

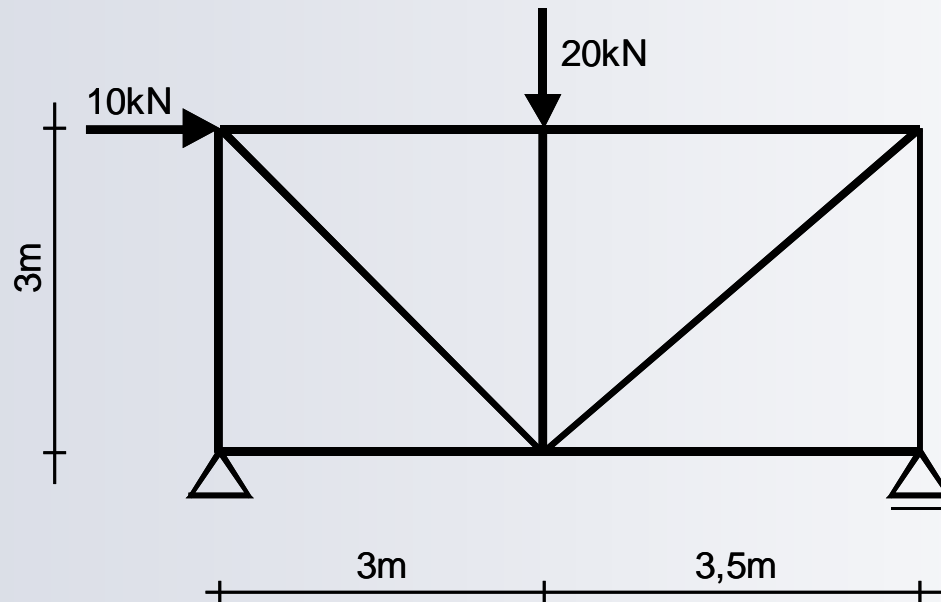
Mechanika teoretyczna

Wykład nr 3

**Obliczanie sił wewnętrznych
w układach prętowych - kratownice.**

Kratownica

- Układ prętów prostoliniowych, pryzmatycznych, jednorodnych:
 - połączenia przegubowe w węzłach;
 - obciążenia w postaci sił skupionych przyłożonych w węzłach.

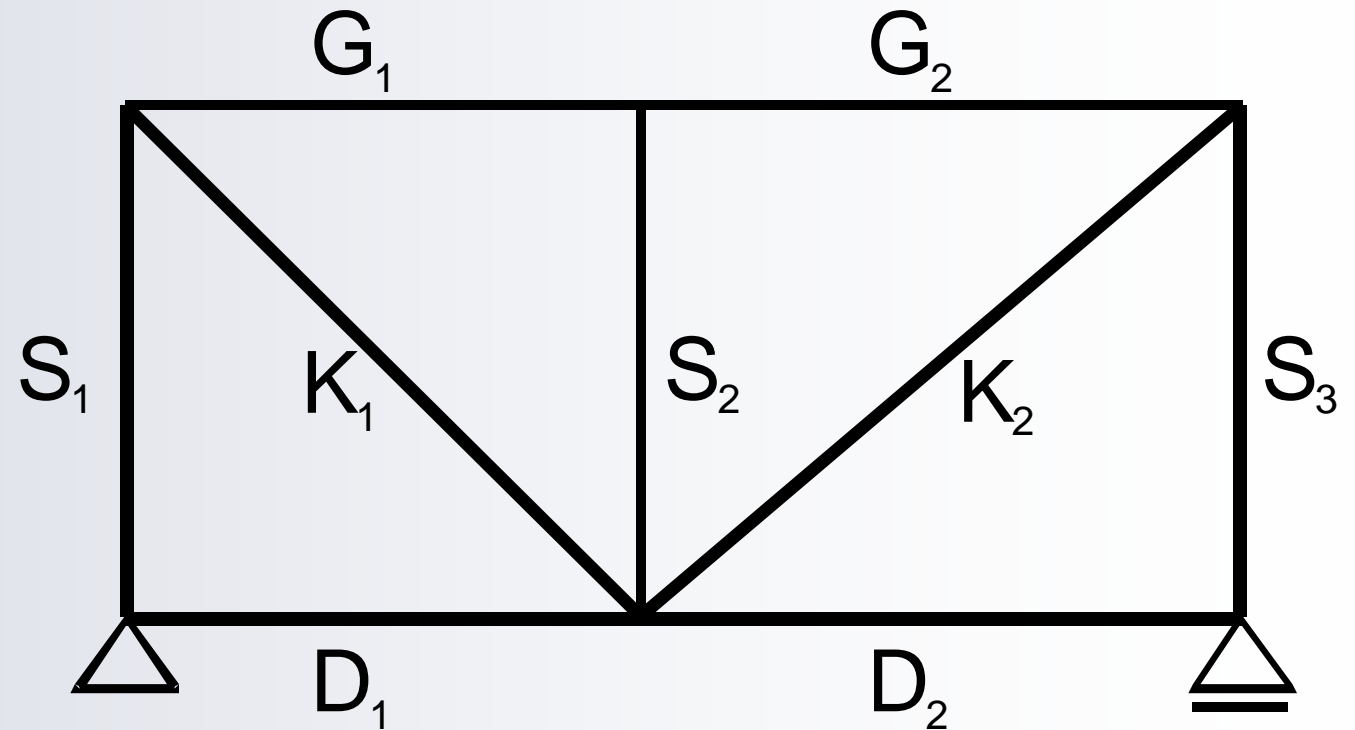


Konsekwencje

- Węzeł doznaje przesuwu (dwie składowe), obrót jest nieistotny.
- W prętach dwustronnie przegubowych, nieobciążonych poprzecznie na długości, jedyna siła wewnętrzna to **normalna** (siła osiowa).

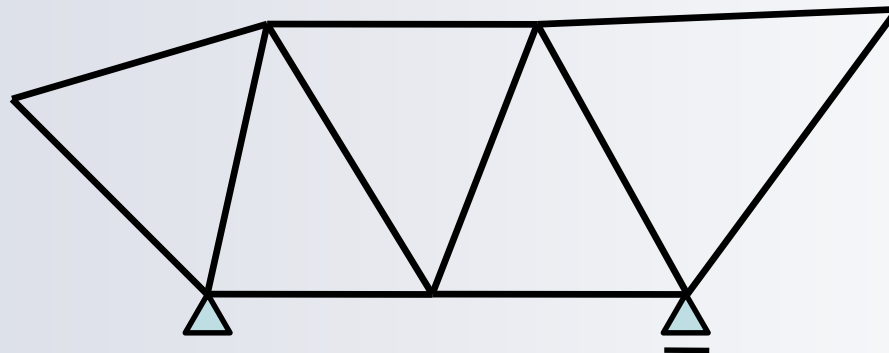
Nazwy prętów

- Pas dolny (D)
- Pas górny (G)
- Krzyżulce (K)
- Słupki (S)



Statyczna wyznaczalność

- Najprostsza kratownica złożona z trzech prętów połączonych przegubowo tworzy tarczę sztywną i jest statycznie wyznaczalna.
- Każda kratownica budowana przez dostawianie pól zamkniętych tworzonych za pomocą kolejnych dwóch prętów jest statycznie wyznaczalna.



