

Mechanika teoretyczna

Wykład nr 2

Równowaga

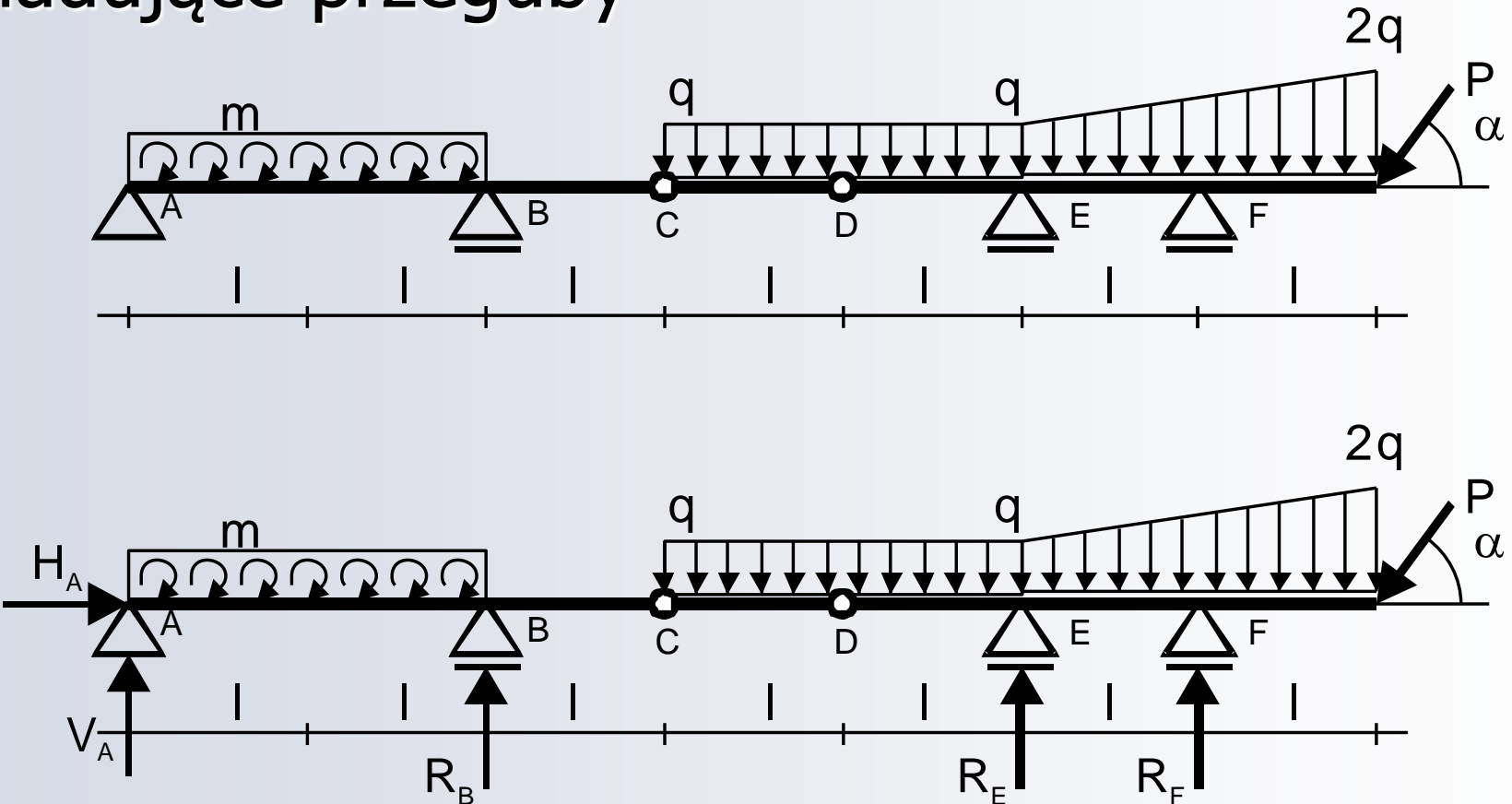
Wyznaczanie reakcji

Belki przegubowe

Ramy

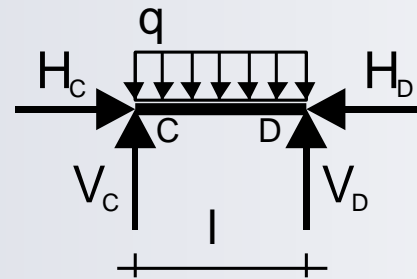
Belki przegubowe (3)

