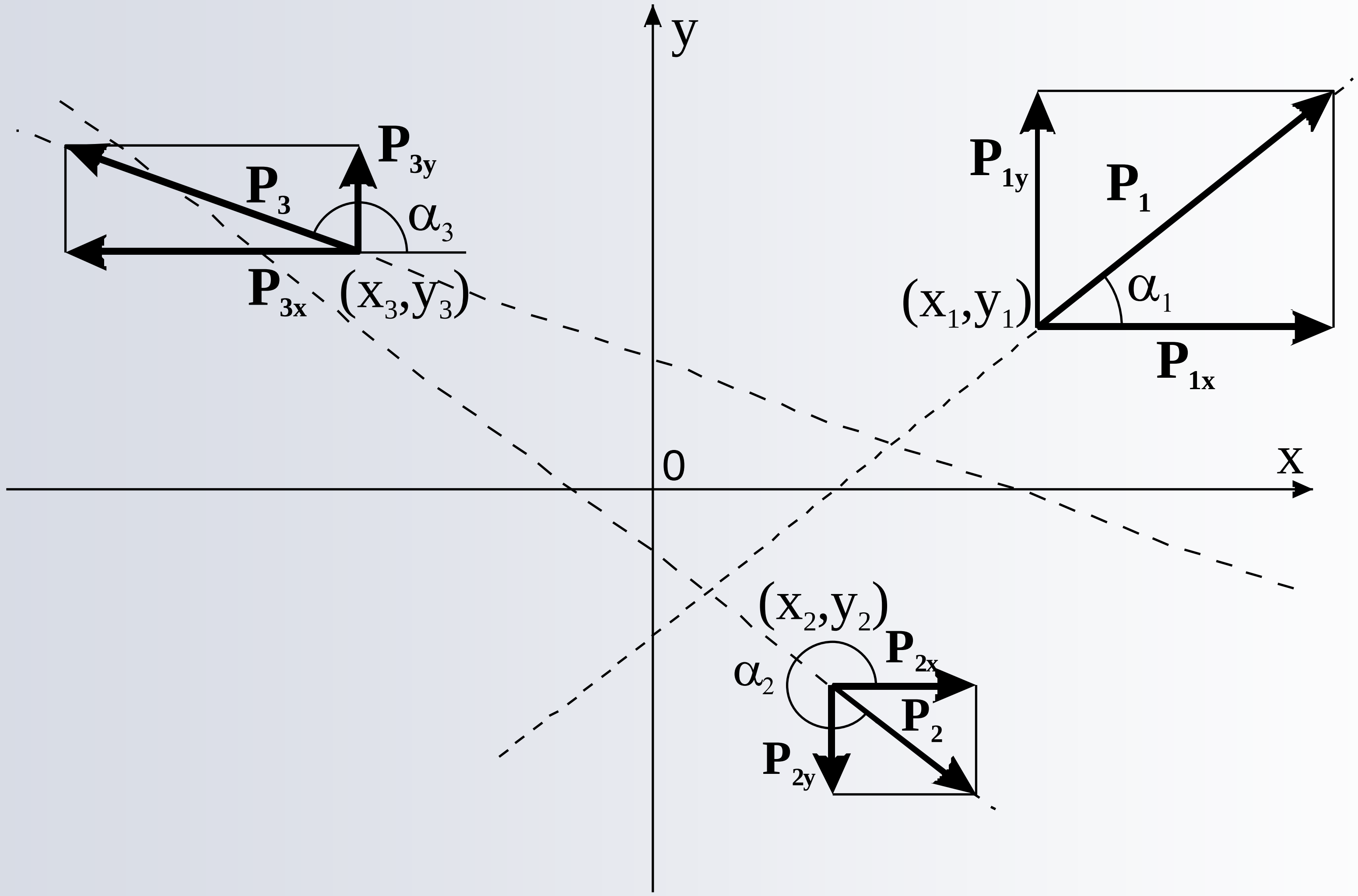
- Wypadkową siłę wyznacza się dla układu zbieżnego przyłożonego w biegunie redukcji.