Stopień statycznej wyznaczalności

- Statyczna wyznaczalność:
 - zewnętrzna – możliwość policzenia reakcji:

$$n_z = r - 3$$

- wewnętrzna – możliwość policzenia sił w prętach:

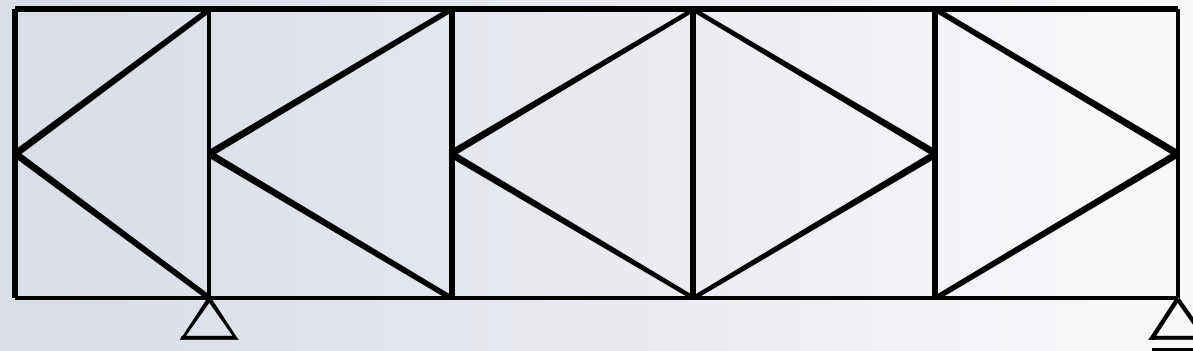
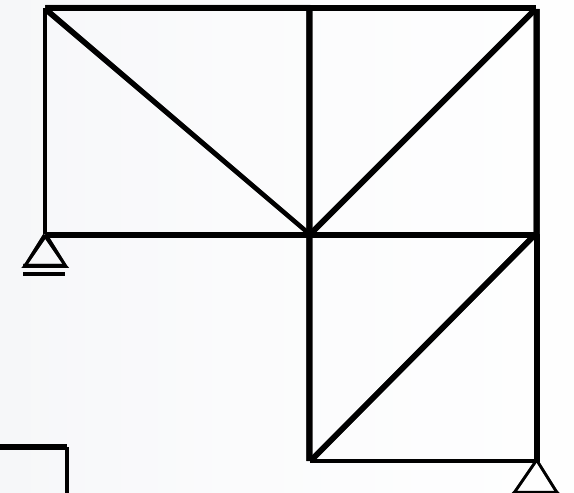
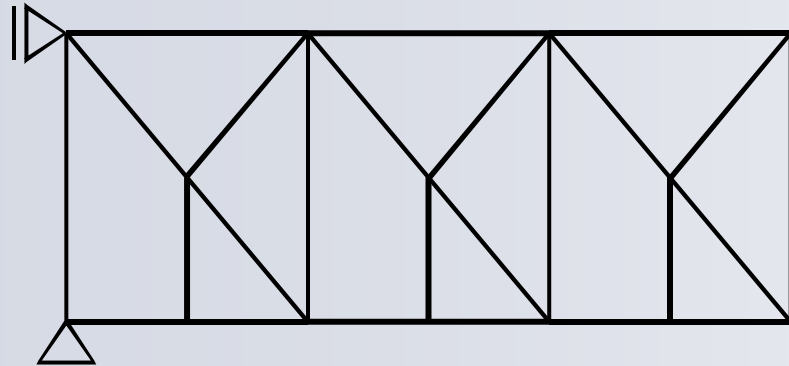
$$n_w = p - 2 \cdot w + 3$$

- całkowita:

$$n = r + p - 2 \cdot w$$

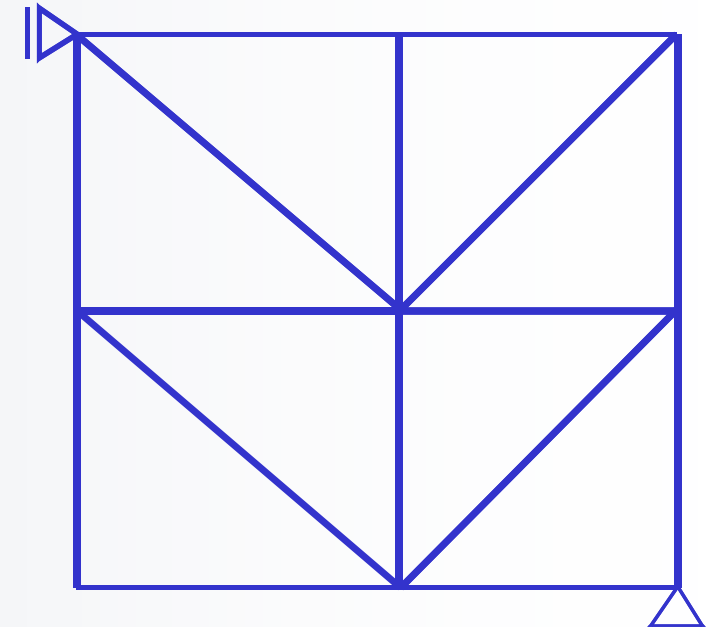
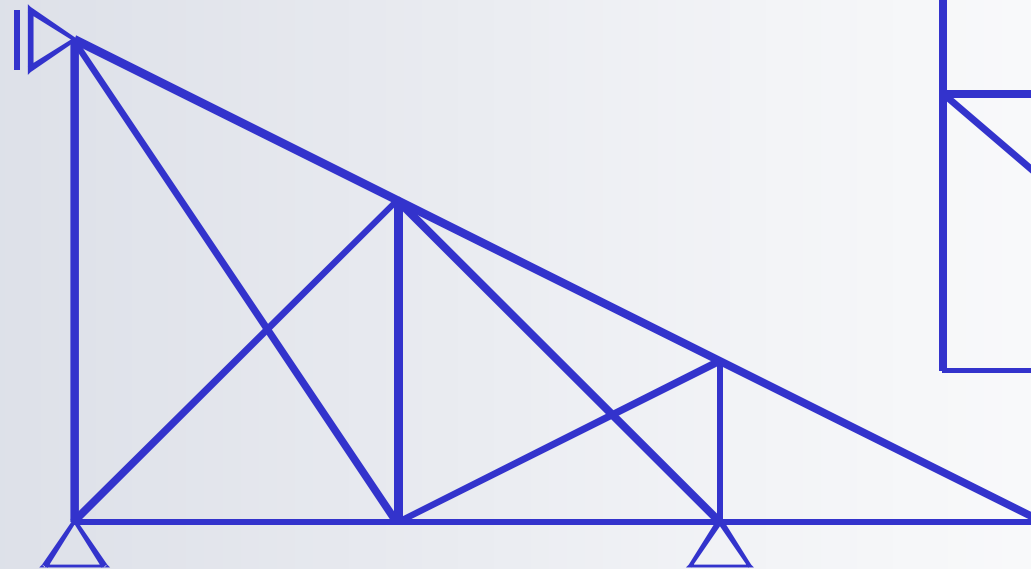
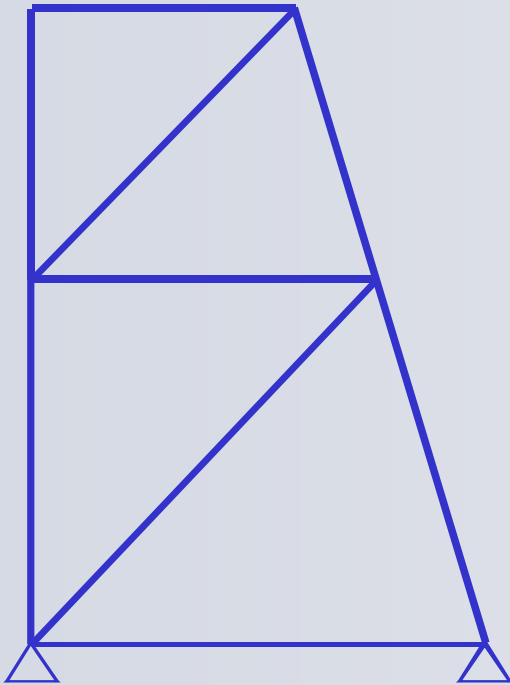
Przykłady ⁽¹⁾