- Sąsiadujące przeguby

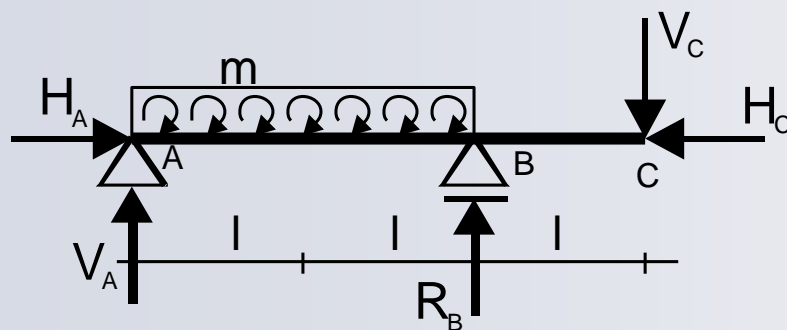


Belki proste – równania równowagi

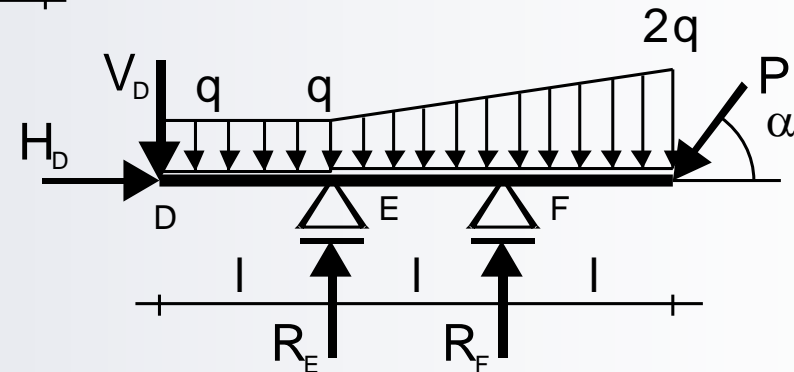
- 9 niewiadomych – 9 równań



$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M_C = 0$$

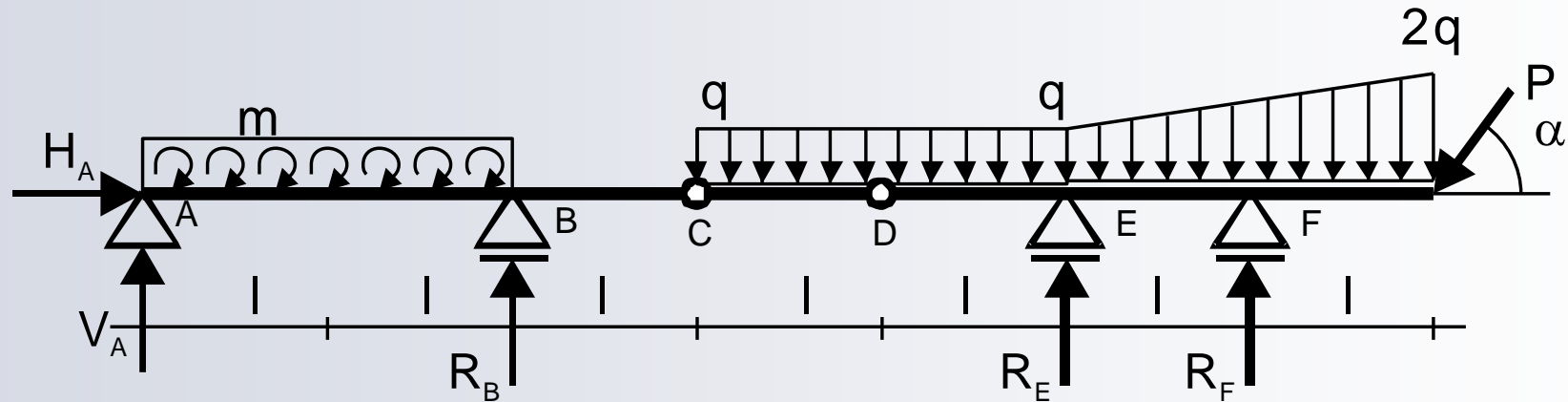


$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M_A = 0$$



$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M_D = 0$$

Reakcje – belki przegubowe (3)



$$\sum X : H_A - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_E + R_F - q \cdot 4l - \frac{1}{2}q \cdot 2l - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_E \cdot 5l + R_F \cdot 6l - m \cdot 2l - q \cdot 4l \cdot 5l - \frac{1}{2}q \cdot 2l \cdot \left(5l + \frac{2}{3}2l\right) - P \sin \alpha \cdot 7l = 0$$

$$\sum M_C^l : V_A \cdot 3l + R_B \cdot l + m \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_D^p : R_E \cdot l + R_F \cdot 2l - q \cdot 3l \cdot 1,5l - \frac{1}{2}q \cdot 2l \cdot \left(l + \frac{2}{3}2l\right) - P \sin \alpha \cdot 3l = 0$$

Sąsiadujące przeguby – łatwość rozwiązania

- Równania względem sąsiadujących przegubów lepiej zapisać z tej samej strony.

$$\sum X : H_A - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_E + R_F - q \cdot 4l - \frac{1}{2}q \cdot 2l - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_E \cdot 5l + R_F \cdot 6l - m \cdot 2l - q \cdot 4l \cdot 5l - \frac{1}{2}q \cdot 2l \cdot \left(5l + \frac{2}{3}2l\right) - P \sin \alpha \cdot 7l = 0$$

$$\sum M_C^l : V_A \cdot 3l + R_B \cdot l + m \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_D^p : R_E \cdot l + R_F \cdot 2l - q \cdot 3l \cdot 1,5l - \frac{1}{2}q \cdot 2l \cdot \left(l + \frac{2}{3}2l\right) - P \sin \alpha \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_D^l : V_A \cdot 4l + R_B \cdot 2l + m \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2}l = 0$$

Rozwiązanie

$$P = 10kN$$

$$q = 5kN / m$$

$$m = 5kNm / m$$

$$l = 1m$$

$$H_A = 5kN$$

$$V_A = -6,25kN$$

$$R_B = 8,75kN$$

$$R_E = 2,173kN$$

$$R_F = 28,987kN$$

Zasady pisania dodatkowych równań dla przegubów (1)

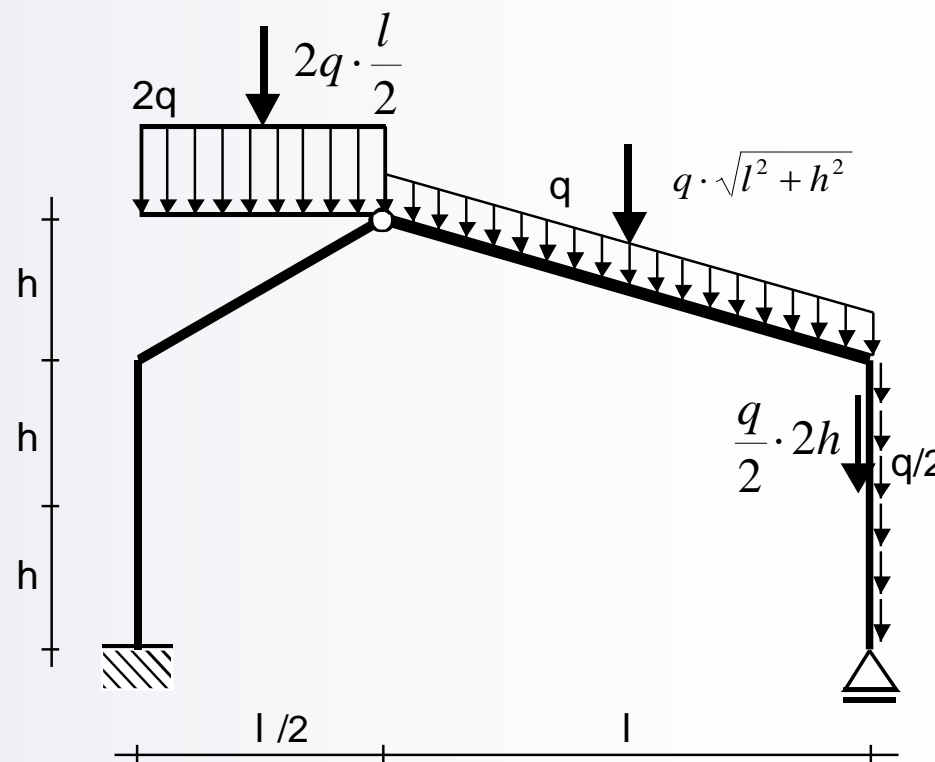
- Dodatkowe równanie względem przegubu musi wykorzystywać własność przegubu, tj. że moment w przegubie równy jest 0, a więc dodatkowe równanie nie może być zwykłą sumą momentów względem przegubu, a musi być sumą momentów od sił z jednej strony przegubu.

