

Mechanika teoretyczna

Wykład nr 2

Równowaga

Wyznaczanie reakcji

Belki przegubowe

Ramy

Stan równowagi

■ Równowaga statyczna

Punkt materialny (ciało sztywne) jest w równowadze, jeżeli pod wpływem układu sił, nie porusza się on lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki układ sił nazywa się zrównoważonym lub równoważnym zeru.

Oswobodzenie z więzów

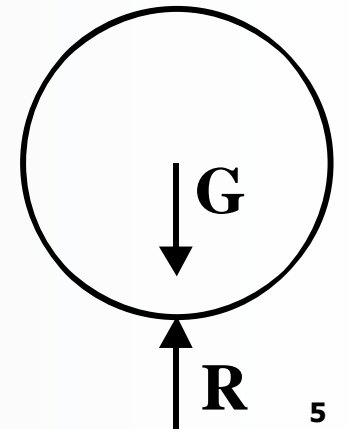
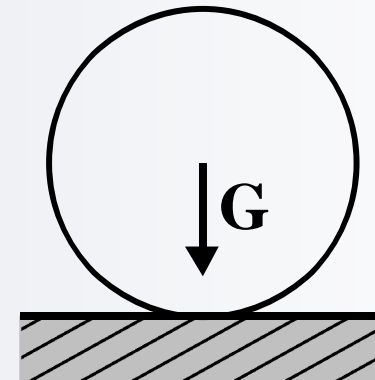
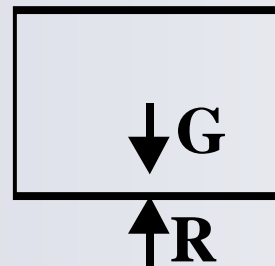
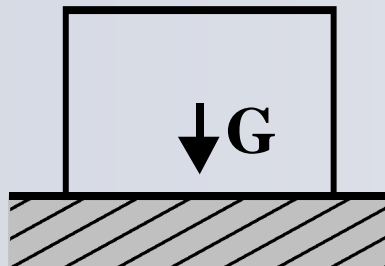
- Ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić z więzów, zastępując ich działanie reakcjami.
- Ciało oswobodzone z więzów można traktować jako swobodne pod działaniem sił czynnych (obciążeń) i biernych (reakcji).

Rodzaje sił w mechanice

- W mechanice wyróżnia się następujące rodzaje sił:
 - **siły zewnętrzne** - obciążenie pochodzące od innych ciał;
 - **reakcje** - siły zewnętrzne wynikające ze sposobu zamocowania konstrukcji;
 - **siły wewnętrzne** - wzajemne oddziaływanie pomiędzy częściami ciała.

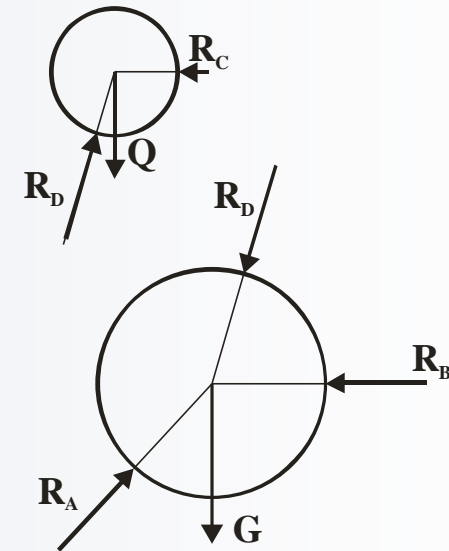
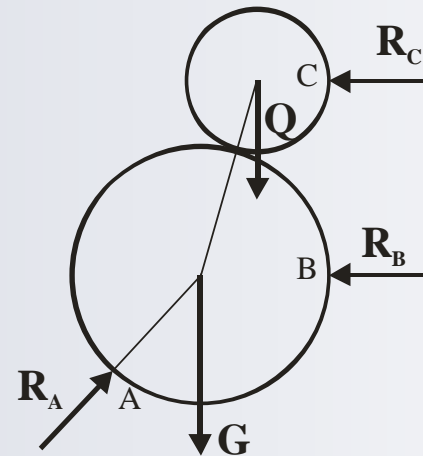
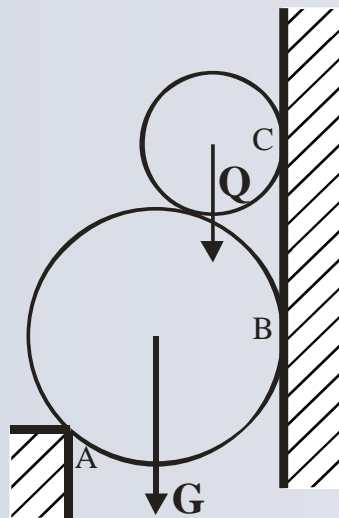
Więzy – nacisk (1)

- Powierzchnia płaska na płaszczyźnie:
 - reakcja prostopadła do płaszczyzny styku;
- Przekrój kołowy na płaszczyźnie:
 - reakcja prostopadła do płaszczyzny styku (stycznej w punkcie styczności);



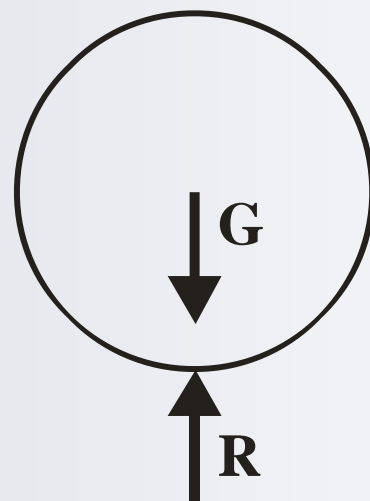
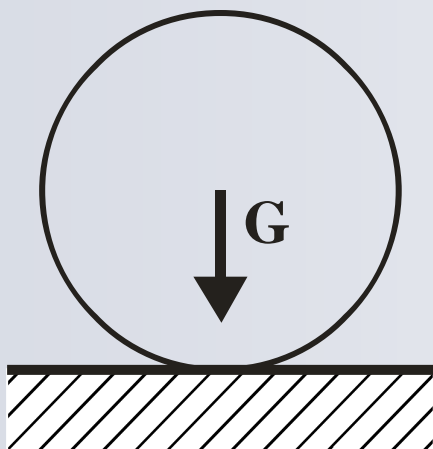
Więzy – nacisk (2)

- Przekrój kołowy oparty o przekrój kołowy:
 - reakcja prostopadła do stycznej obu ciał w punkcie styku (wzdłuż prostej łączącej środki okręgów);
- Punkt na płaszczyźnie:
 - reakcja prostopadła do płaszczyzny.



Równowaga dwóch sił

- Układ dwóch sił pozostaje w równowadze, jeżeli siły te działają wzdłuż jednej prostej, mają przeciwne zwroty i takie same miary.

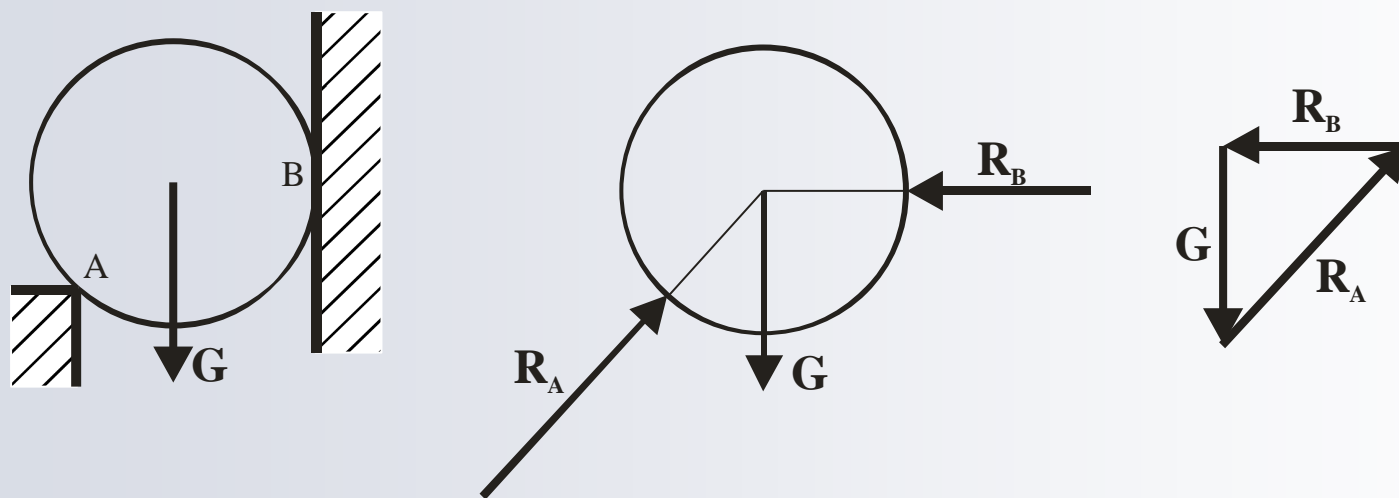


$$\mathbf{R} = -\mathbf{G}$$

$$R = G$$

Równowaga trzech sił

- Układ trzech sił jest zrównoważony, jeżeli siły te tworzą płaski układ sił, ich linie działania przecinają się w jednym punkcie (układ zbieżny), zaś wielobok sił jest zamknięty.