- Kratownice statycznie wyznaczalne



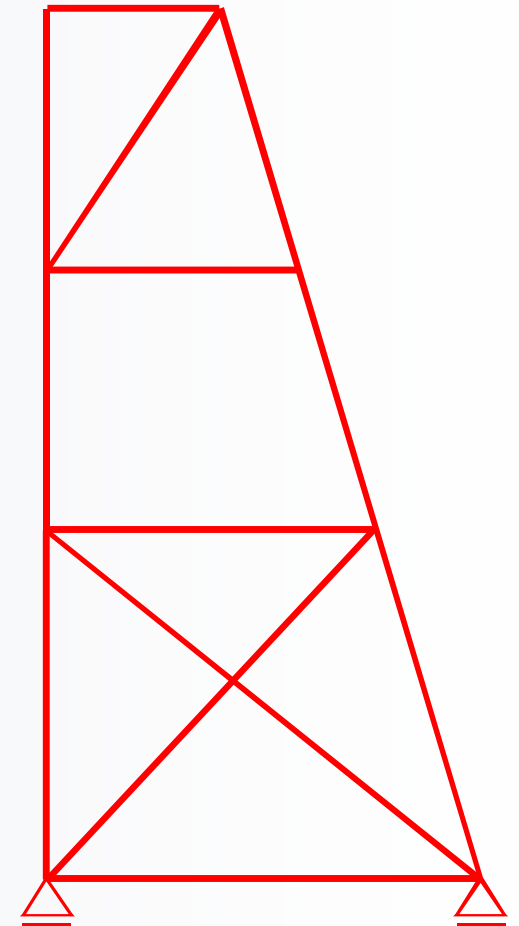
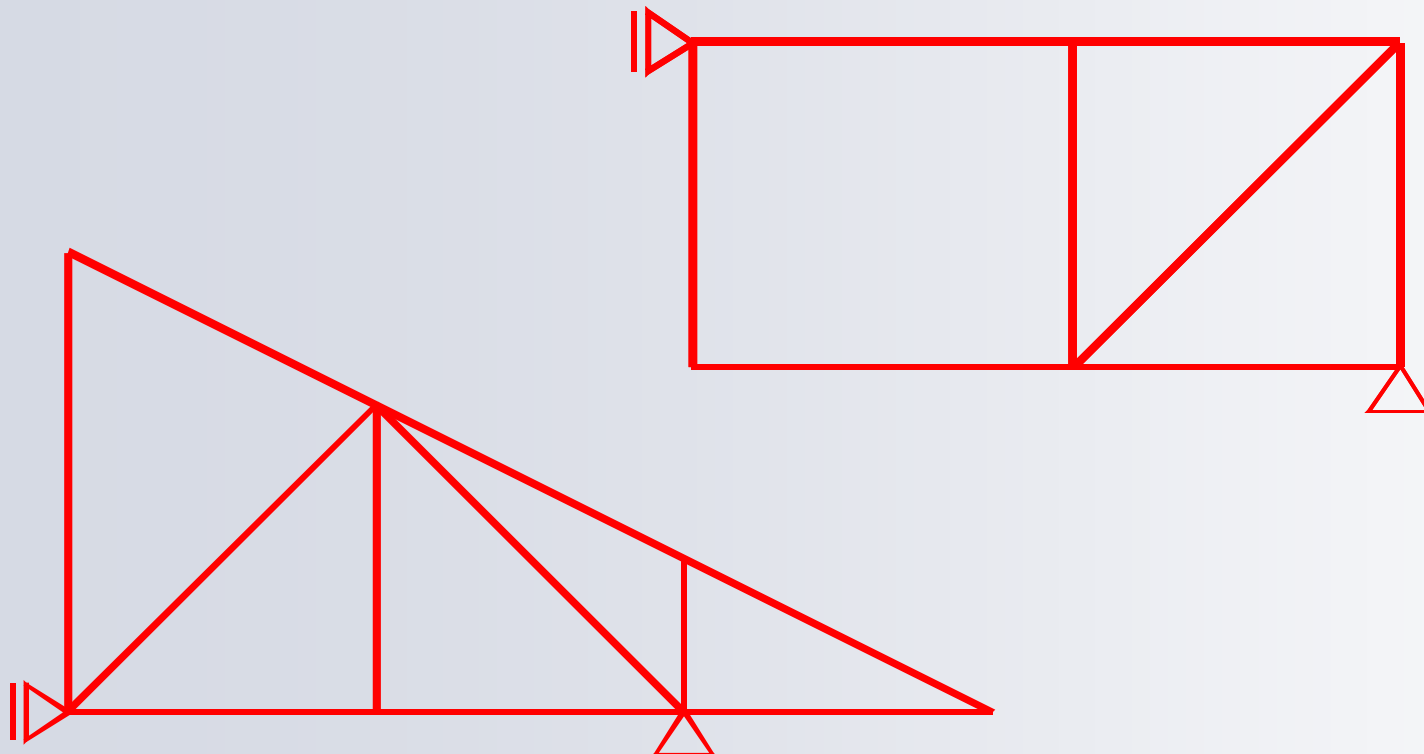
Przykłady ⁽²⁾

- Kratownice statycznie niewyznaczalne



Przykłady ⁽³⁾

- Kratownice geometrycznie zmienne

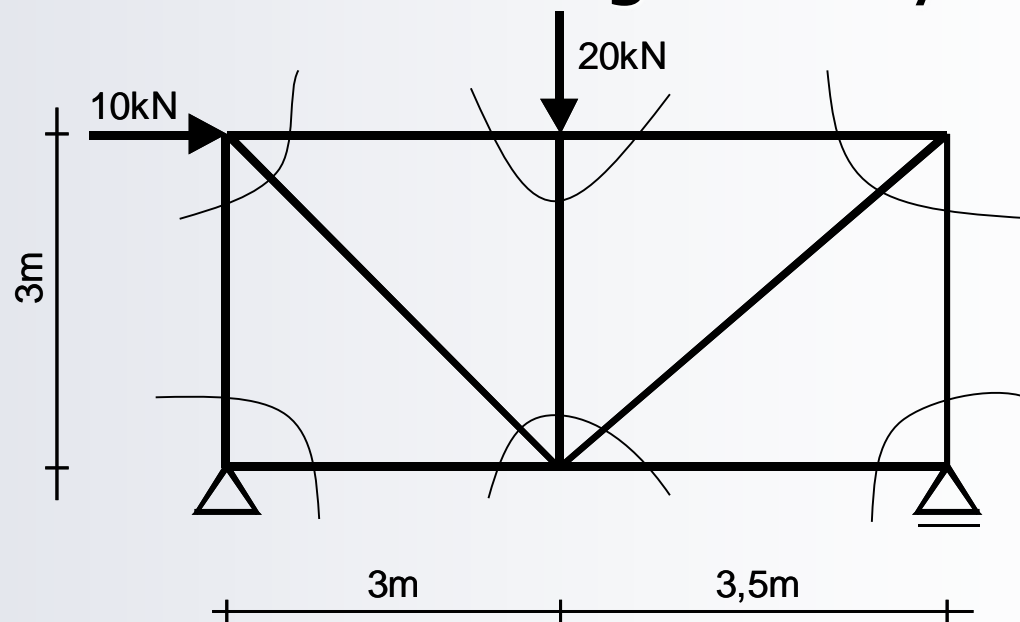
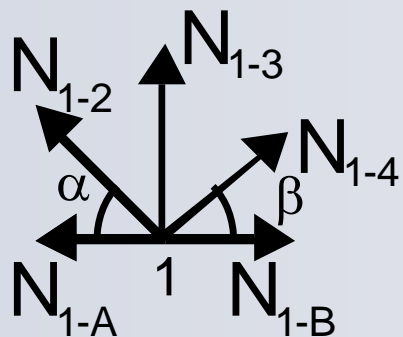