Zasady pisania dodatkowych równań dla przegubów (2)

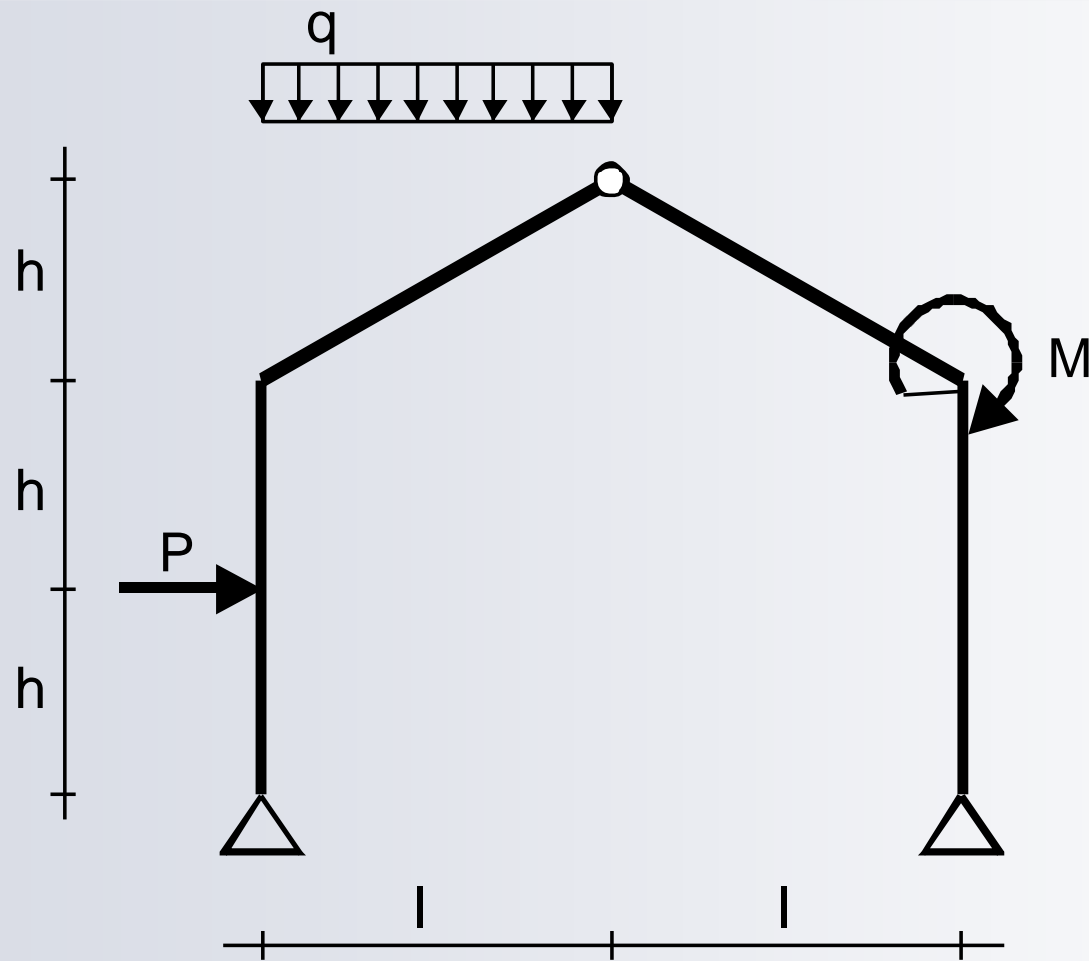
- Każdy przegub musi zostać wykorzystany co najmniej jeden raz.
- Jeżeli chcemy zapisać równanie dla przegubu z drugiej strony, to zastępuje ono jedno z równań podstawowych (sumę momentów względem dowolnego punktu).

Inne rodzaje obciążeń

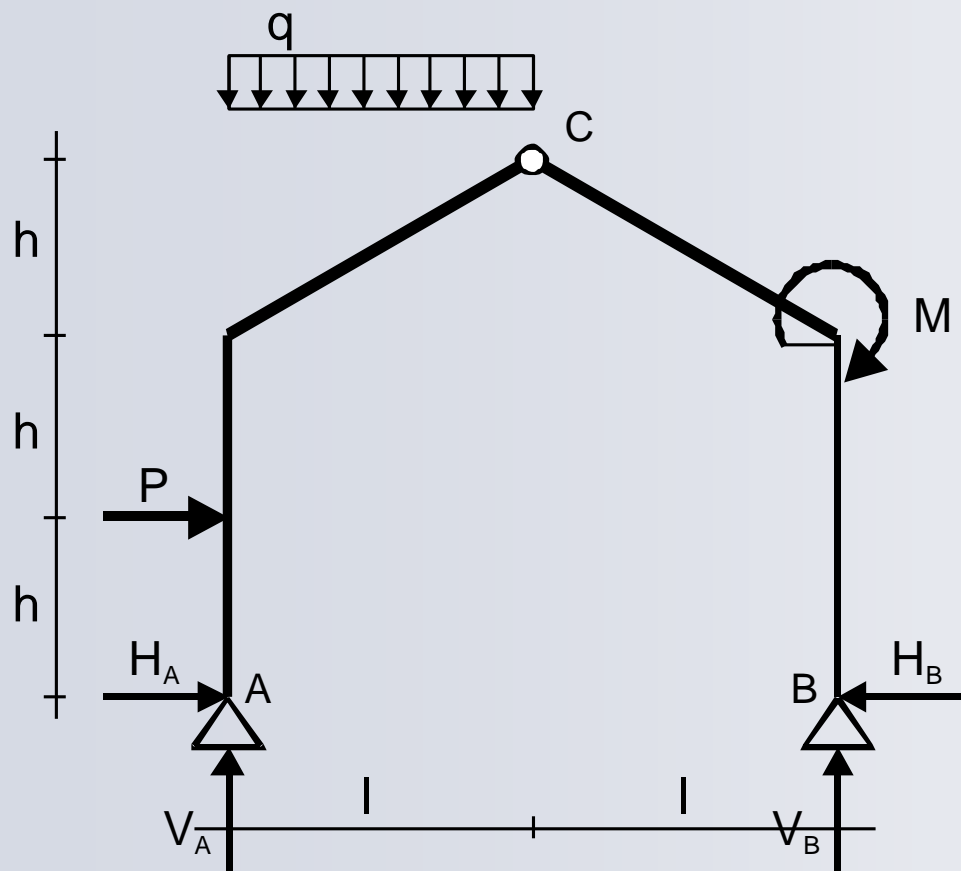
- Obciążenie osiowe rozłożone wzdłuż pręta.
- Obciążenie pionowe na pręcie ukośnym:
 - intensywność na jednostkę rzutu;
 - intensywność na jednostkę długości pręta.