Równania równowagi punktu materialnego

- II zasada dynamiki Newtona:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a}$$

- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = 0$$

Równania równowagi ciała sztywnego (siły zbieżne)

- II zasada dynamiki Newtona:

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \dots + \mathbf{P}_n = m\mathbf{a}$$

- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$$

Układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **przecinają się w jednym punkcie**. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zero lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \dots + \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$$

Płaski układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie**. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zero lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \dots + \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$$

Równania równowagi układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zero.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0.$$

Równania równowagi płaskiego układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne, leżące w jednej płaszczyźnie, były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zero.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0.$$

Warunki równowagi układu zbieżnego (podsumowanie)

- Wypadkowa układu sił musi być równa 0, tj. zamyka się wielobok sznurowy sił (graficznie), a sumy rzutów sił układu na osie układu współrzędnych muszą być równe zero (analitycznie).

- **Przestrzenny układ sił**

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

- **Płaski układ sił**

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0;$$

Równania równowagi ciała sztywnego (dowolny układ sił)

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

- Jeżeli ciało sztywne jest w stanie równowagi statycznej, to dodatkowo:

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_o = 0$$

Warunki równowagi dowolnego układu sił (1)

■ Płaski układ sił $\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n M_{iO} = 0$

lub $\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad AB \not\parallel x$

lub $\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \sum_{i=1}^n M_{iC} = 0 \quad A, B, C \notin l$

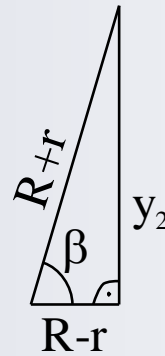
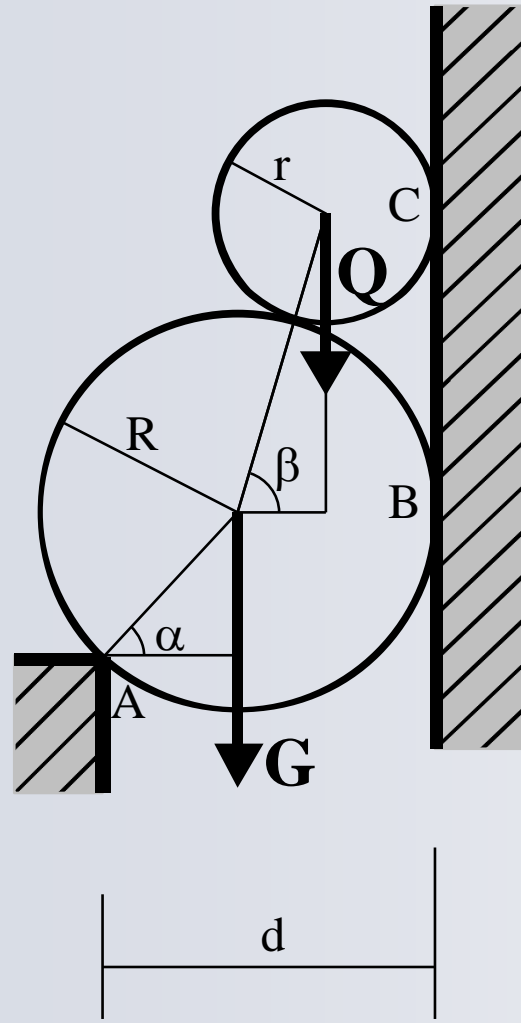
Warunki równowagi dowolnego układu sił (2)

■ Przestrzenny układ sił

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

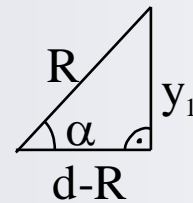
Przykład (dwa układy zbieżne) (1)



$$y_2 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}$$

$$\sin \beta = \frac{y_2}{R+r}$$

$$\cos \beta = \frac{R-r}{R+r}$$



$$y_1 = \sqrt{R^2 - (d-R)^2}$$

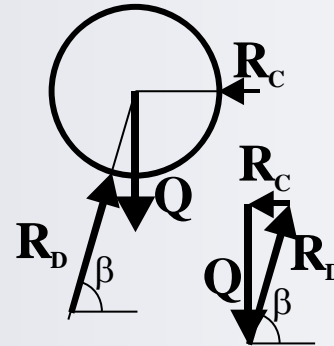
$$\sin \alpha = \frac{y_1}{R}$$

$$\cos \alpha = \frac{d-r}{R}$$

Przykład (dwa układy zbieżne) (2)

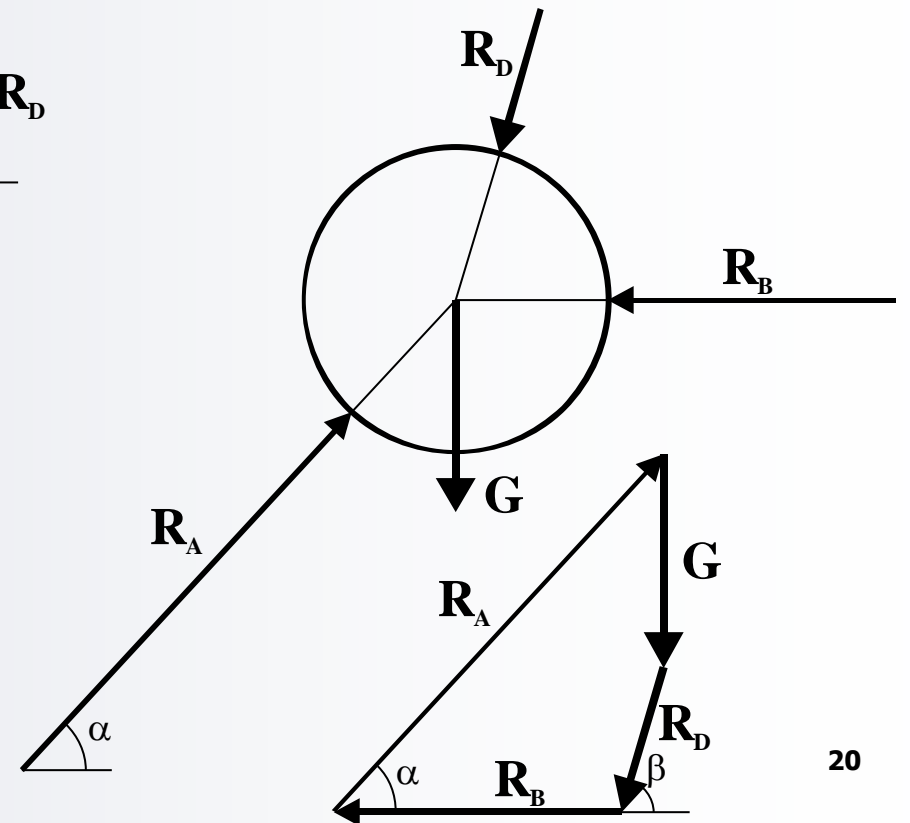
$$\sum X = R_D \cos \beta - R_C = 0$$

$$\sum Y = R_D \sin \beta - Q = 0$$

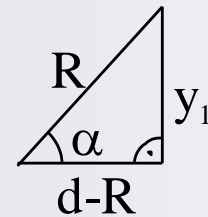
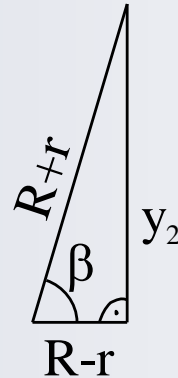
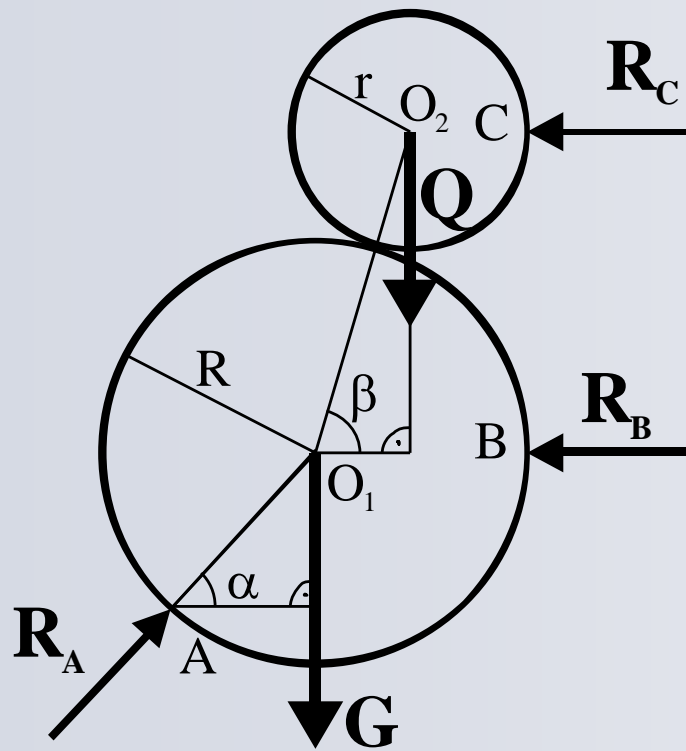