Metody rozwiązywania

- Metoda równoważenia węzłów.
- Metoda Rittera.
- Inne:
 - wykreślna metoda Cremony;
 - metoda Culmana;
 - metoda Hanneberga (wymiany prętów).

Metoda równoważenia węzłów

- Każdy z węzłów oddzielony zostaje od prętów za pomocą przekroju przywęzłowego.
- W węzłach otrzymuje się układy sił zbieżnych, w których można zapisać dwa równania równowagi – sumy rzutów sił na dwie osie.

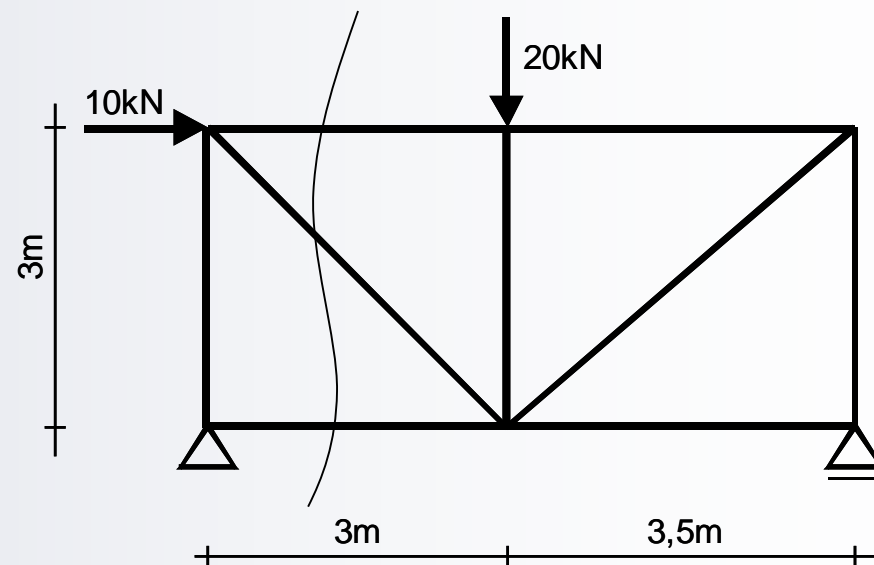
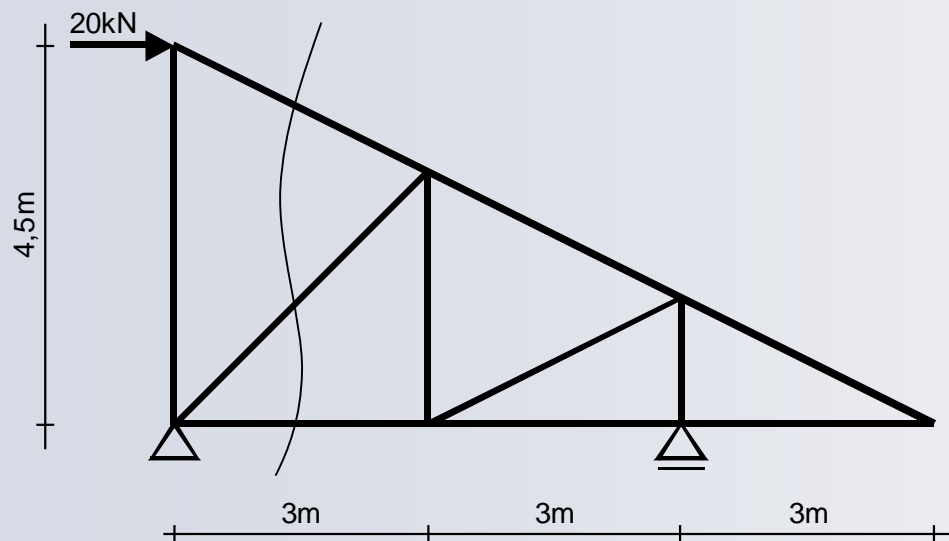


Zalety i wady metody równoważenia węzłów

- Zalety:
 - łatwość zapisania równań – sumy rzutów sił;
 - kontrola wyników: ostatnie trzy równania są sprawdzeniami;
- Wady:
 - propagacja błędów;
 - duży nakład pracy wymagany do policzenia siły w wybranym pręcie.

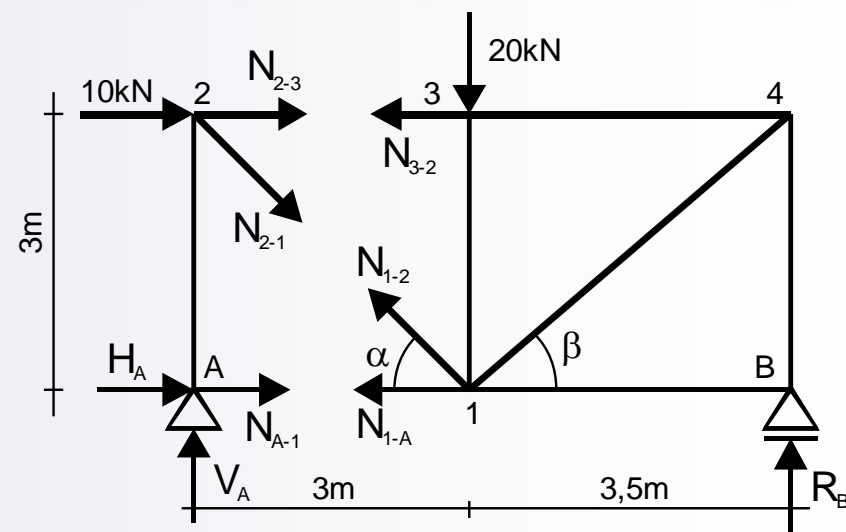
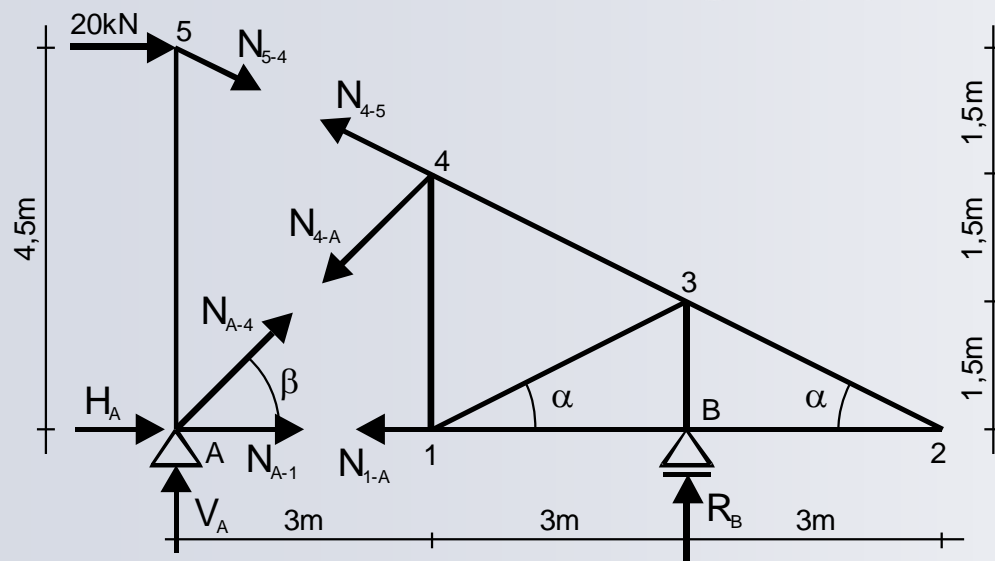
Metoda Rittera (1)