Reakcje – rama trójprzegubowa ⁽¹⁾



Reakcje – rama trójprzegubowa (2)



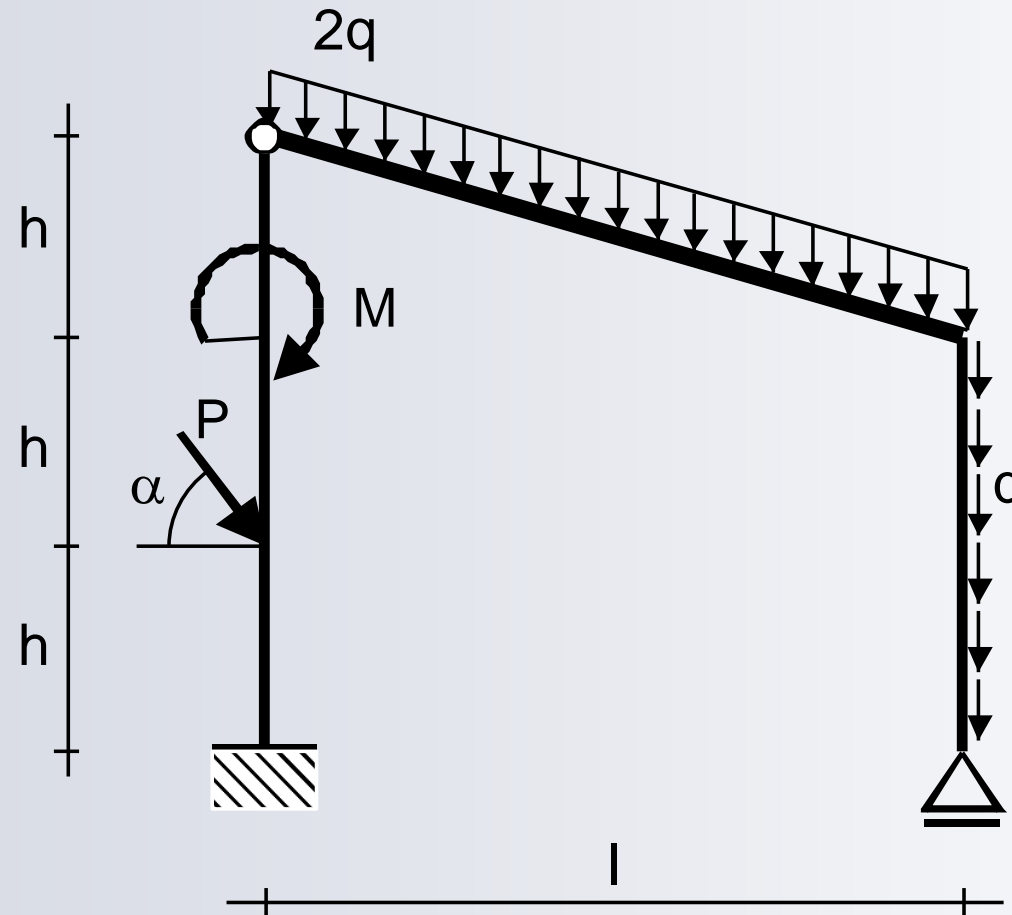
$$\sum X: H_A - H_B + P = 0$$

$$\sum Y: V_A + V_B - q \cdot l = 0$$

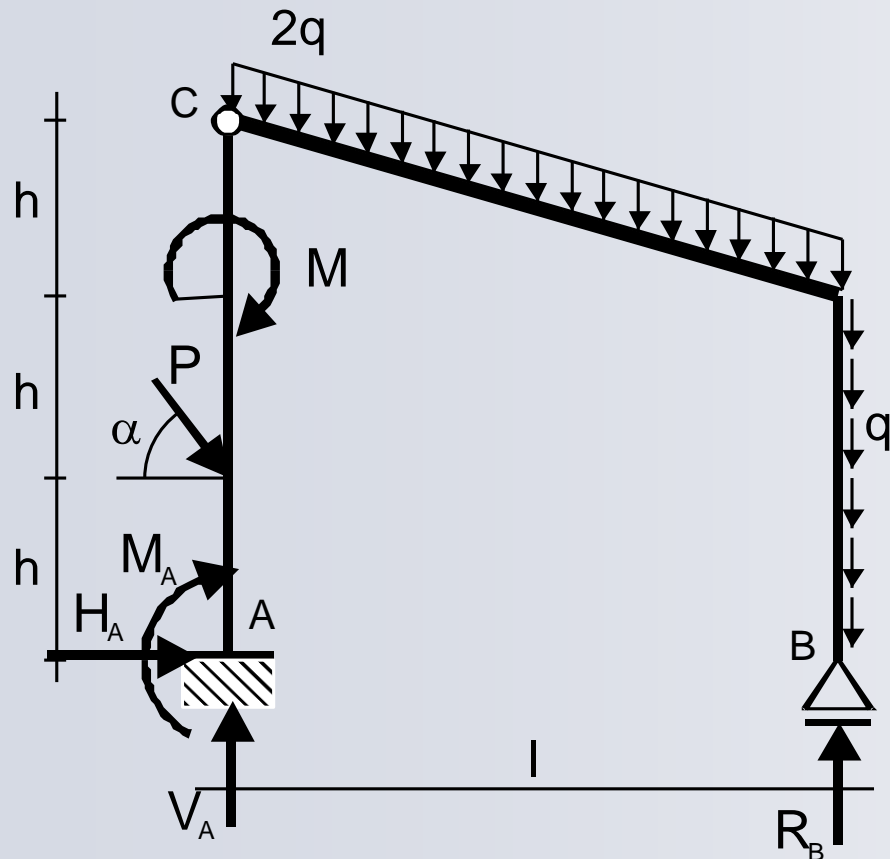
$$\sum M_B: V_A \cdot 2l + P \cdot h - q \cdot l \cdot \left(l + \frac{1}{2}l \right) + M = 0$$

$$\sum M_C^p: V_B \cdot l - H_B \cdot 3h - M = 0$$

Reakcje – rama przegubowa (1)



