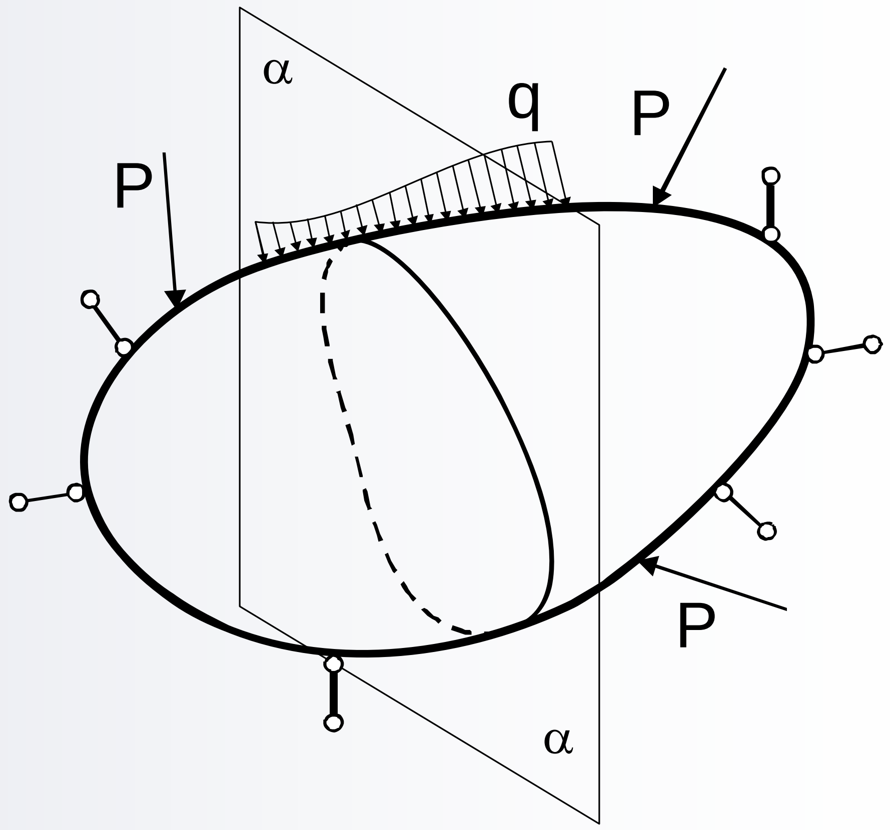
Mechanika teoretyczna

Wykład nr 4

Siły wewnętrzne

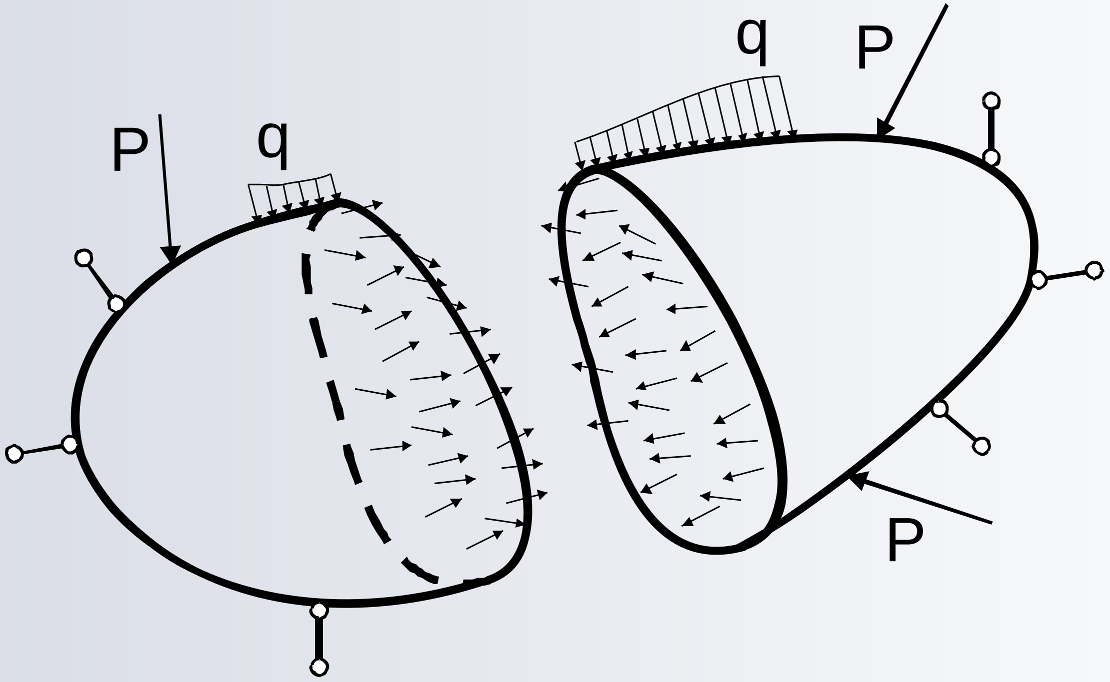
Siły wewnętrzne (1)

- Mamy bryłę materialną obciążoną układem sił (siły zewnętrzne, reakcje), będących w równowadze. Rozetniemy myślowo tę bryłę na dwie części przekrojem α-α.