$$\sum X = R_A \cos \alpha - R_B - R_D \cos \beta = 0$$

$$\sum Y = R_A \sin \alpha - G - R_D \sin \beta = 0$$



Przykład (układ niezbieżny)



$$\sum X = R_A \cos \alpha - R_B - R_C = 0$$

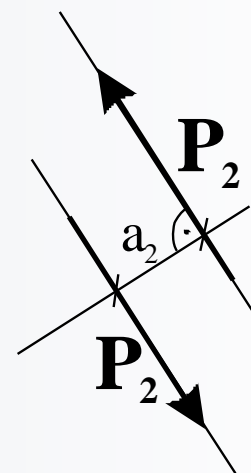
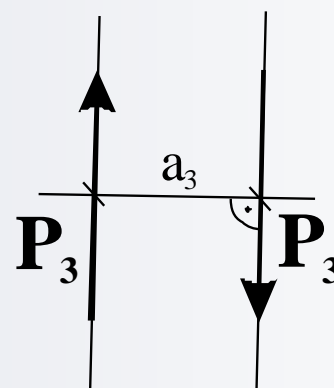
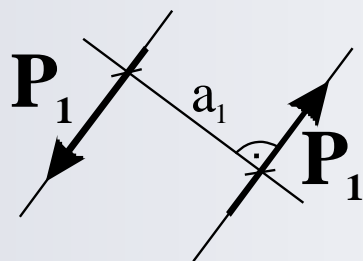
$$\sum Y = R_A \sin \alpha - Q - G = 0$$

$$\sum M_{o1} = R_C \cdot y_2 - Q \cdot (R - r) = 0$$

Równowaga par sił

- Aby układ par sił, działających w jednej płaszczyźnie na ciało sztywne, znajdował się w równowadze, suma wypadkowych momentów tych par sił musi być równa zero.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = 0$$



Podstawowe typy ustrojów prętowych

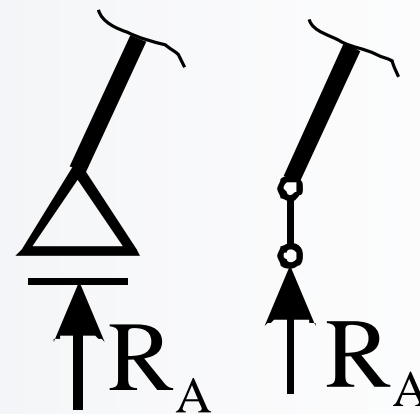
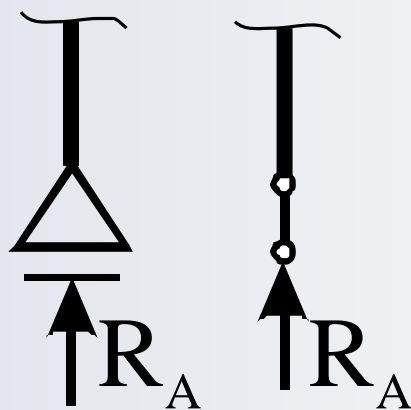
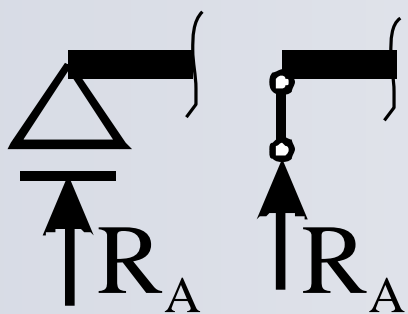
- **Pręt** – element o wymiarach poprzecznych (np. grubość i szerokość) znacznie mniejszych od trzeciego wymiaru (długość)
- **Belka** – ustrój prętowy z prętami rozmieszczonymi w jednej linii. Siły często są prostopadłe do osi belki.
- **Rama** – ustrój prętowy
- **Krata** – ustrój prętowy, który składa się z prętów połączonych przegubami. Siły mogą być przykładane tylko w węzłach.

Stopnie swobody

- Liczba niezależnych ruchów, jakie ciało jest w stanie zrealizować w przestrzeni.
- Punkt materialny:
 - w przestrzeni – 3 (3 składowe przesuwu);
 - na płaszczyźnie – 2 (2 składowe przesuwu);
- Ciało sztywne
 - w przestrzeni – 6 (3 składowe przesuwu i 3 składowe obrotu);
 - na płaszczyźnie – 3 (2 składowe przesuwu i obrót).

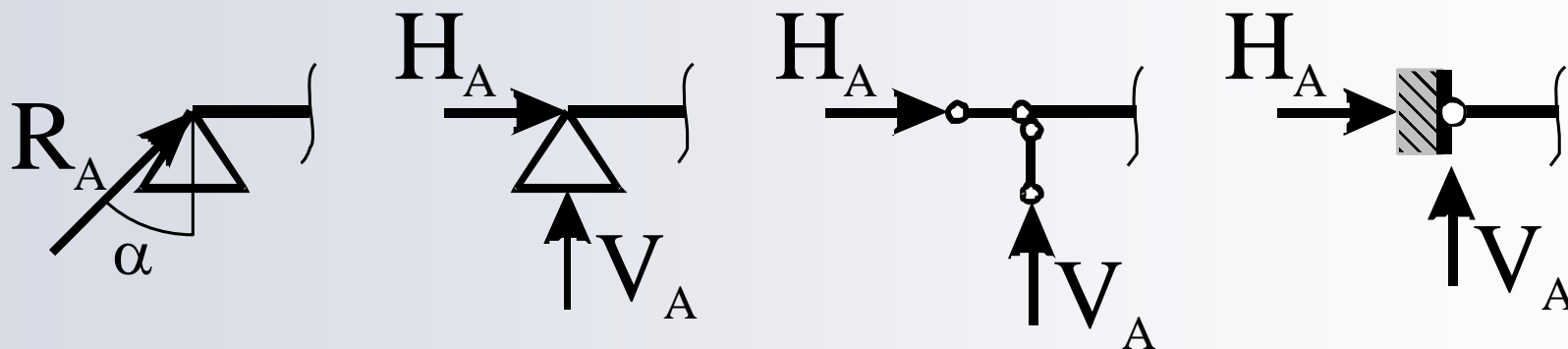
Podpory, pręty podporowe (1)

- Podpora przegubowa przesuwna – zablokowana jedna składowa przesuwnu, jeden pręt podporowy, jedna reakcja.



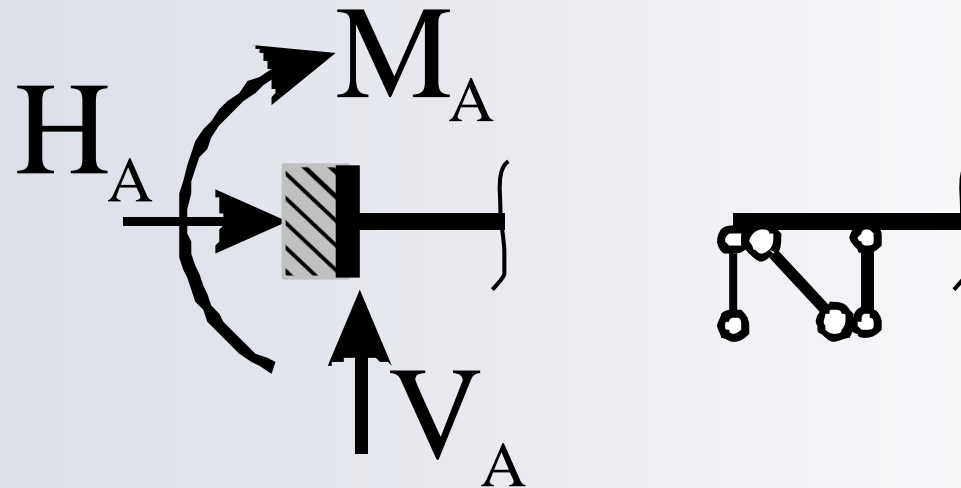
Podpory, pręty podporowe (2)

- Podpora przegubowa nieprzesuwna – zablokowane obie składowe przesuwu, dwa pręty podporowe, dwie niewiadome: reakcja i kierunek lub dwie składowe reakcji.