Reakcje – rama przegubowa (2)



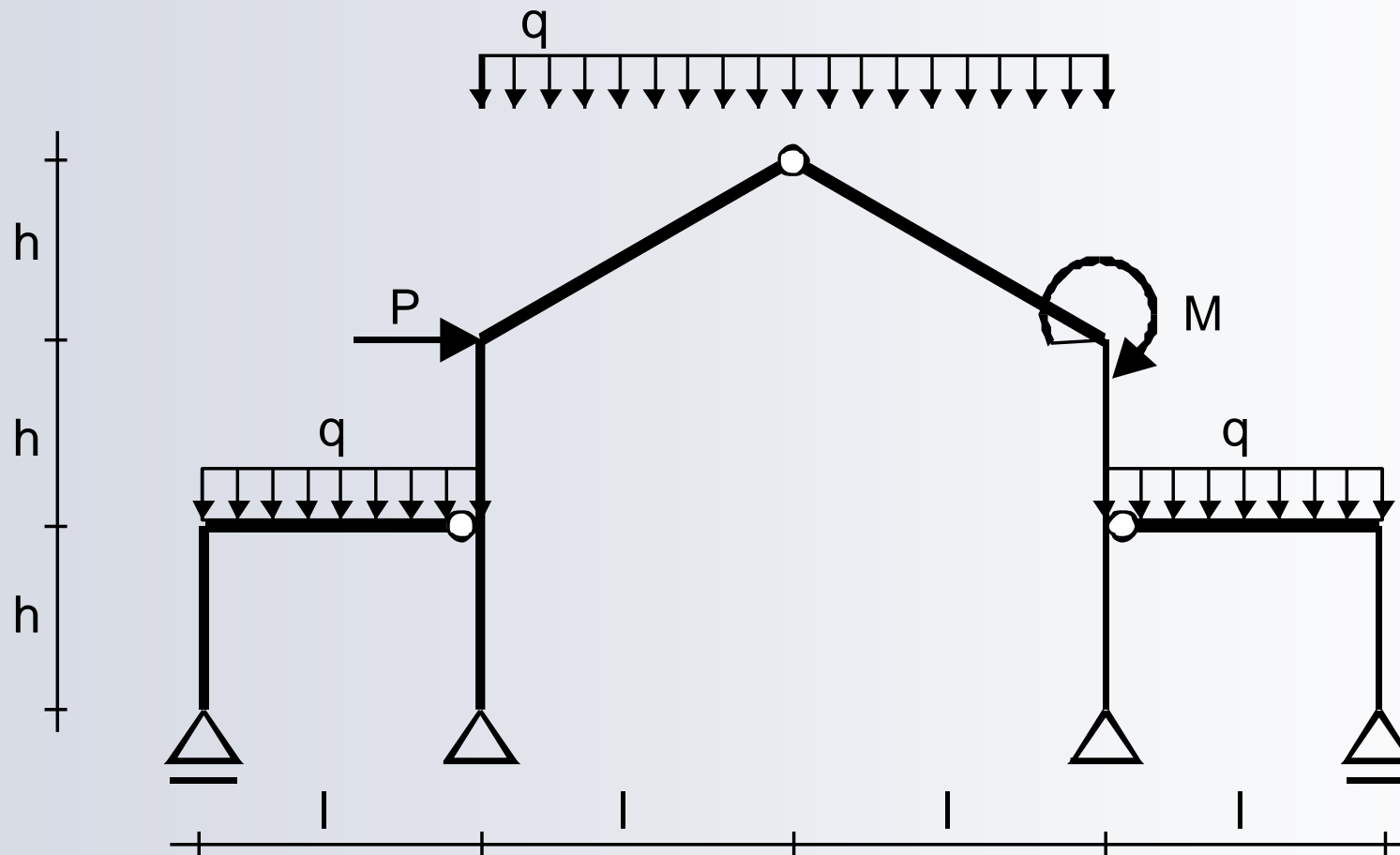
$$\sum X: H_A + P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y: V_A + R_B - P \sin \alpha - 2q \cdot \sqrt{l^2 + h^2} - q \cdot 2h = 0$$

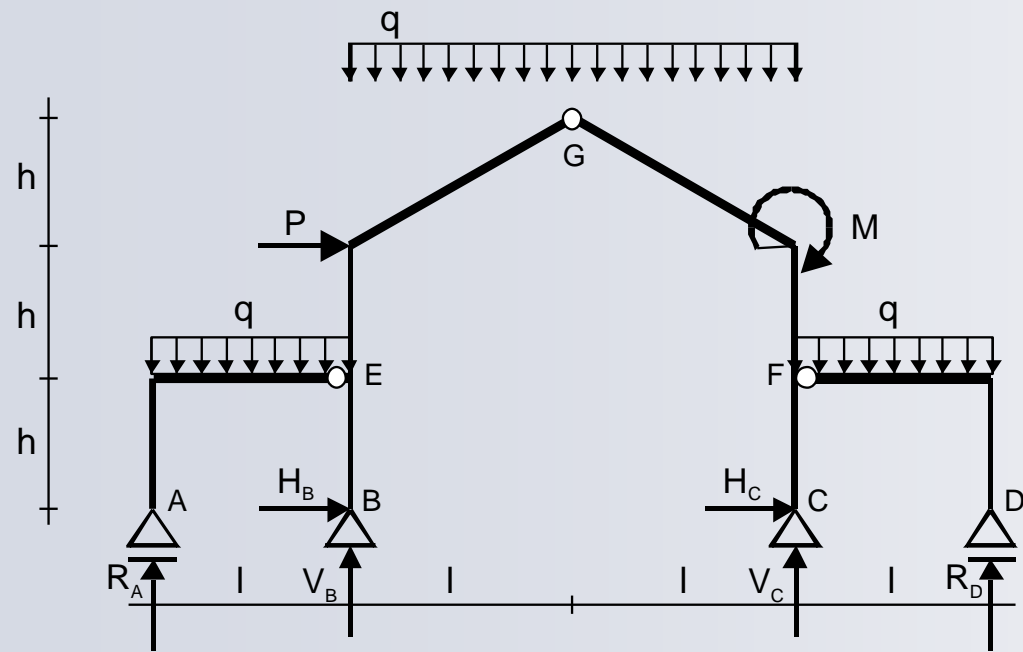
$$\sum M_A: M_A + P \cdot \cos \alpha \cdot h + M + 2q \cdot \sqrt{l^2 + h^2} \cdot \frac{l}{2} + q \cdot 2h \cdot l - R_B \cdot l = 0$$