- Kratownicę należy przeciąć przekrojem takim, aby można było zapisać równanie, w którym jedyną niewiadomą będzie szukana siła w pręcie (najczęściej przez 3 pręty, z których osie dwóch przecinają się w jednym punkcie).



Metoda Rittera (2)

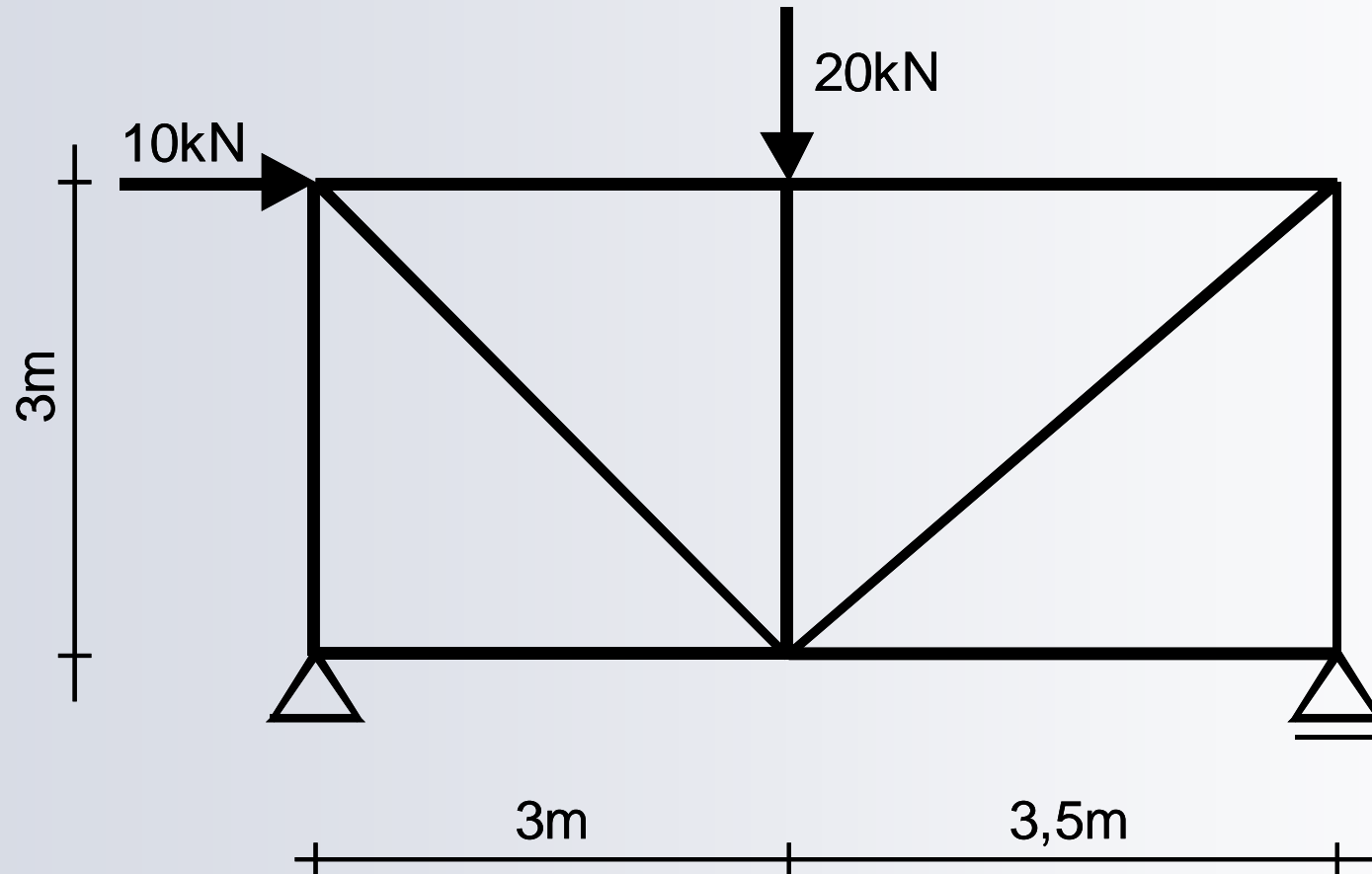
- Otrzymany układ sił jest niezbieżny. Równanie równowagi to zazwyczaj suma momentów względem punktu przecięcia osi pozostałych prętów (czasem suma rzutów sił – gdy pozostałe pręty są równoległe).



Zalety i wady metody Rittera

- Zalety:
 - do znalezienia siły w pręcie potrzebne jest zapisanie i rozwiązanie tylko jednego równania;
 - brak propagacji błędu;
- Wady:
 - konieczność zapisania równań sum momentów;
 - brak kontroli błędów (możliwa np. za pomocą metody równoważenia węzłów).

Przykład A – kratownica z pasami równoległymi

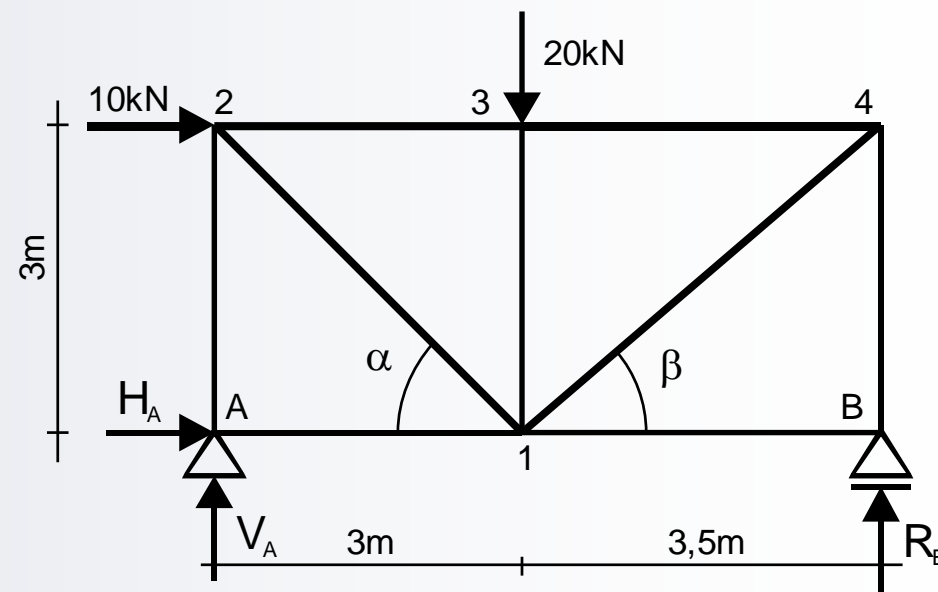


Przykład A – Reakcje

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{3m}{\sqrt{(3m)^2 + (3m)^2}} = 0,707$$