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i$$

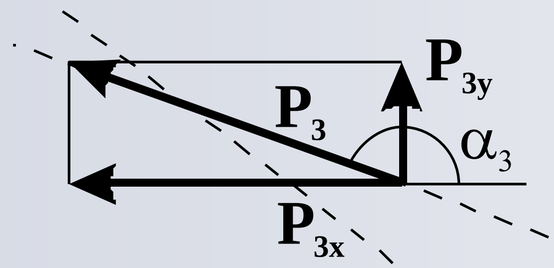
- Wypadkowy moment jest równy sumie momentów od sił składowych.

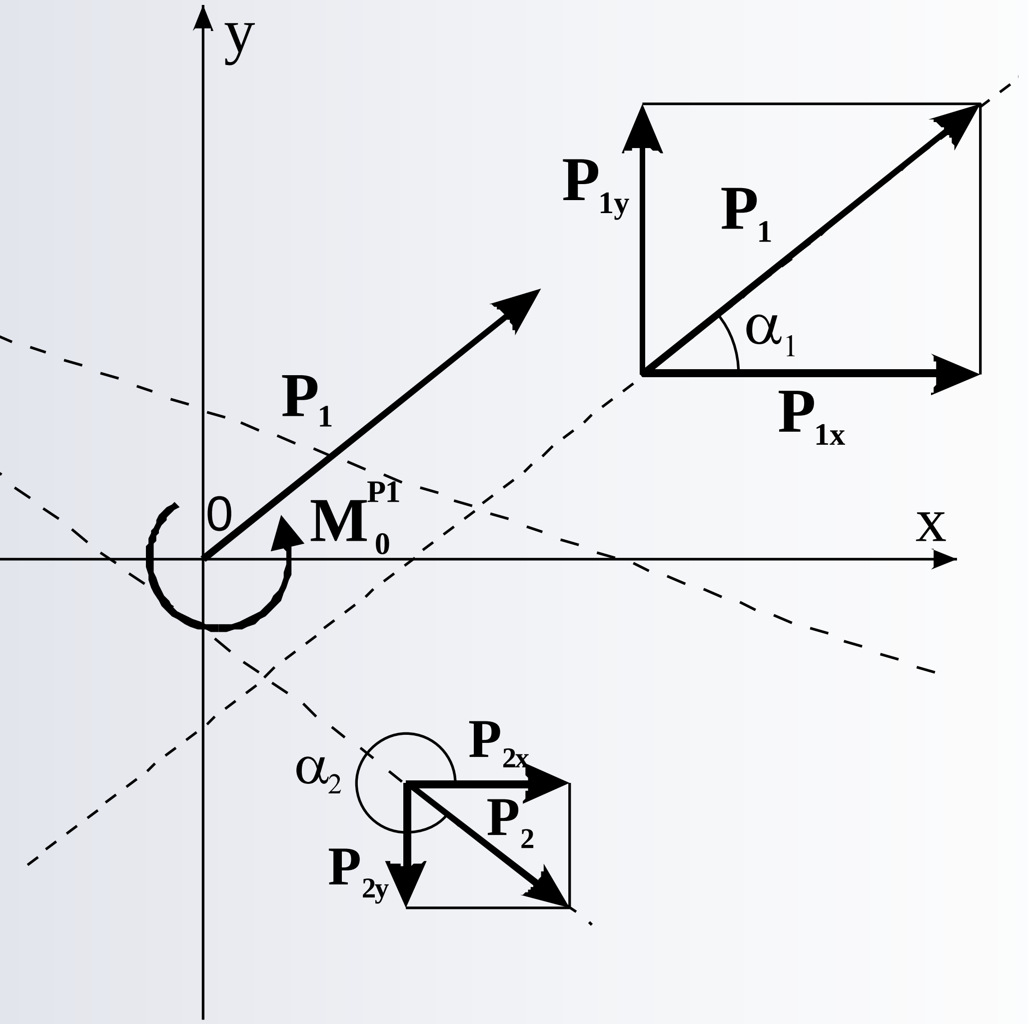
$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{io}$$

Przykład (1)