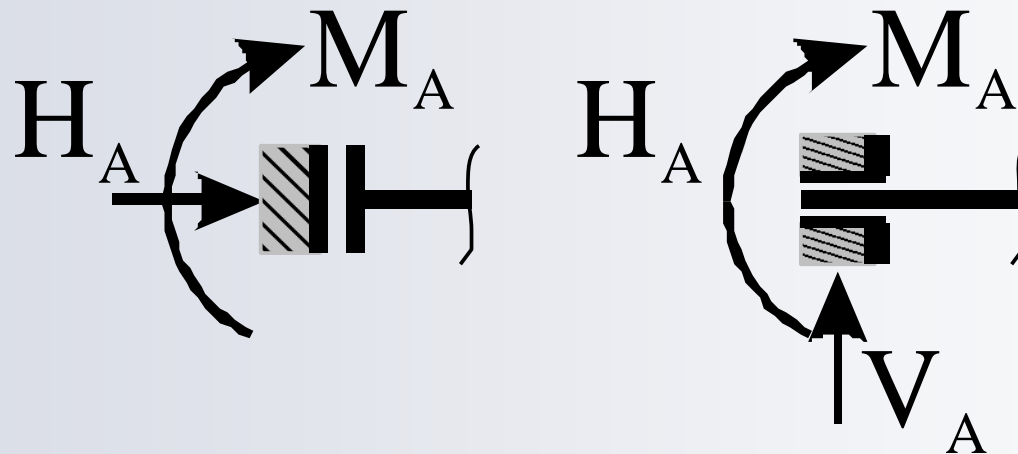
Podpory, pręty podporowe (3)

- Sztywne zamocowanie – zablokowane wszystkie przemieszczenia (dwie składowe przesuwu i obrót), trzy pręty podporowe, trzy niewiadome – dwie składowe siły i moment.



Inne sposoby podparcia

- Sztywne zamocowanie z możliwością przesuwu:
 - poprzecznie do osi pręta;
 - wzdłuż pręta.



Rodzaje obciążeń – układy płaskie

- Siły skupione;
- Momenty skupione;
- Obciążenia liniowo rozłożone;
- Obciążenia momentem liniowo rozłożone.

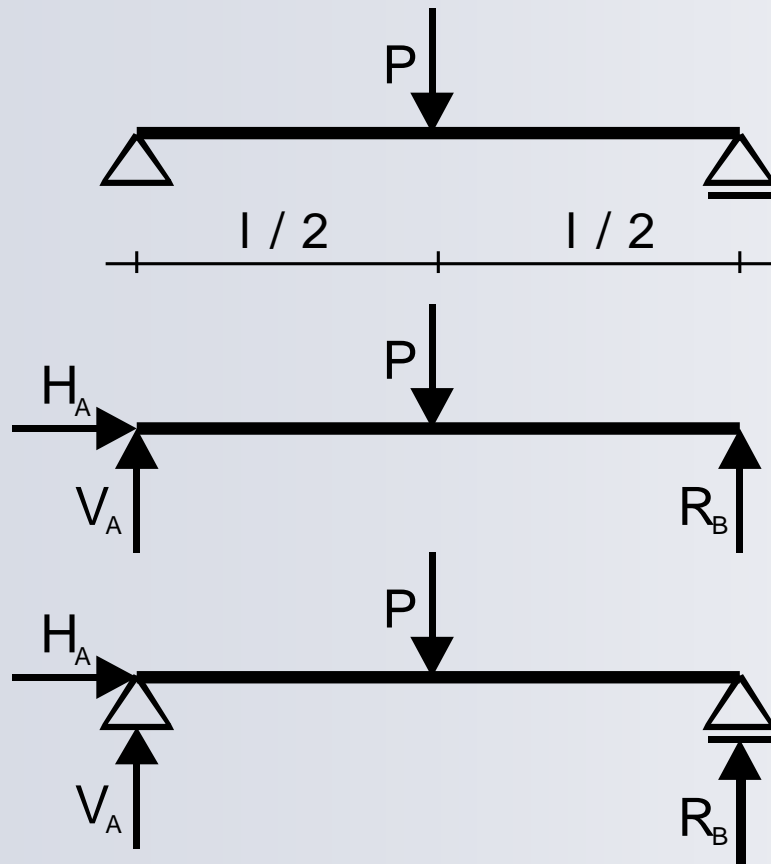
Rodzaje obciążeń – układy przestrzenne

- Siły skupione;
- Momenty skupione;
- Obciążenia liniowo rozłożone;
- Obciążenia momentem liniowo rozłożone;
- Obciążenia rozłożone na powierzchni;
- Obciążenia rozłożone w objętości.

Jednostki obciążeń

- Obciążenie ciągłe – kN/m
- Siła skupiona - kN
- Moment skupiony - kNm
- Obciążenie ciągłe momentem – kNm/m

Reakcje – belka swobodnie podparta

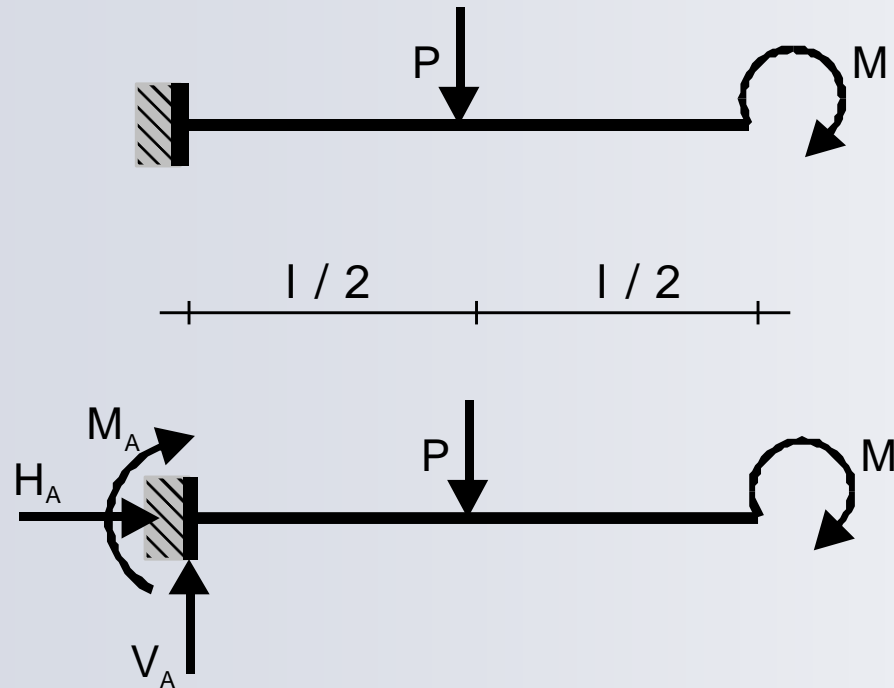


$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - P = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Reakcje – belka wspornikowa