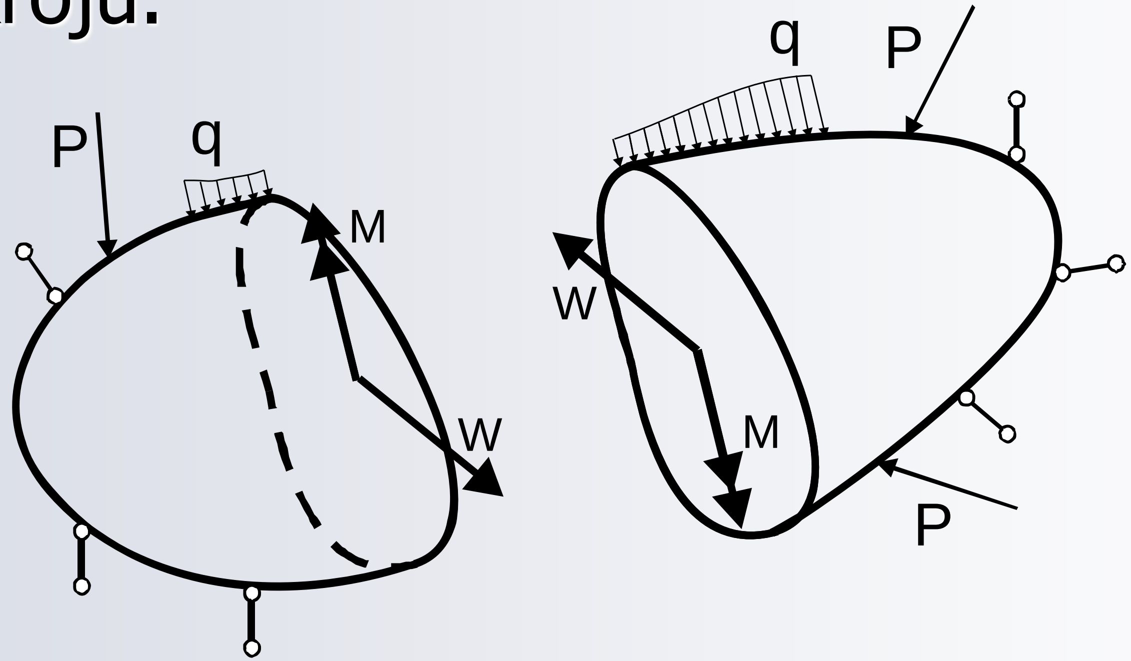
Siły wewnętrzne (2)

- Aby fragment bryły był w równowadze musimy zastąpić wzajemne oddziaływanie fragmentów brył przez przyłożenie w sposób ciągły do płaszczyzny α-α układu sił.



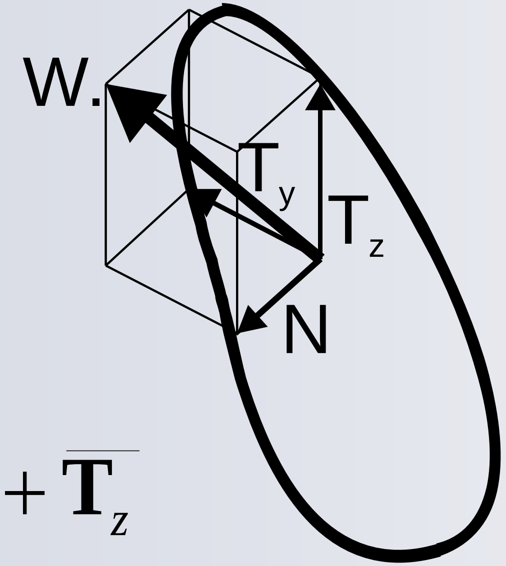
Siły wewnętrzne (3)

- Siły te można zastąpić przez ich wypadkowe $\overline{\mathbf{W}}$ i $\overline{\mathbf{M}}$, przyłożone w dowolnym punkcie przekroju α-α.
  W przypadku naszych rozważań punktem tym będzie środek przekroju.