$$\sum M_C^p: R_B \cdot l - q \cdot 2h \cdot l - 2q \cdot \sqrt{l^2 + h^2} \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Rama nawowa



Rama nawowa – równania równowagi



$$\sum X: H_B + H_C + P = 0$$

$$\sum Y: R_A + V_B + V_C + R_D - q \cdot l - q \cdot 2l - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_A: V_B \cdot l + V_C \cdot 3l + R_D \cdot 4l - P \cdot 2h - M +$$

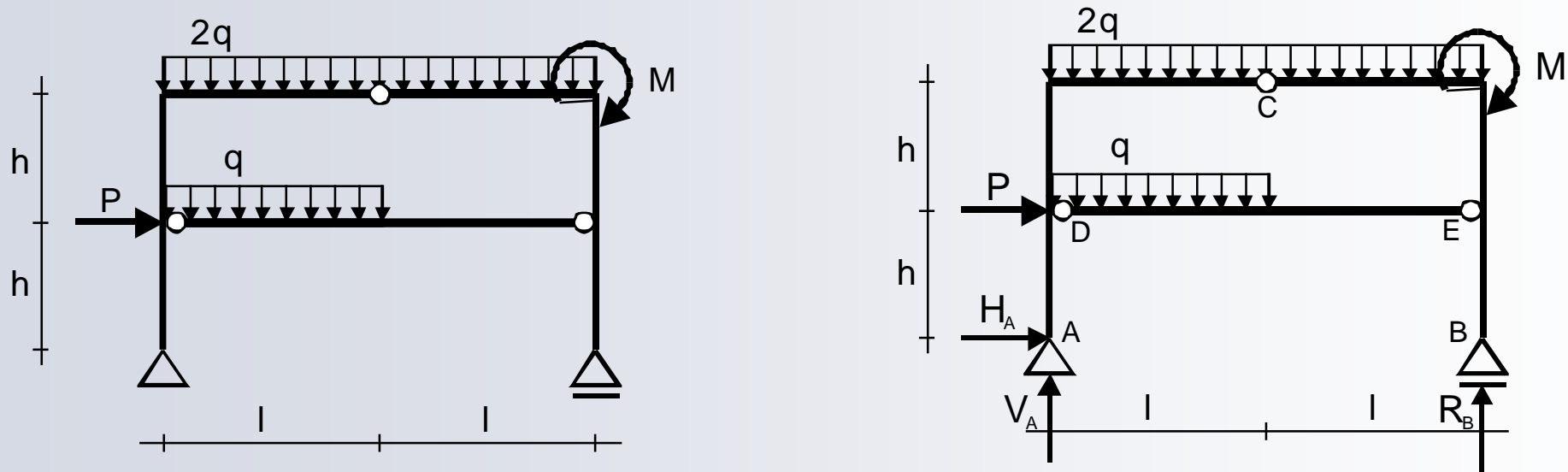
$$-q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - q \cdot 2l \cdot 2l - q \cdot l \cdot 3,5l = 0$$

$$\sum M_G^p: V_C \cdot l + H_C \cdot 3h + R_D \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - M - q \cdot l \cdot 1,5l = 0$$

$$\sum M_E^l: R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\sum M_F^p: R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Rama ze ściągiem – reakcje podporowe (3 niewiadome)

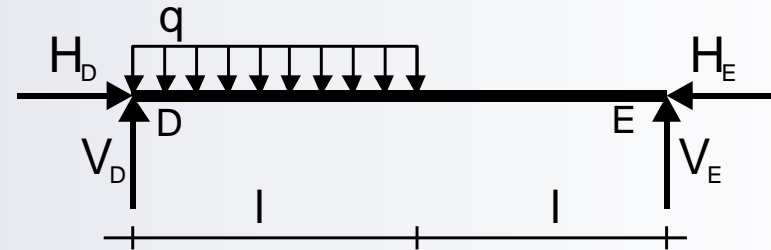
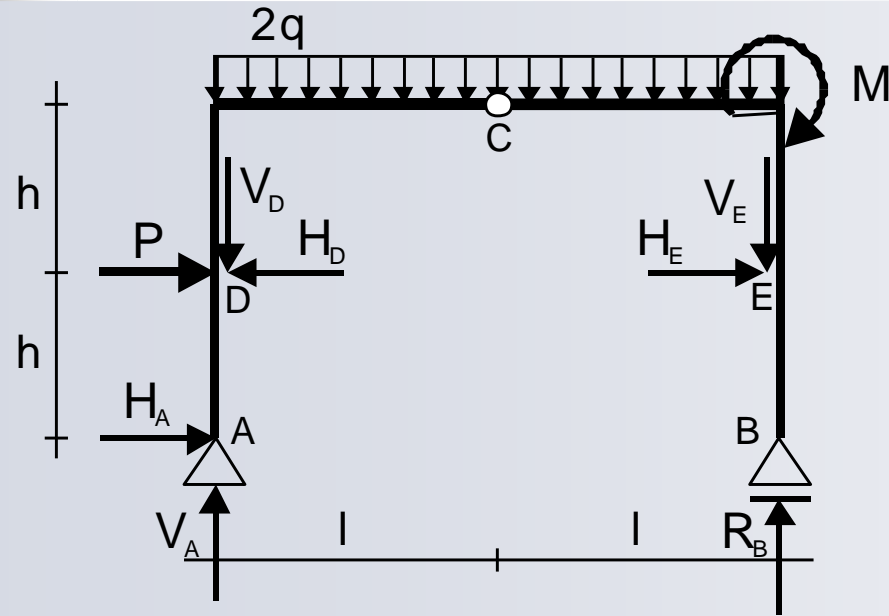


$$\sum X : H_A + P = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - q \cdot l - 2q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - P \cdot h - M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - 2q \cdot 2l \cdot l = 0$$