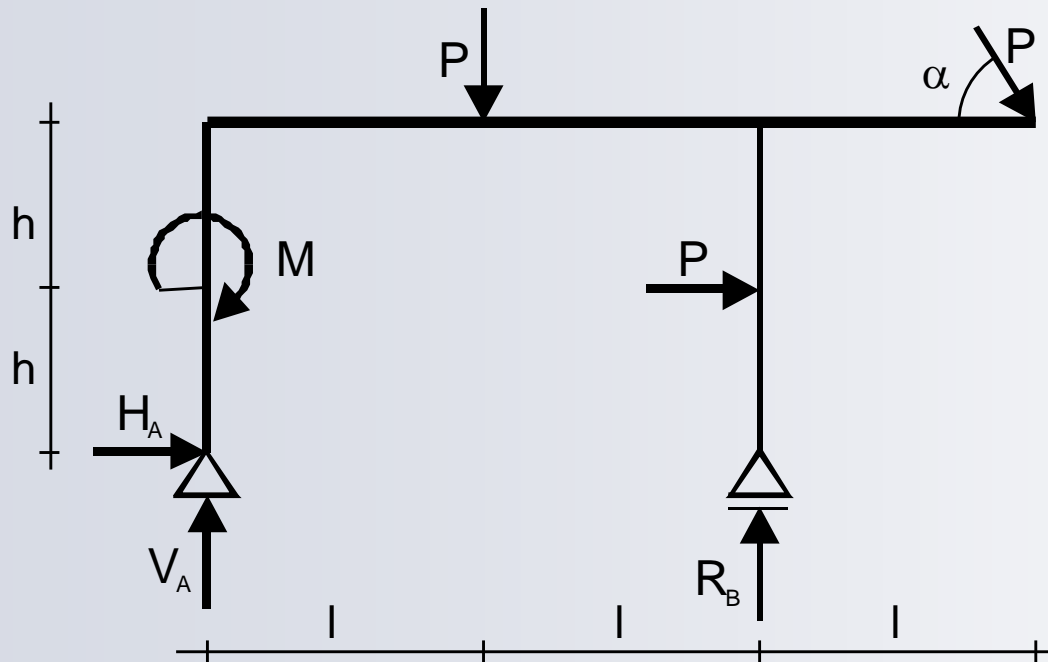


$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A - P = 0$$

$$\sum M_A : M_A + P \cdot \frac{l}{2} + M = 0$$

Reakcje – rama bezprzegubowa



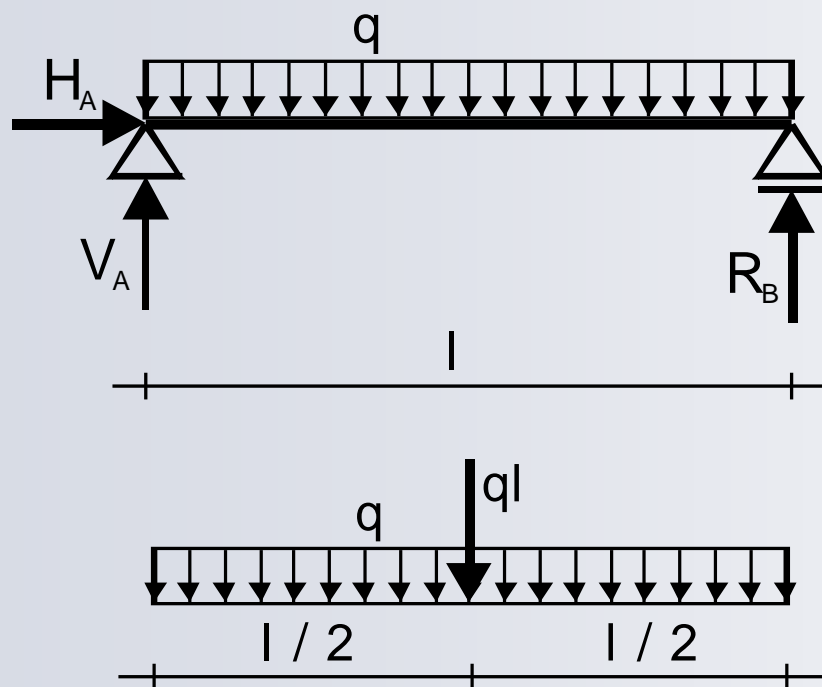
$$\sum X : H_A + P + P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - P - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A : M + P \cdot l + P \cdot h + P \cos \alpha \cdot 2h + P \sin \alpha \cdot 3l - R_B \cdot 2l = 0$$

Obciążenie ciągłe równomierne

- Miara wypadkowej obciążenia rozłożonego liniowo równa jest polu figury opisującej obciążenie i powinna zostać przyłożona w środku ciężkości tej figury.

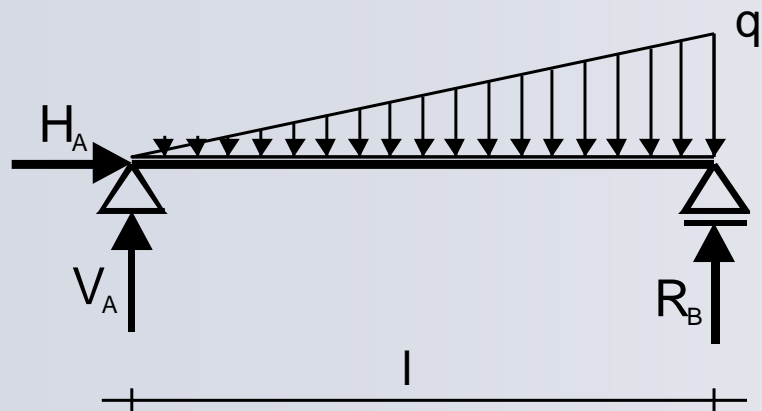


$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

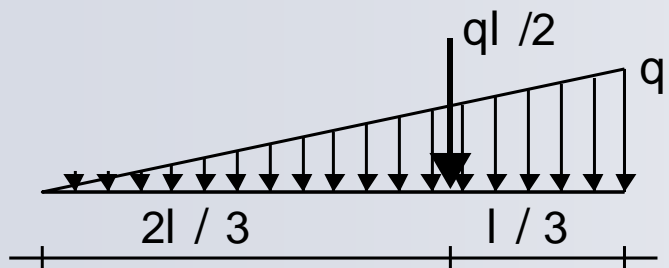
Obciążenie ciągłe trójkątne



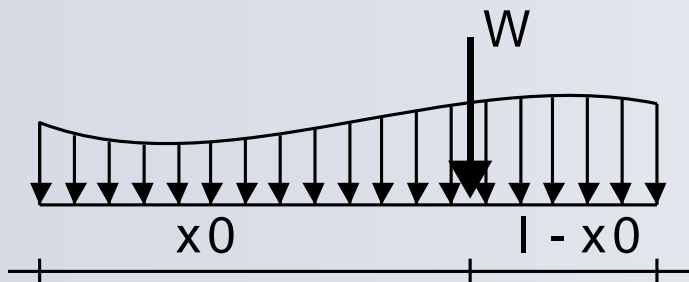
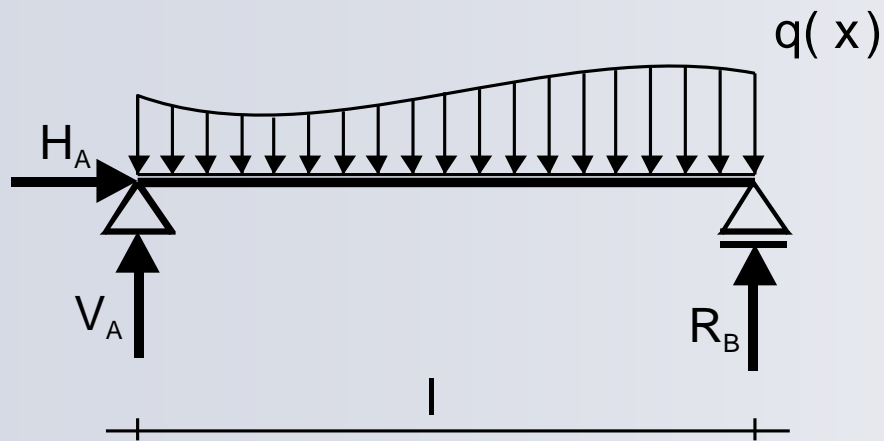
$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - \frac{1}{2}q \cdot l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - \frac{1}{2}q \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = 0$$



Obciążenie ciągłe dowolne



$$W = \int_0^l q(x) dx$$

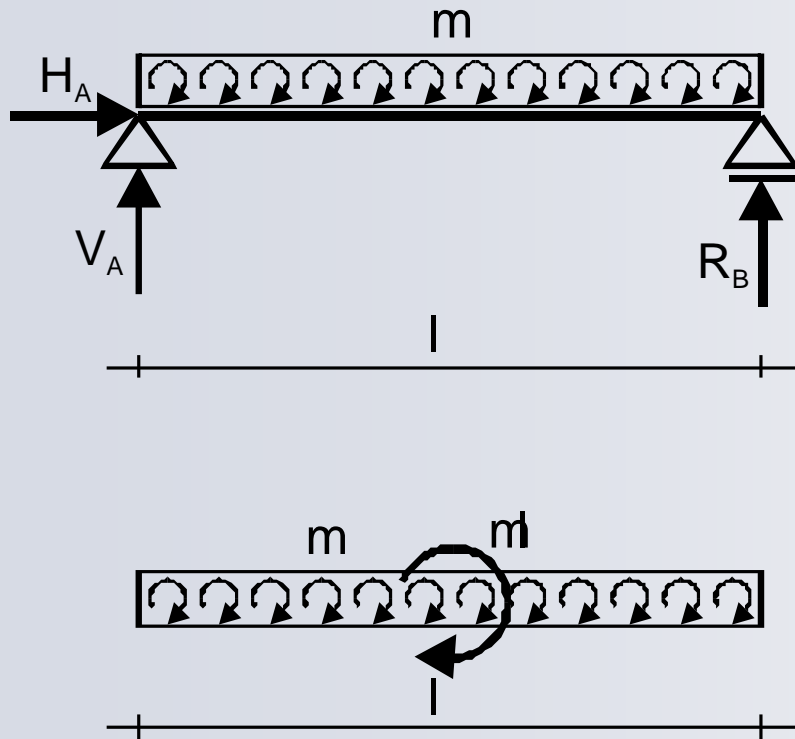
$$x_0 = \frac{\int_0^l q(x) \cdot x dx}{W}$$