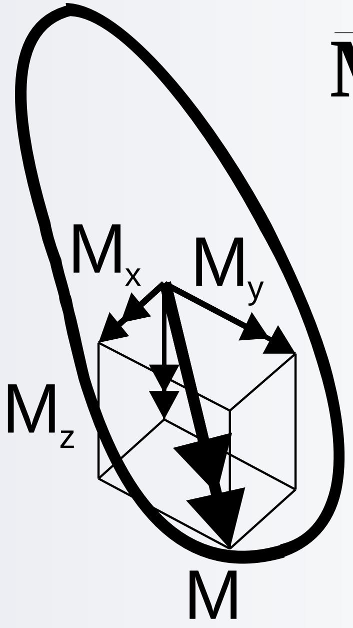


Siły przekrojowe

- Wypadkową siłę $\overline{\mathbf{W}}$ i moment $\overline{\mathbf{M}}$ można wyrazić przez ich składowe:



$$\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{N}} + \overline{\mathbf{T}}_y + \overline{\mathbf{T}}_z$$

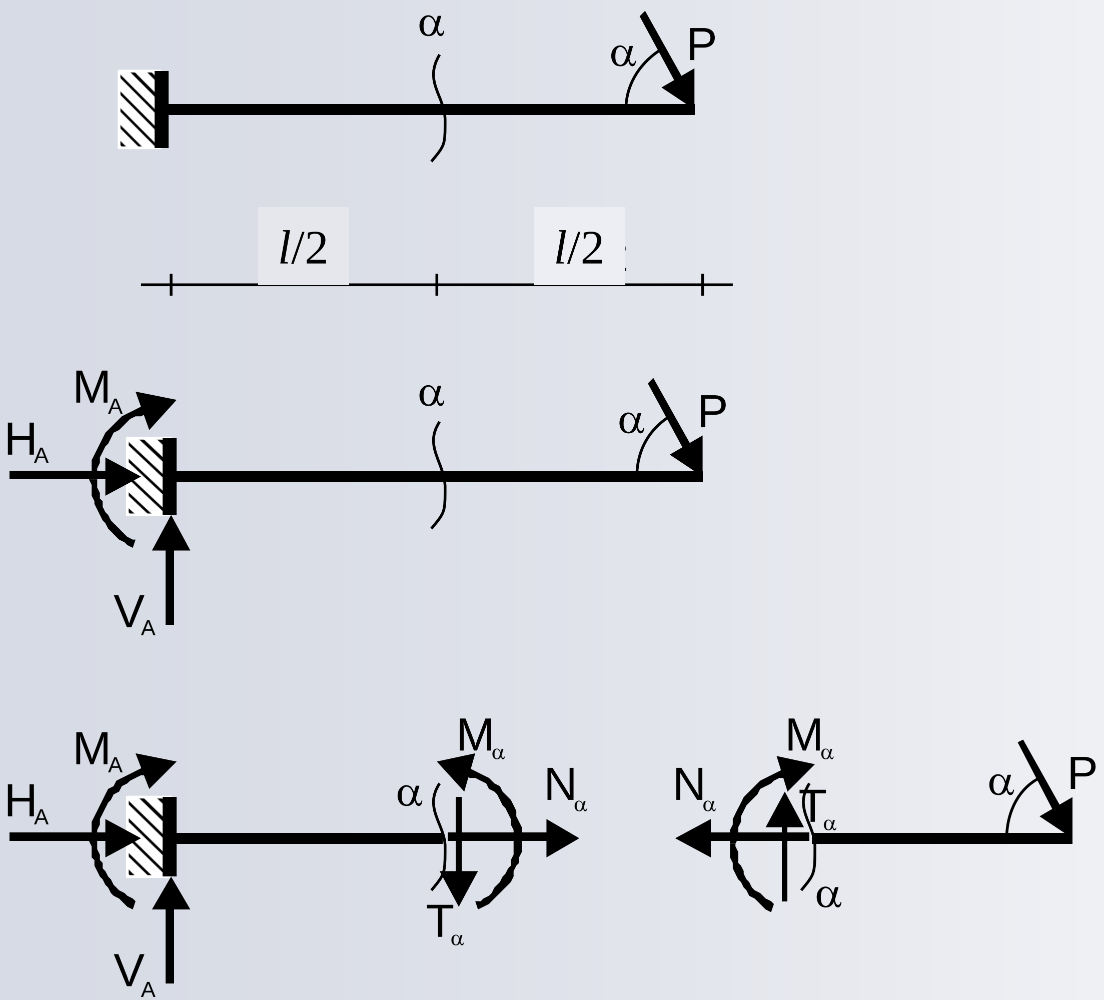


$$\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{M}_\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{M}_\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{M}_\mathbf{z}}$$