Siły w ściągu – cztery dodatkowe równania



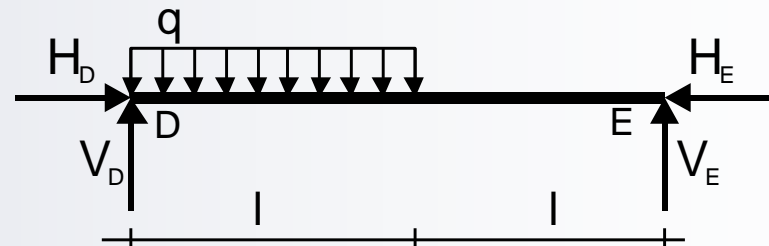
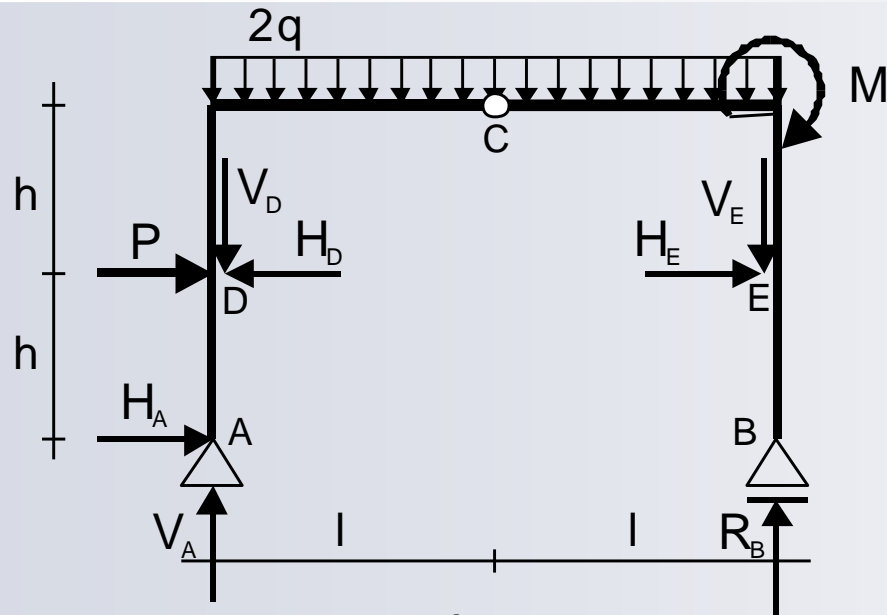
$$\sum M_C^P : V_E \cdot l - H_E \cdot h - R_B \cdot l + M + 2q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\sum X : H_D - H_E = 0$$

$$\sum Y : V_D + V_E - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_D : V_E \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

Rama ze ściągiem – 7 niewiadomych



$$\sum X : H_A - H_D + H_E + P = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - V_D - V_E - 2q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - P \cdot h - M - 2q \cdot 2l \cdot l - V_E \cdot 2l - H_E \cdot h + H_D \cdot h = 0$$

$$\sum M_C^P : V_E \cdot l - H_E \cdot h - R_B \cdot l + M + 2q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

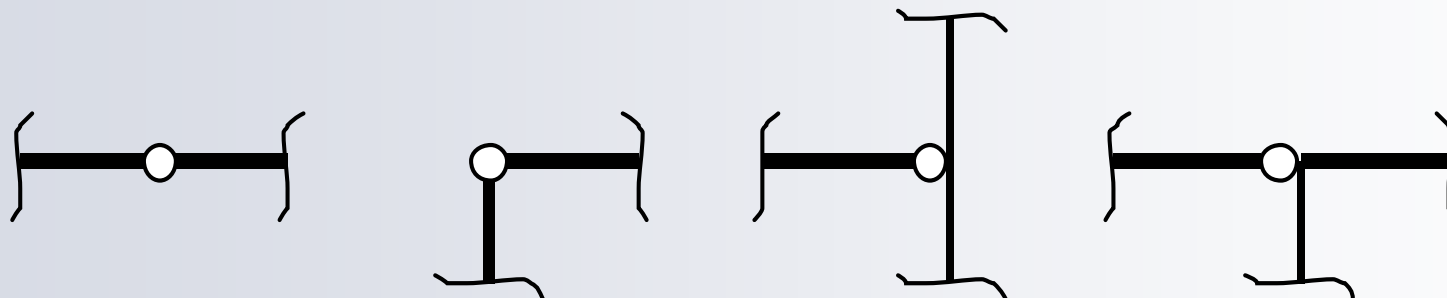
$$\sum X : H_D - H_E = 0$$

$$\sum Y : V_D + V_E - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_D : V_E \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

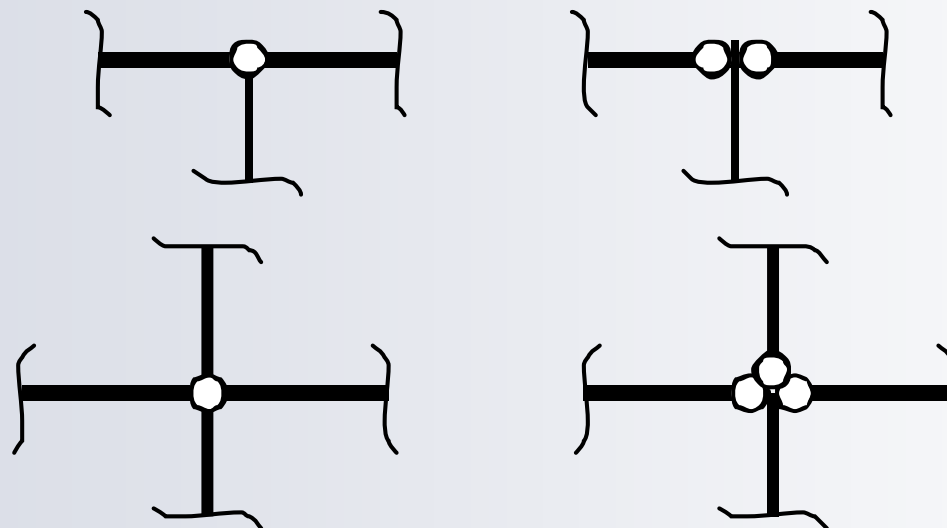
Przeguby pojedyncze

- Przeguby, w których jeden pręt łączy się z drugim ze swobodą obrotu.
- Pozwala na zapisanie jednego dodatkowego równania (sumy momentów względem przegubu od sił na jednej części konstrukcji oddzielonej przegubem).