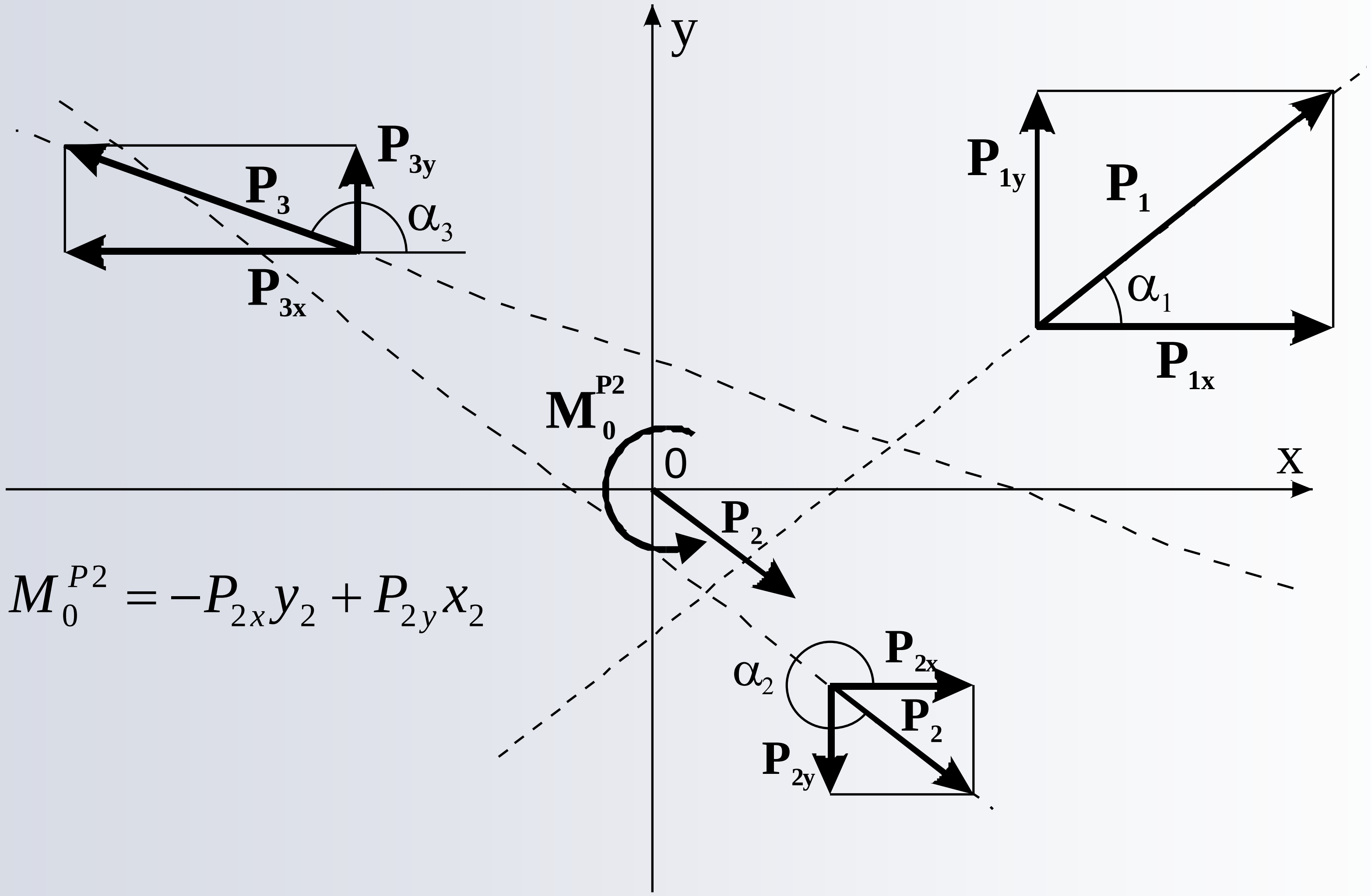
Przykład (2)