$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - W = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - W \cdot x_0 = 0$$

Obciążenie ciągłe momentem



$$\sum X : H_A = 0$$

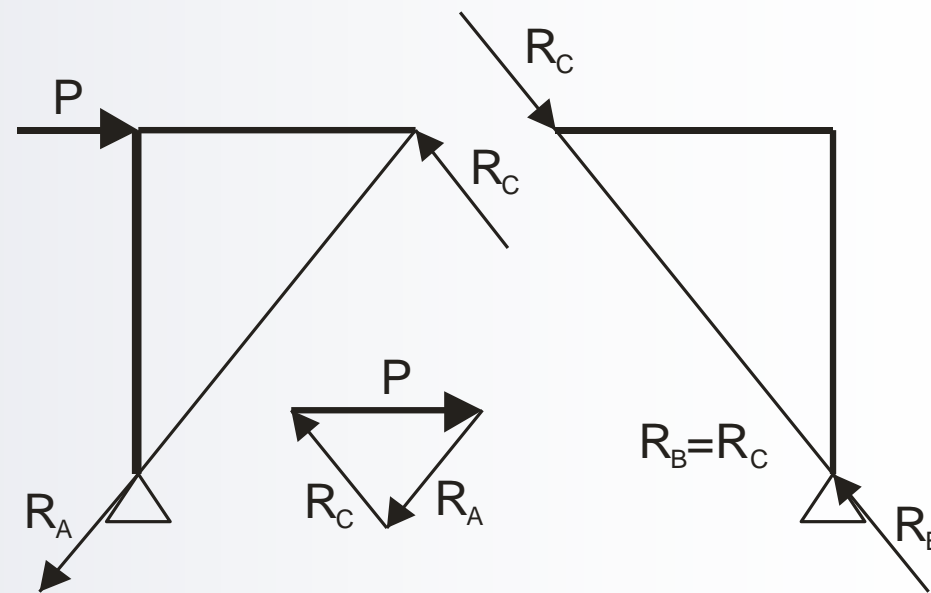
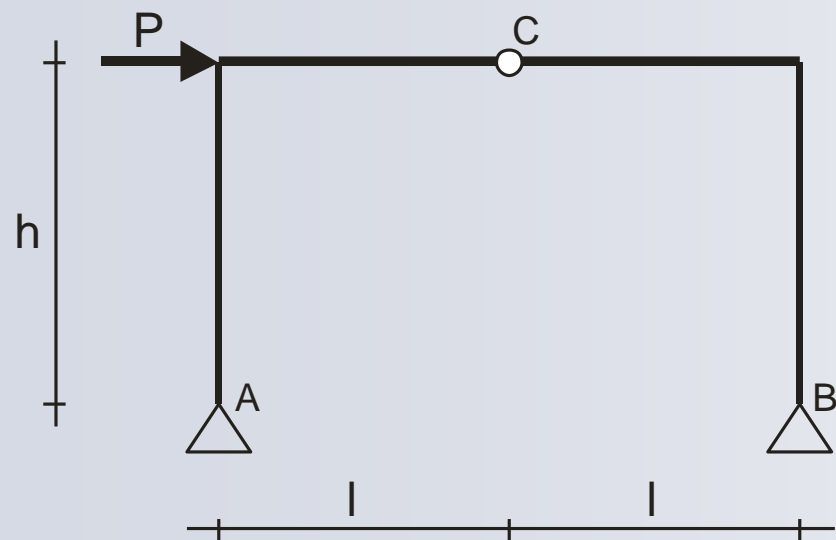
$$\sum Y : V_A + R_B = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot l - m \cdot l = 0$$

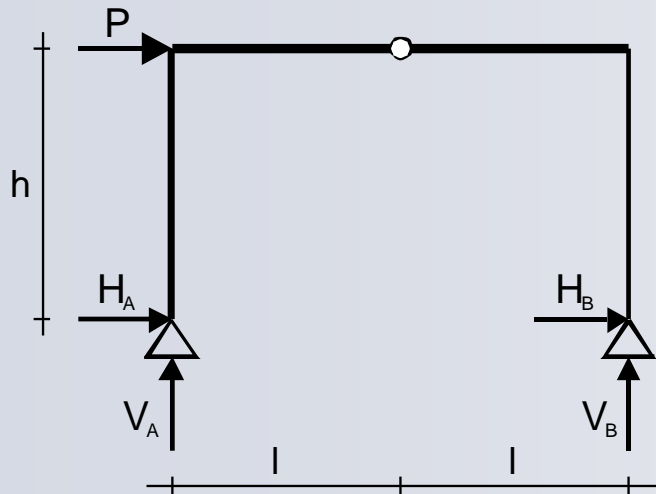
Przegub

- Połączenie elementów prętowych w taki sposób, że mogą się one swobodnie obracać (nie powstaje moment mogący przeciwdziałać obrotowi).
- Uzyskuje się dodatkowy punkt, w którym moment wewnętrzny jest równy zero.
- Moment w przegubie od sił zewnętrznych znajdujących się po jednej ze stron przegubu równy jest 0.

Podział ramy w przegubie



Dodatkowe równanie dla przegubu

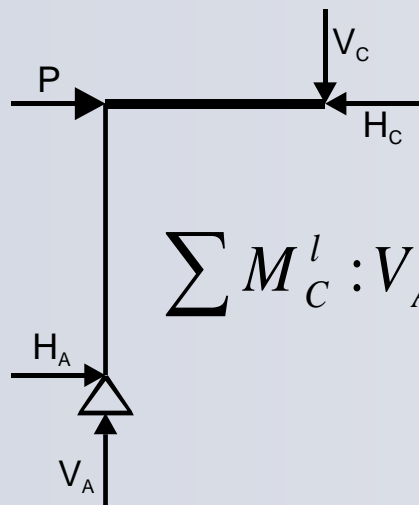


$$\sum X : H_A + H_B + P = 0$$

$$\sum Y : V_A + V_B = 0$$

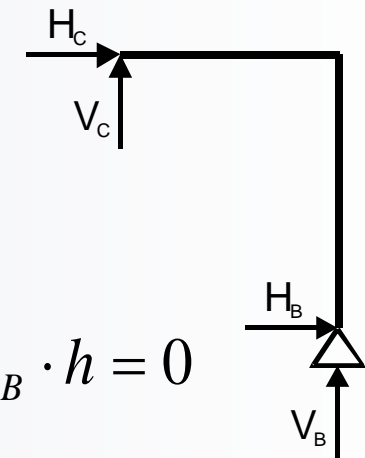
$$\sum M_A : V_B \cdot 2l - P \cdot h = 0$$

•Czwarte równanie:

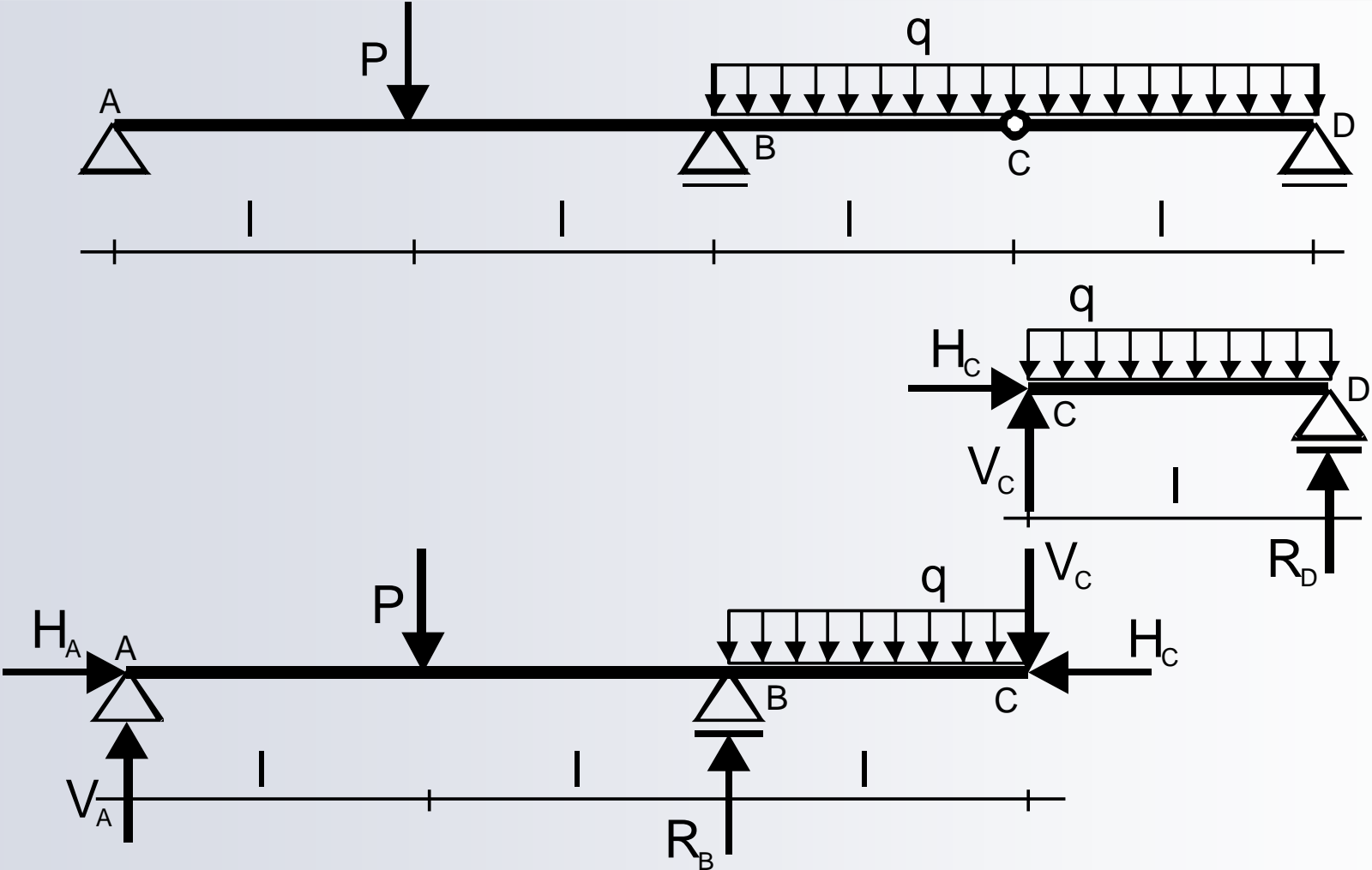


$$\sum M_C^l : V_A \cdot l - H_A \cdot h = 0$$

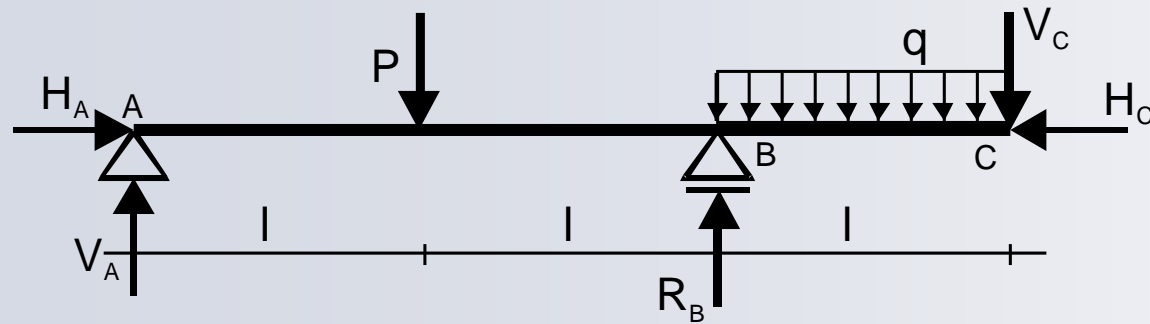
•albo
$$\sum M_C^p : V_B \cdot l + H_B \cdot h = 0$$



Belki przegubowe – rozkład na belki proste



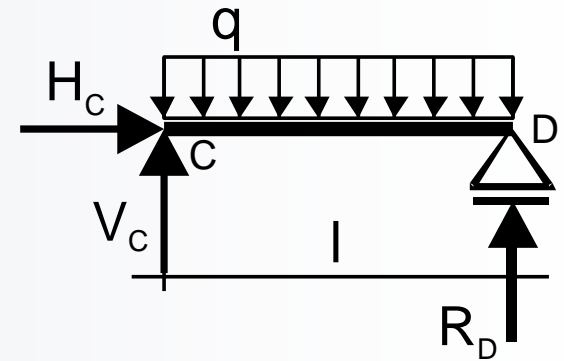
Belki proste – równania równowagi



$$\sum X : H_A - H_C = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - V_C - P - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - P \cdot l - q \cdot l \cdot 2,5l - V_C \cdot 3l = 0$$

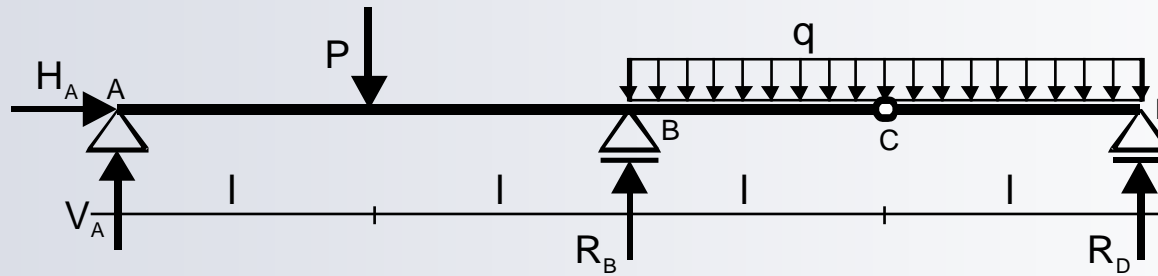


$$\sum X : H_C = 0$$

$$\sum Y : V_C + R_D - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_C : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Reakcje – belki przegubowe (1)



$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_D - P - q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_D \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_C^P : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Rozwiązanie

$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum M_C^P : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_D = q \cdot \frac{l}{2}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A : R_B \cdot 2l + R_D \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_B &= \frac{-R_D \cdot 4l + P \cdot l + q \cdot 2l \cdot 3l}{2l} = -2R_D + \frac{P}{2} + q \cdot 3l = \frac{P}{2} + q \cdot 2l \end{aligned}$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_D - P - q \cdot 2l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A = P + q \cdot 2l - R_B - R_D = P + q \cdot 2l - \frac{P}{2} - q \cdot 2l - q \frac{l}{2} = \frac{P}{2} - q \frac{l}{2}$$

Podstawienie danych

$$q = 5kN / m$$

$$P = 10kN$$

$$l = 2m$$

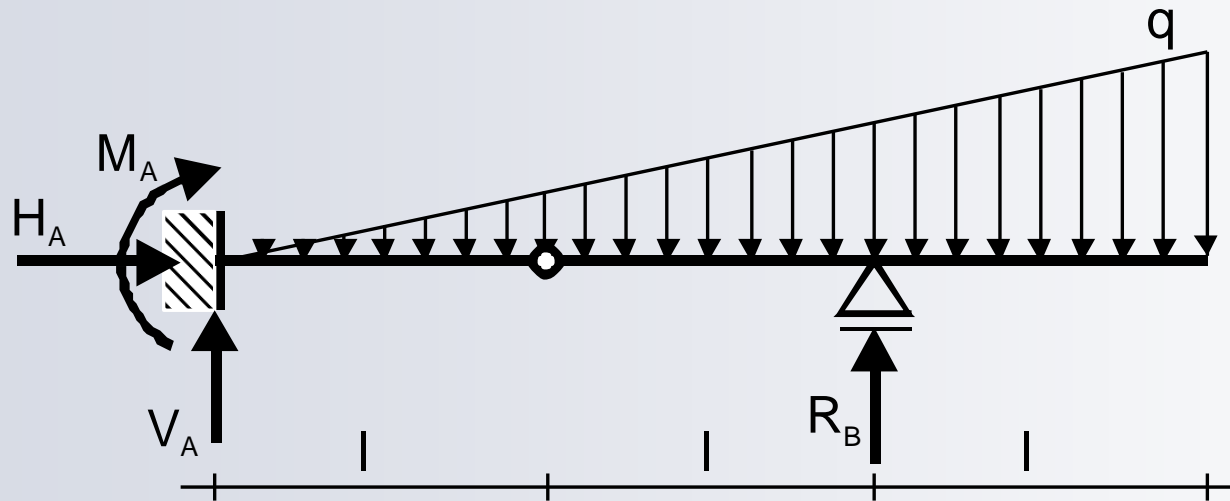
$$H_A = 0$$

$$R_D = q \cdot \frac{l}{2} = 5kN / m \cdot \frac{2m}{2} = 5kN$$

$$R_B = \frac{P}{2} + q \cdot 2l = \frac{10kN}{2} + 5kN / m \cdot 2 \cdot 2m = 25kN$$