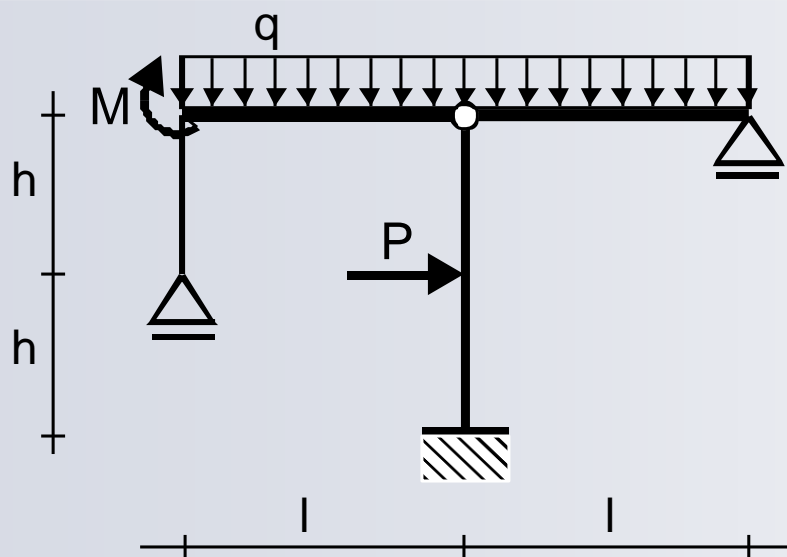


Przeguby wielokrotne

- Przeguby, w których łączą się ze sobą więcej niż dwa pręty ze swobodą obrotu względem pozostałych prętów.
- Pozwalają na zapisanie więcej niż jednego dodatkowego równania równowagi.



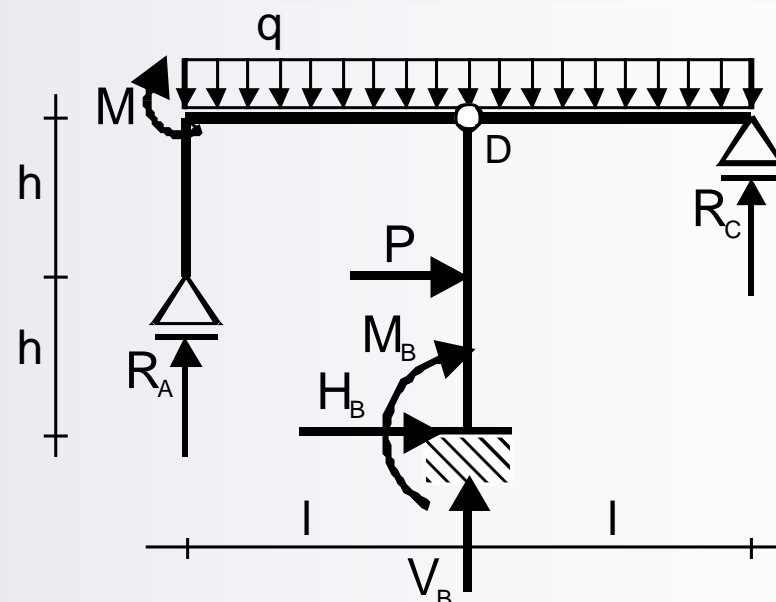
Rama z przegubem dwukrotnym



$$\sum X : H_B + P = 0$$

$$\sum Y : R_A + V_B + R_C - q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_B : R_A \cdot l + M_B - R_C \cdot l + M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + P \cdot h = 0$$



$$\sum M_D^P : R_C \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\sum M_D^l : R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M = 0$$

Stopień statycznej wyznaczalności

- Stopień zewnętrznej statycznej wyznaczalności n :
 - Belka: $n = r - g - rs$;
 - Rama: $n = r + 3o - g - rs$;
 - Kratownica: $n = r - rs$ lub $n = r + p - 2w$.
- Oznaczenia:
 - r – liczba reakcji;
 - g – liczba przegubów pojedynczych;
 - o – liczba pól zamkniętych;
 - $rs = 3$ – liczba równań statyki;
 - p – liczba prętów;
 - w – liczba węzłów.

Stopień statycznej wyznaczalności

- Określenie stopnia statycznej wyznaczalności odnośnie do reakcji:
 - Układ może być **statycznie wyznaczalny**, jeżeli $n = 0$;
 - Układ może być **statycznie niewyznaczalny**, jeżeli $n > 0$;
 - Układ jest **geometrycznie zmienny**, jeżeli $n < 0$.

Sposób podparcia a statyczna wyznaczalność

- Nie zawsze stopień statycznej wyznaczalności $n = 0$ gwarantuje statyczną wyznaczalność.
- Niewłaściwe rozmieszczenie podpór może powodować, że układ będzie geometrycznie zmienny (np. reakcje równoległe – płaszczyzna przesuwu) lub chwilowo geometrycznie zmienny (reakcje przecinające się w jednym punkcie – chwilowy środek obrotu).

Układy geometrycznie zmienne (przykłady) (1)

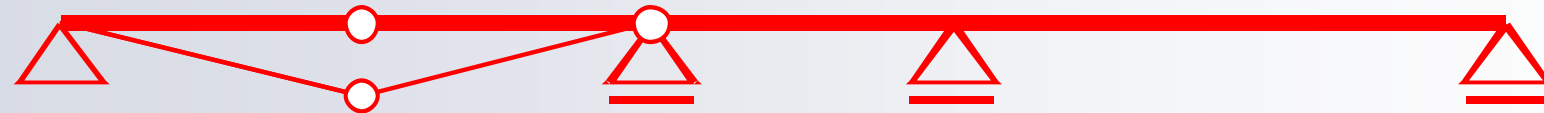
- Niedostateczna liczba podpór.



- Belka na trzech podporach przesuwnych.



- Trzy niepodparte przeguby obok siebie.



Układy geometrycznie zmienne (przykłady) (2)

- Belka z niepodpartym przęsłem przegubowym.



- Trzy reakcje kratownicy przecinające się w jednym punkcie.