$$\sin \beta = \frac{3m}{\sqrt{(3m)^2 + (3,5m)^2}} = 0,651$$

$$\cos \beta = \frac{3,5m}{\sqrt{(3m)^2 + (3,5m)^2}} = 0,759$$



$$\sum X : H_A + 10kN = 0$$

$$H_A = -10kN$$

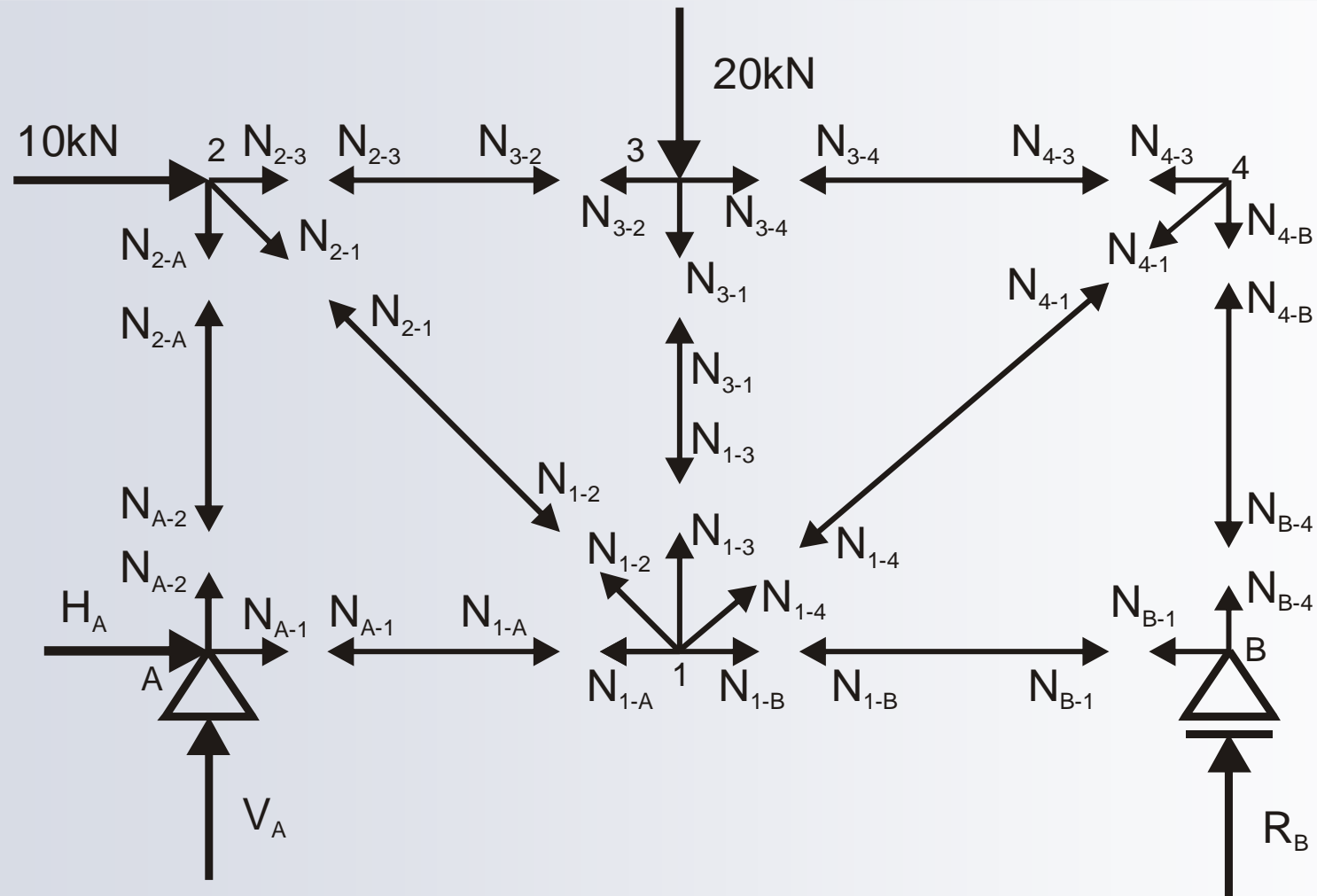
$$\sum Y : V_A + R_B - 20kN = 0$$

$$V_A = 6,154kN$$

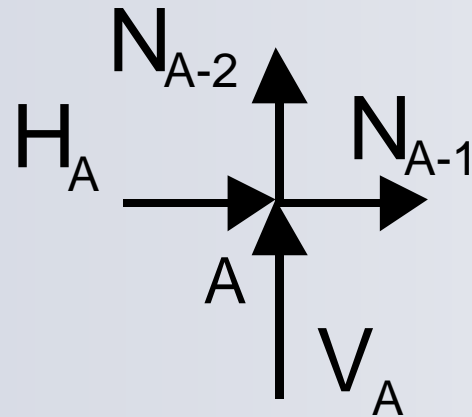
$$\sum M_A : R_B \cdot 6,5m - 10kN \cdot 3m - 20kN \cdot 3m = 0$$

$$R_B = 13,846kN$$

Przykład A – metoda równoważenia węzłów



Węzeł A



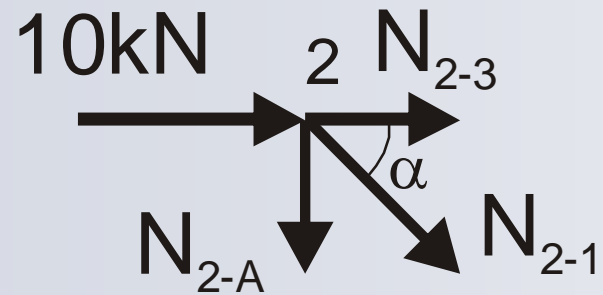
$$\sum X : H_A + N_{A-1} = 0$$

$$N_{A-1} = -H_A = 10kN$$

$$\sum Y : V_A + N_{A-2} = 0$$

$$N_{A-2} = -V_A = -6,154kN$$

Węzeł 2



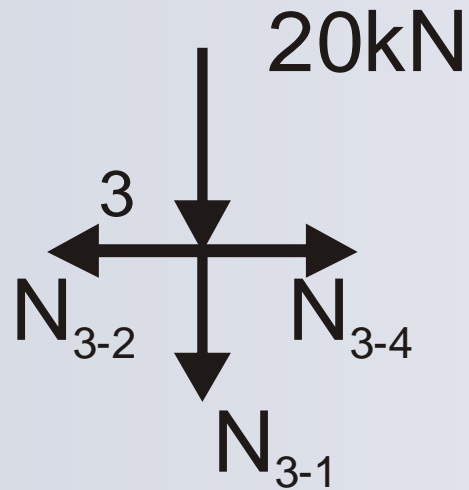
$$\sum Y : N_{2-A} + N_{2-1} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{2-1} = -\frac{N_{2-A}}{0,707} = 8,704kN$$