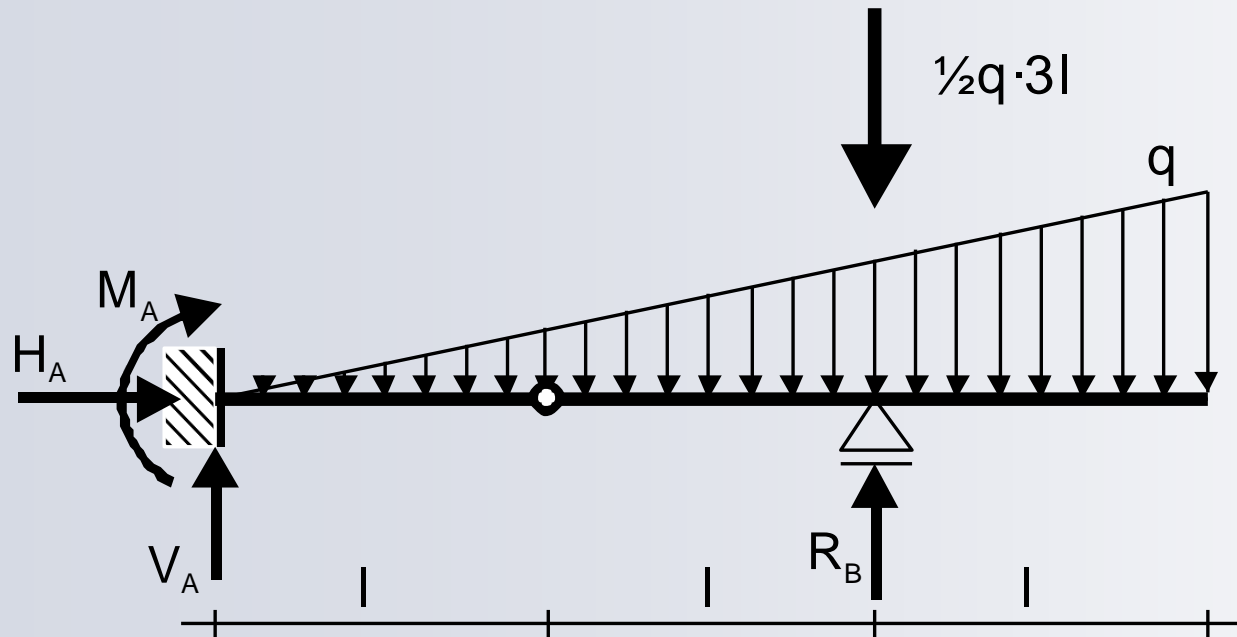
$$V_A = \frac{10kN}{2} - 5kN / m \cdot \frac{2m}{2} = 0$$

Reakcje – belki przegubowe (2)



$$\sum X : H_A = 0$$

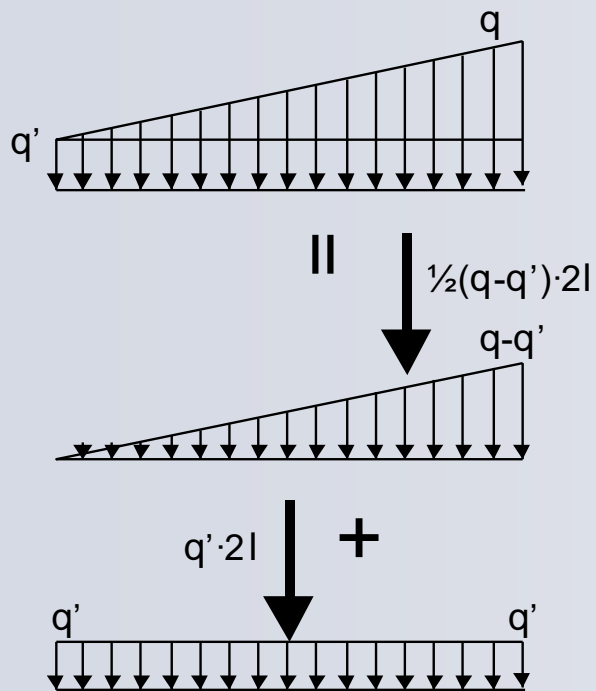
Wypadkowa obciążenia trójkątnego



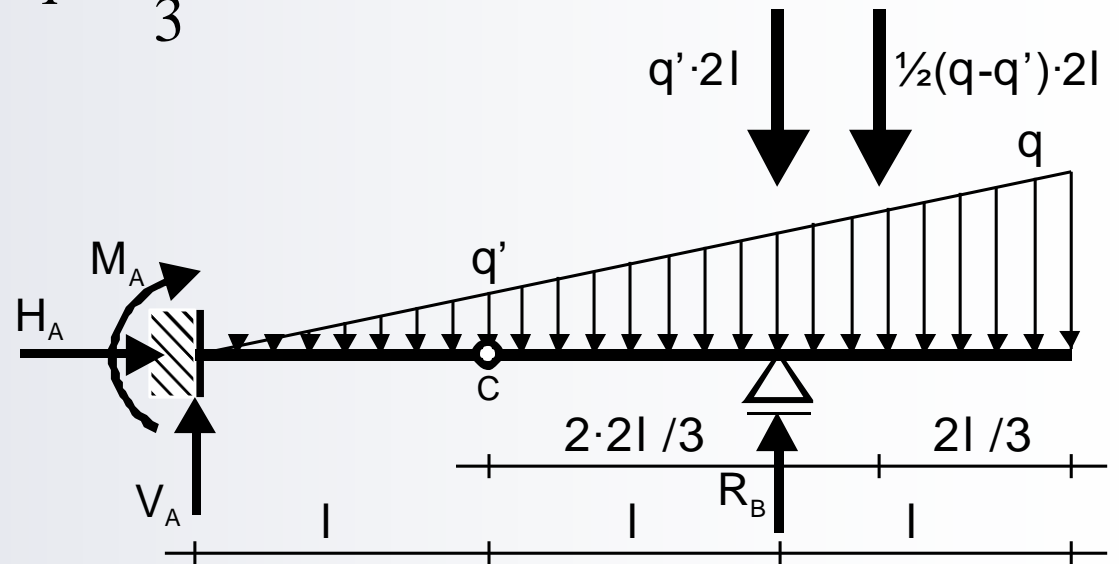
$$\sum Y : V_A + R_B - \frac{1}{2}q \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - M_A - \frac{1}{2}q \cdot 3l \cdot 2l = 0$$

Suma momentów względem przegubu



$$\frac{q'}{l} = \frac{q}{3l} \Rightarrow q' = \frac{q}{3}$$



$$\sum M_C^P : R_B \cdot l - q' \cdot 2l \cdot l - \frac{1}{2}(q - q') \cdot 2l \cdot 2 \frac{2l}{3} = 0$$

Rozwiązanie

$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum M_C^p : R_B \cdot l - \frac{q}{3} \cdot 2l^2 - \frac{1}{2} \frac{2q}{3} \cdot \frac{8l^2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{2}{3} \cdot ql + \frac{8}{9} \cdot ql = \frac{14}{9} \cdot ql$$

$$\sum Y : V_A + R_B - \frac{1}{2} q \cdot 3l = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{3}{2} \cdot ql - \frac{14}{9} \cdot ql = -\frac{1}{18} \cdot ql$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - M_A - \frac{1}{2} q \cdot 3l \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{14}{9} \cdot 2ql^2 - 3ql^2 = \frac{1}{9} \cdot ql^2$$

Podstawienie danych

$$q = 10kN / m$$

$$l = 1,5m$$

$$H_A = 0$$

$$V_A = -\frac{1}{18} \cdot ql = -\frac{1}{18} \cdot 10kN / m \cdot 1,5m = -0,833kN$$

$$R_B = \frac{14}{9} \cdot ql = \frac{14}{9} \cdot 10kN / m \cdot 1,5m = 23,333kN$$

$$M_A = \frac{1}{9} \cdot ql^2 = \frac{1}{9} \cdot 10kN / m \cdot (1,5m)^2 = 2,5kNm$$