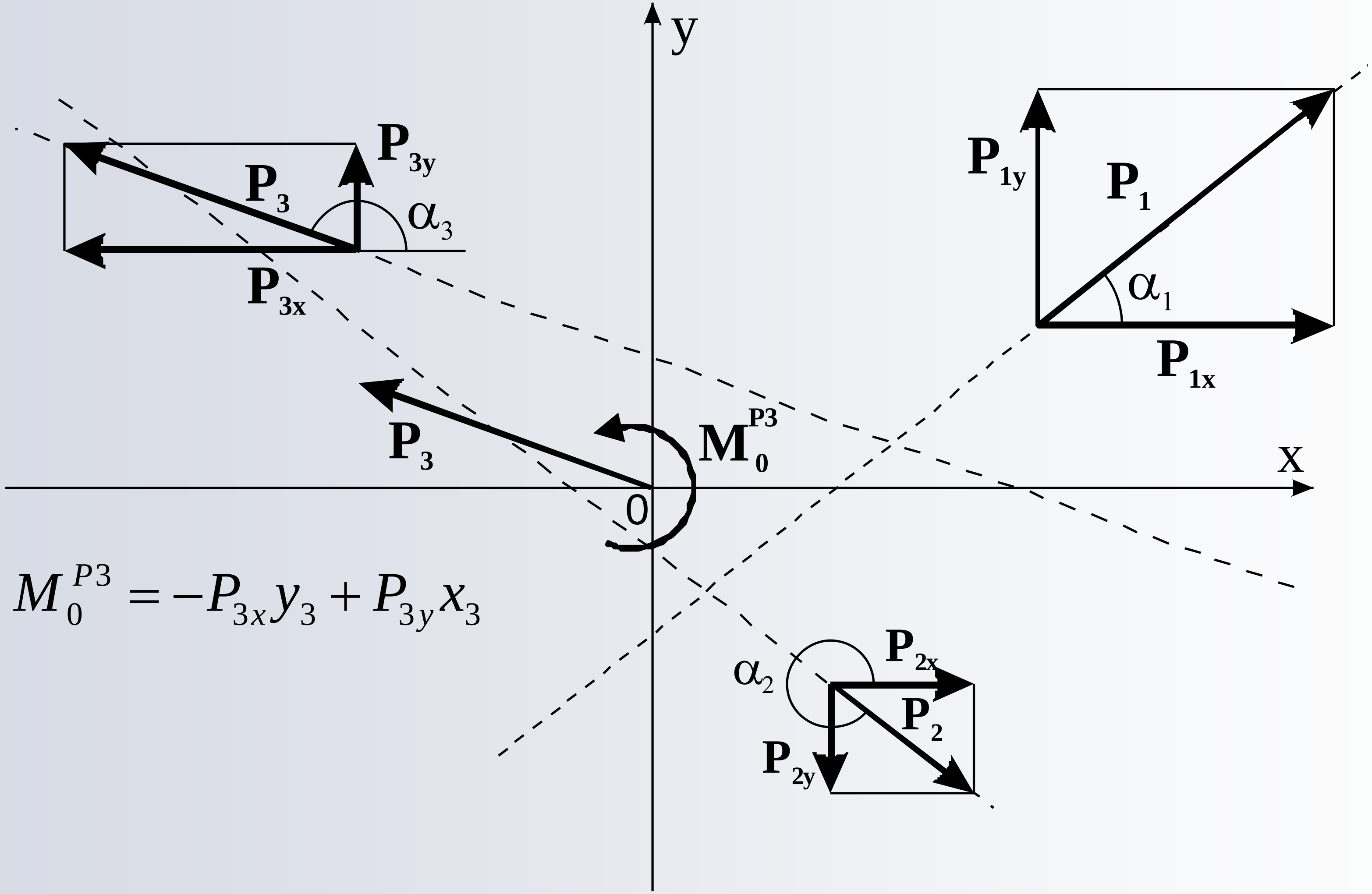
$$M_0^{P1} = -P_{1x} y_1 + P_{1y} x_1$$

Przykład (3)