$$\sum X : N_{2-3} + N_{2-1} \cdot \cos \alpha + 10kN = 0$$

$$N_{2-3} = -10kN - 8,704kN \cdot 0,707 = -16,154kN$$

Węzeł 3



$$\sum Y : N_{3-1} + 20kN = 0$$

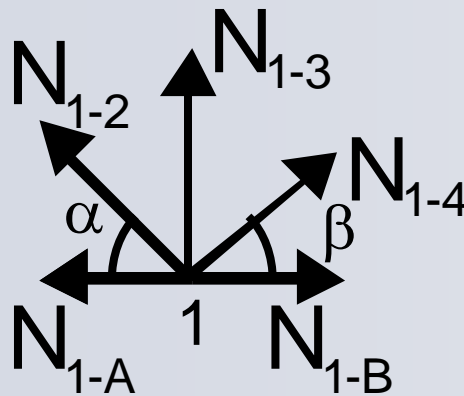
$$N_{3-1} = -20kN$$

$$\sum X : N_{3-2} - N_{3-4} = 0$$

$$N_{3-4} = N_{3-2} = -16,154kN$$

Węzeł 1

$$\sum Y : N_{1-2} \cdot \sin \alpha + N_{1-3} + N_{1-4} \cdot \sin \beta = 0$$

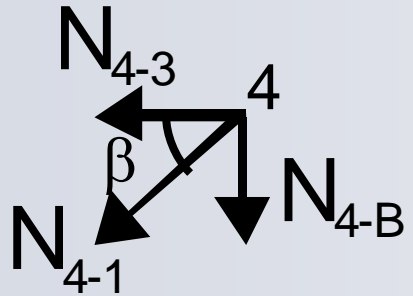


$$N_{1-4} = -\frac{8,704kN \cdot 0,707 - 20kN}{0,651} = 21,269kN$$

$$\sum X : -N_{1-A} - N_{1-2} \cdot \cos \alpha + N_{1-4} \cdot \cos \beta + N_{1-B} = 0$$

$$N_{1-B} = 10kN + 8,704kN \cdot 0,707 - 21,269kN \cdot 0,759 = 0,011kN$$

Węzeł 4



Sprawdzenie:

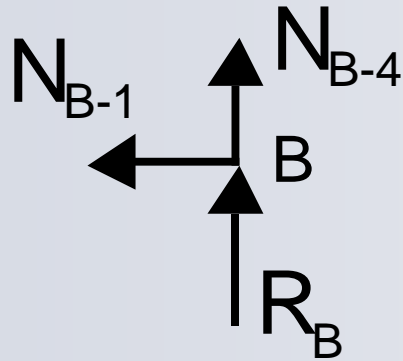
$$\sum X : N_{4-3} + N_{4-1} \cdot \cos \beta = 0$$

$$N_{4-3} + N_{4-1} \cdot 0,759 = -16,154kN + 21,269kN \cdot 0,759 = -0,011kN \approx 0$$

$$\sum Y : N_{4-B} + N_{4-1} \cdot \sin \beta = 0$$

$$N_{4-B} = -21,269kN \cdot 0,651 = -13,846kN$$

Wezeł B



Sprawdzenie:

$$\sum X : N_{B-1} = 0$$

$$N_{B-1} = 0,011kN \approx 0$$

Sprawdzenie:

$$\sum Y : N_{B-4} + R_B = 0$$

$$N_{B-4} + R_B = -13,864 + 13,864 = 0$$

Przykład A – metoda Rittera – przekrój 1 (z lewej)

$$\sum Y^l : V_A - N_{2-1} \cdot \sin \alpha = 0$$

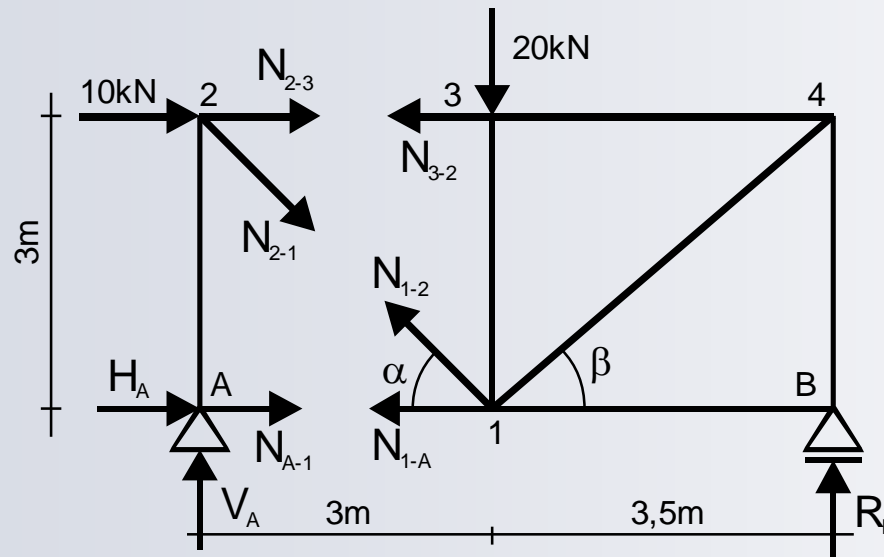
$$N_{2-1} = \frac{6,154kN}{0,707} = 8,704kN$$

$$\sum M_1^l : V_A \cdot 3m + 10kN \cdot 3m + N_{2-3} \cdot 3m = 0$$

$$N_{2-3} = -6,154kN - 10kN = -16,154kN$$

$$\sum M_2^l : H_A \cdot 3m + N_{A-1} \cdot 3m = 0$$

$$N_{A-1} = 10kN$$



Przykład A – metoda Rittera – przekrój 1 (z prawej)

$$\sum Y^P : R_B + N_{1-2} \cdot \sin \alpha - 20kN = 0$$

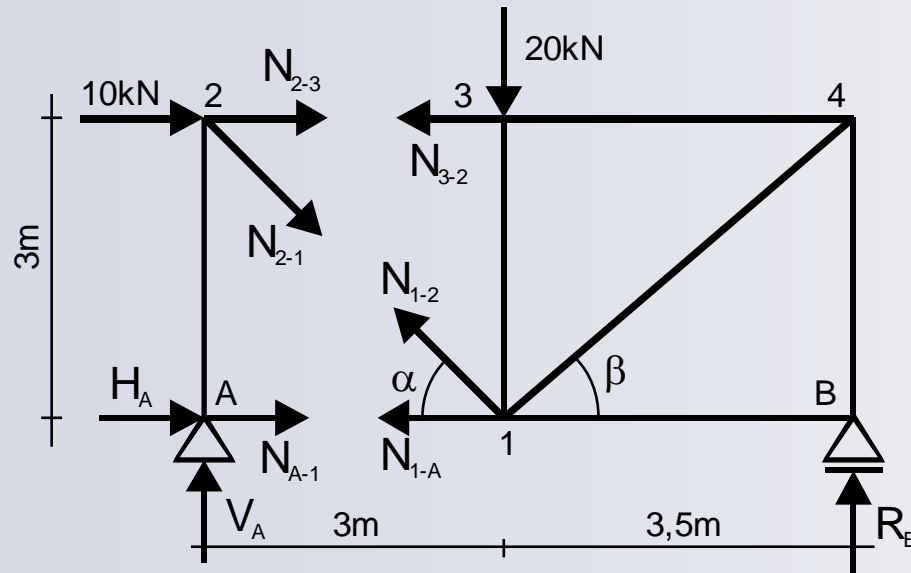
$$\sum M_1^P : R_B \cdot 3,5m + N_{3-2} \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_2^P : R_B \cdot 6,5m - N_{1-A} \cdot 3m - 20kN \cdot 3m = 0$$

$$N_{1-2} = \frac{20kN - 13,846kN}{0,707} = 8,704kN$$

$$N_{3-2} = \frac{-13,846kN \cdot 3,5m}{3m} = -16,154kN$$

$$N_{1-A} = \frac{13,846 \cdot 6,5m - 20kN \cdot 3m}{3m} = 10kN$$



Przykład A – metoda Rittera – przekrój 2

$$\sum Y^P : R_B - N_{4-1} \cdot \sin \beta = 0$$

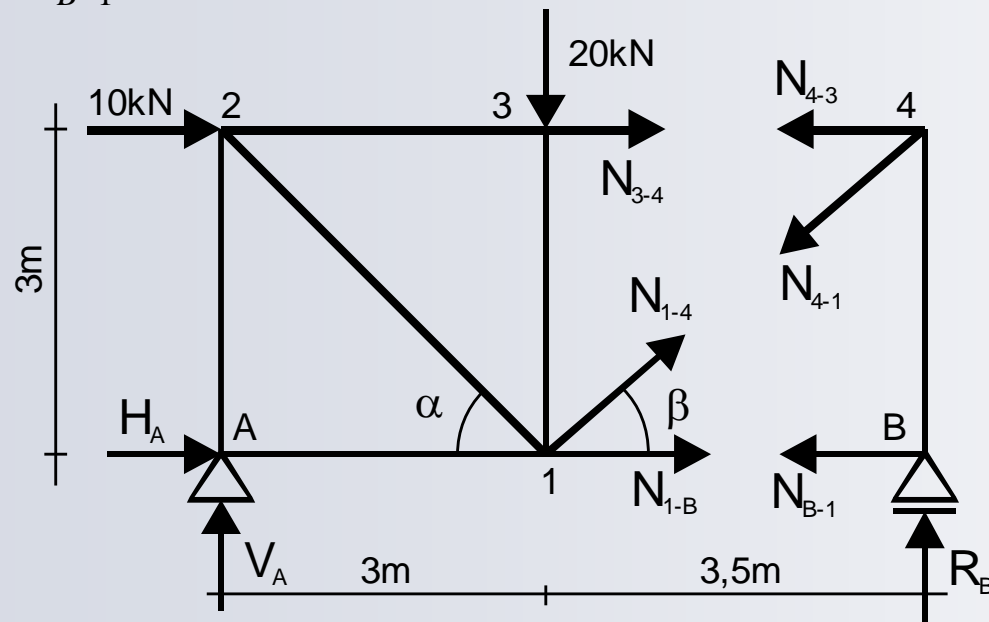
$$\sum M_1^P : R_B \cdot 3,5m + N_{4-3} \cdot 3m = 0$$

$$\sum M_4^P : N_{B-1} \cdot 3m = 0$$

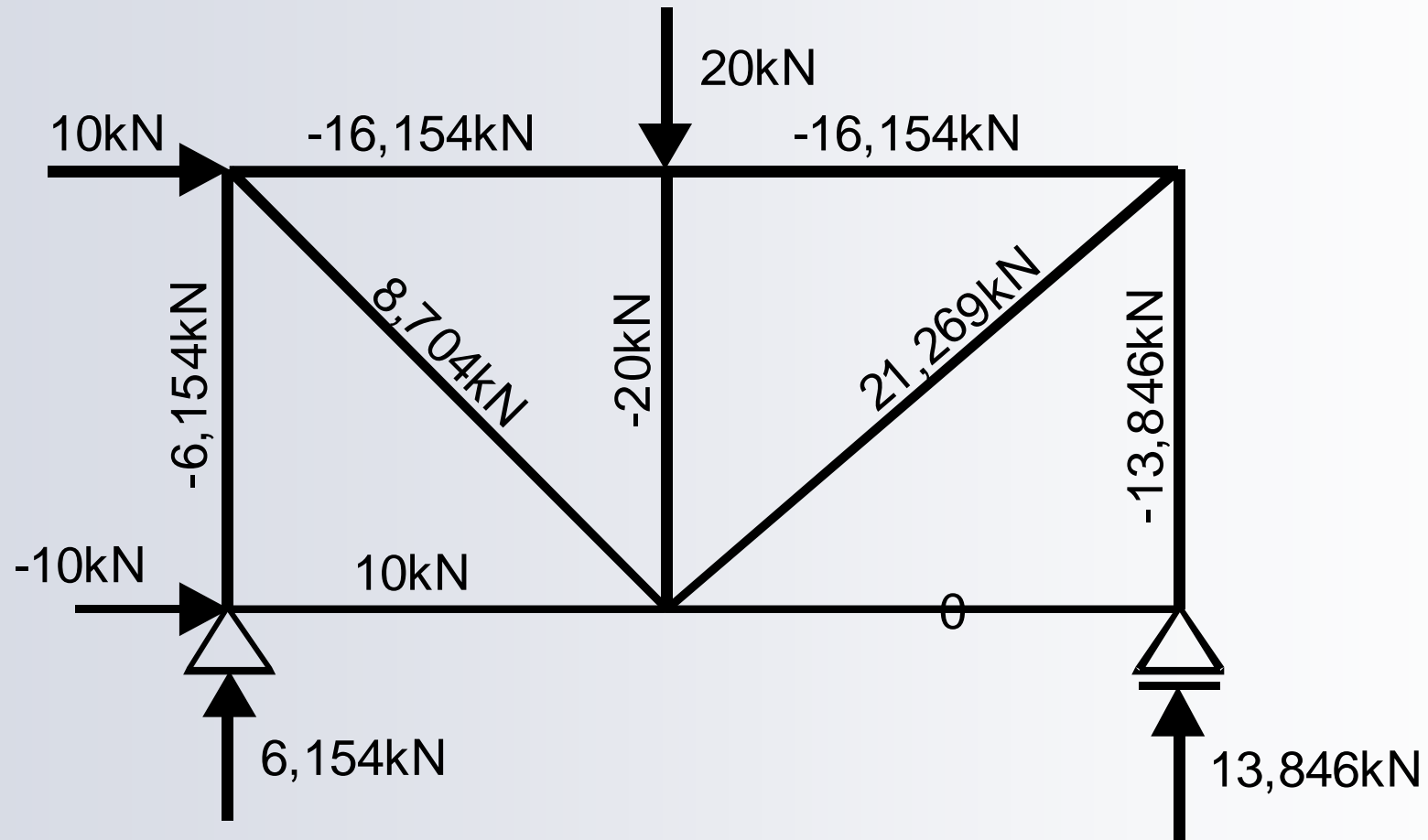
$$N_{4-1} = \frac{13,846kN}{0,651} = 21,269kN$$

$$N_{4-3} = \frac{-13,846kN \cdot 3,5m}{3m} = -16,154kN$$

$$N_{B-1} = 0$$



Przykład A – Wyniki: zestawienie sił



Przykład B – kratownica trójkątna