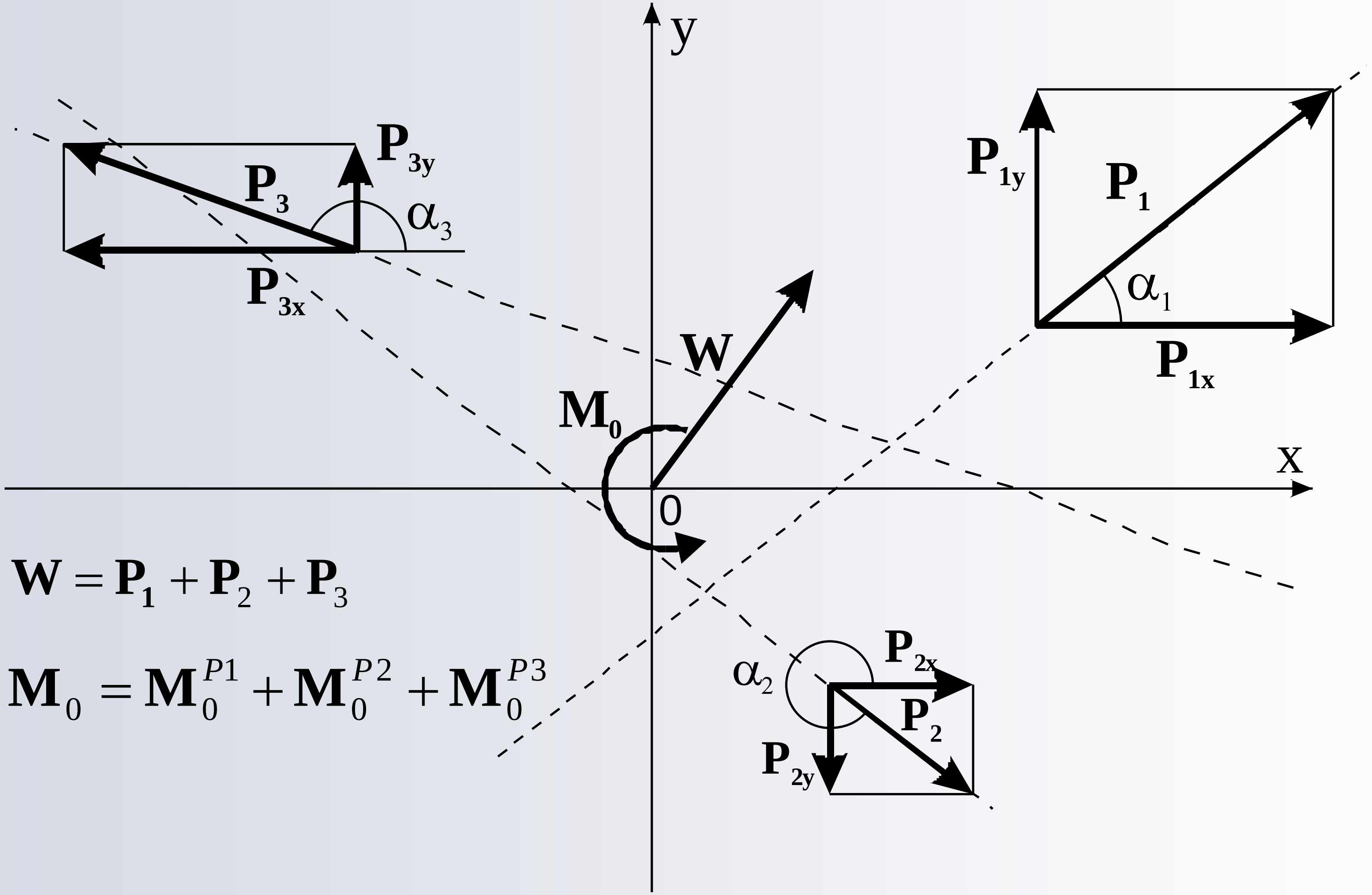
$$M_0^{P2} = -P_{2x} y_2 + P_{2y} x_2$$

Przykład (4)



$$M_0^{P3} = -P_{3x}y_3 + P_{3y}x_3$$

Przykład (5)



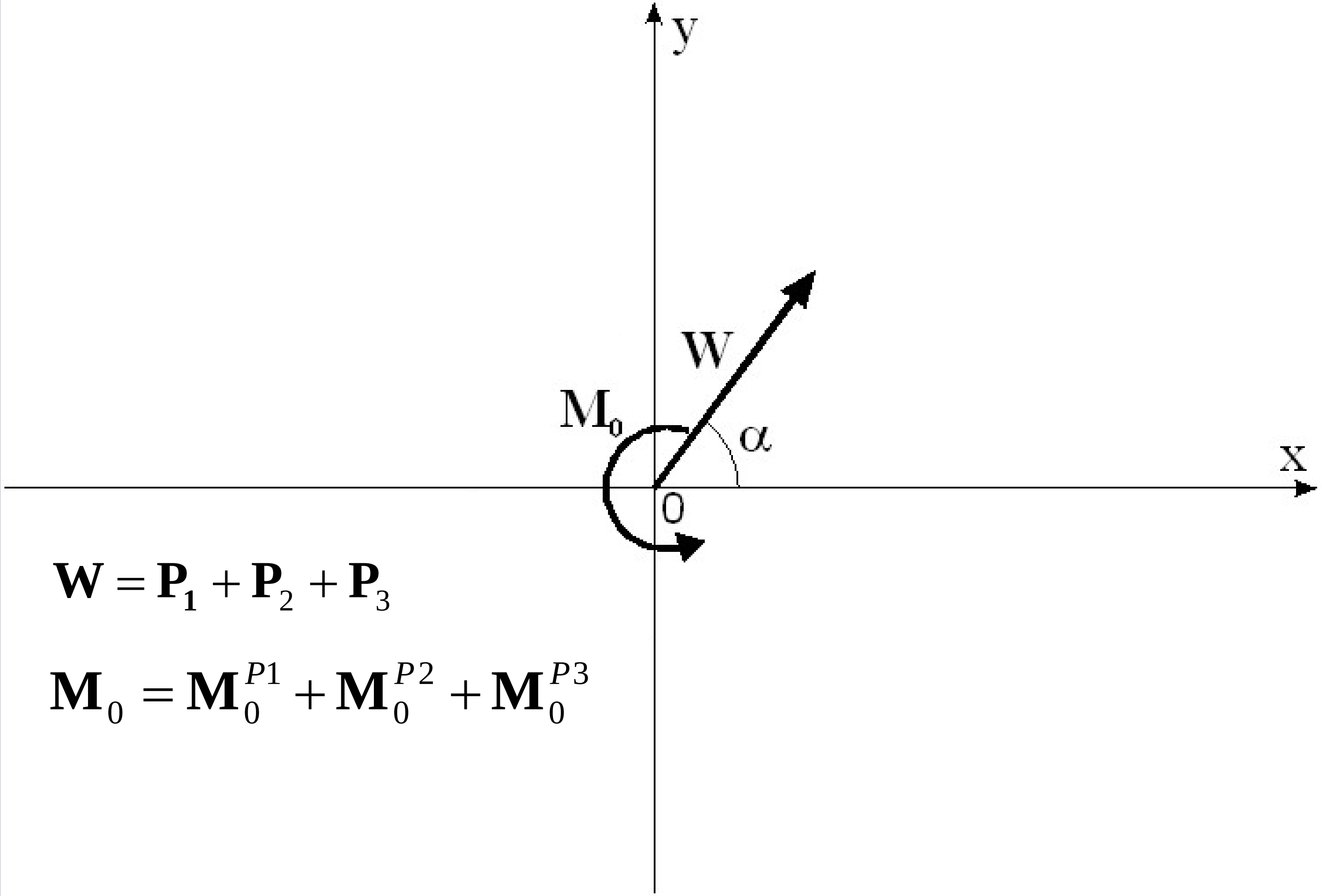
$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0^{P1} + \mathbf{M}_0^{P2} + \mathbf{M}_0^{P3}$$

Dowolny płaski układ sił (3)

- Wypadkowy moment może zostać przedstawiony jako:
  - wektor momentu;
  - para sił;
  - moment od siły wypadkowej przyłożonej nie w biegunie redukcji, a na linii działania wyznaczonej w taki sposób, że moment od siły wypadkowej równy jest momentowi od sił składowych.

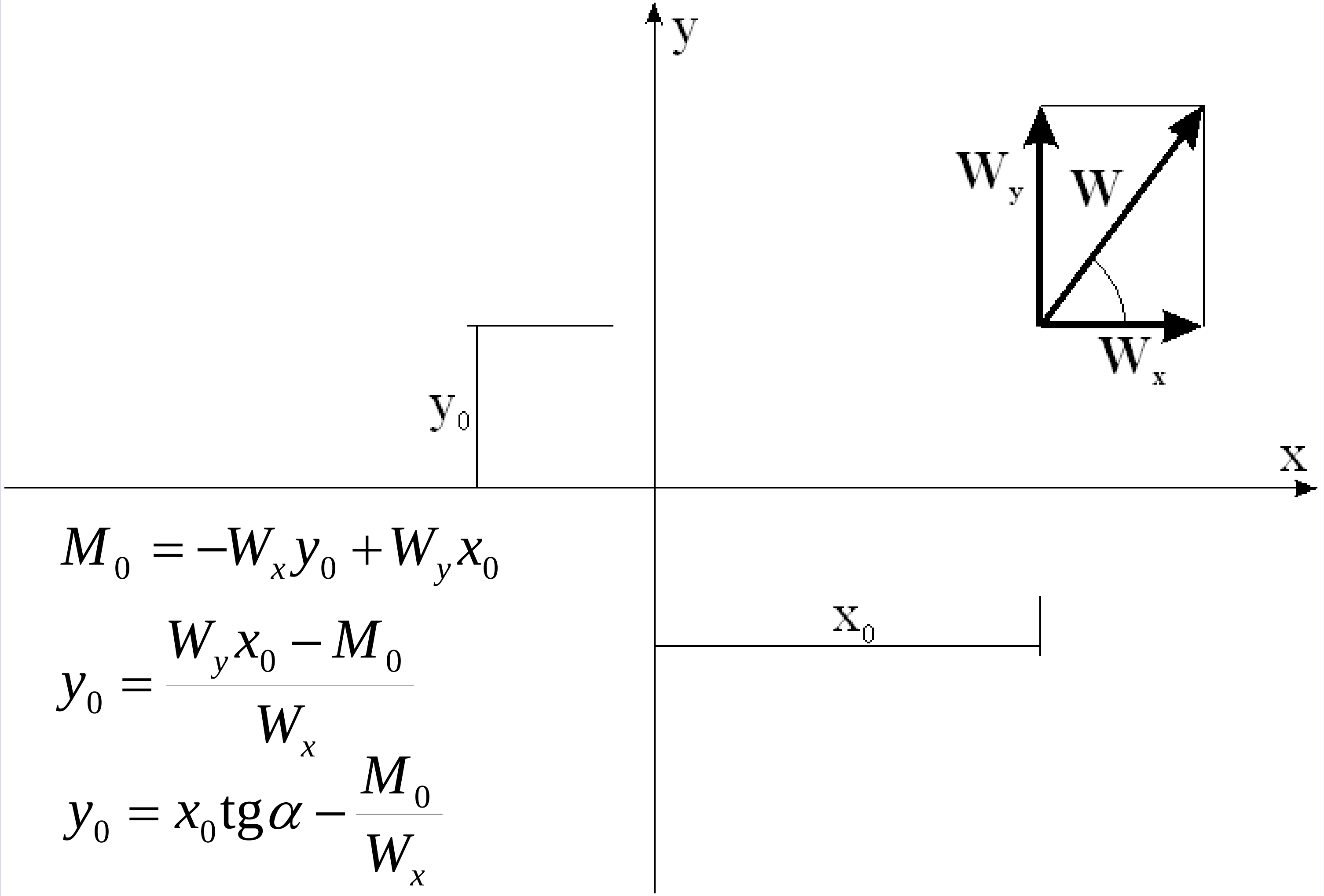
Siła wypadkowa i wypadkowy moment



$$\mathbf{W} = \mathbf{P_1} + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0^{P1} + \mathbf{M}_0^{P2} + \mathbf{M}_0^{P3}$$

Moment od wypadkowej



$$M_0 = -W_x y_0 + W_y x_0$$

$$y_0 = \frac{W_y x_0 - M_0}{W_x}$$

$$y_0 = x_0 \operatorname{tg}\alpha - \frac{M_0}{W_x}$$

Uogólnienie w przestrzeni

- Układ sił **zbieżnych** – redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w punkcie zbieżności.
- **Dowolny** przestrzenny układ sił – redukcja do wypadkowej siły i wypadkowego momentu.

Klasyfikacja układów sił

Układ sił - układ wypadkowy	Płaszczyzna	Przestrzeń
Zbieżny	Siła wypadkowa w płaszczyźnie	Siła wypadkowa – dowolny kierunek w przestrzeni
Dowolny	Siła wypadkowa w płaszczyźnie i wektor momentu prostopadły do płaszczyzny	Siła wypadkowa (dowolny kierunek w przestrzeni) i wypadkowy wektor momentu (dowolny kierunek w przestrzeni)