Nazwy sił przekrojowych

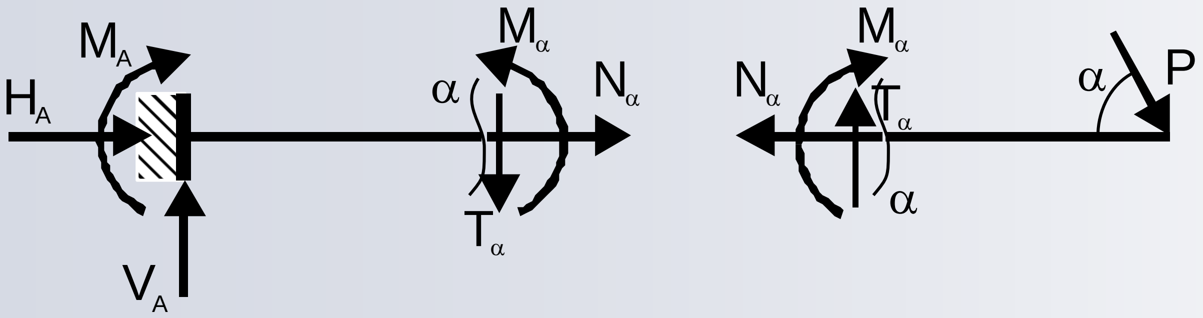
- Wielkości te nazwano:
  - N – siła podłużna (normalne) – wywołuje rozciąganie lub ściskanie;
  - T_y , T_z (lub Q_y , Q_z) – siły poprzeczne (tnące) – wywołują ścinanie;
  - M_x – moment skręcający – wywołuje skręcanie;
  - M_y , M_z – momenty zginające – wywołują zginanie.

Przykład



Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje (1)

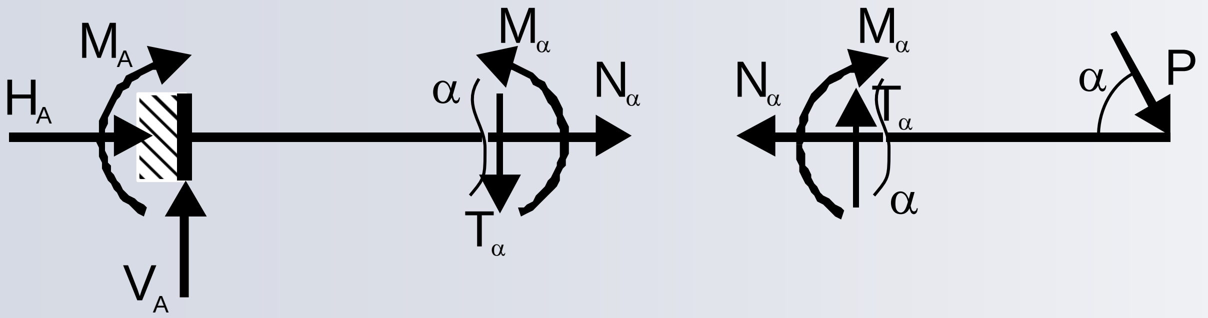
- Siła normalna (osiowa, podłużna) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się wzdłuż osi pręta w rozważanym punkcie.



$$N_\alpha = P\cos\alpha$$

Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje (2)

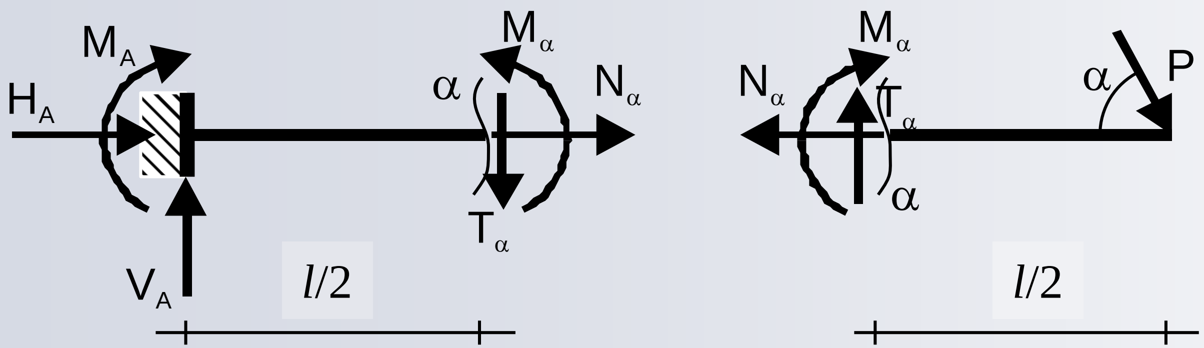
- Siła poprzeczna (tnąca) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się poprzecznie do osi pręta w rozważanym punkcie.



$$T_\alpha = P \sin \alpha$$

Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje (3)

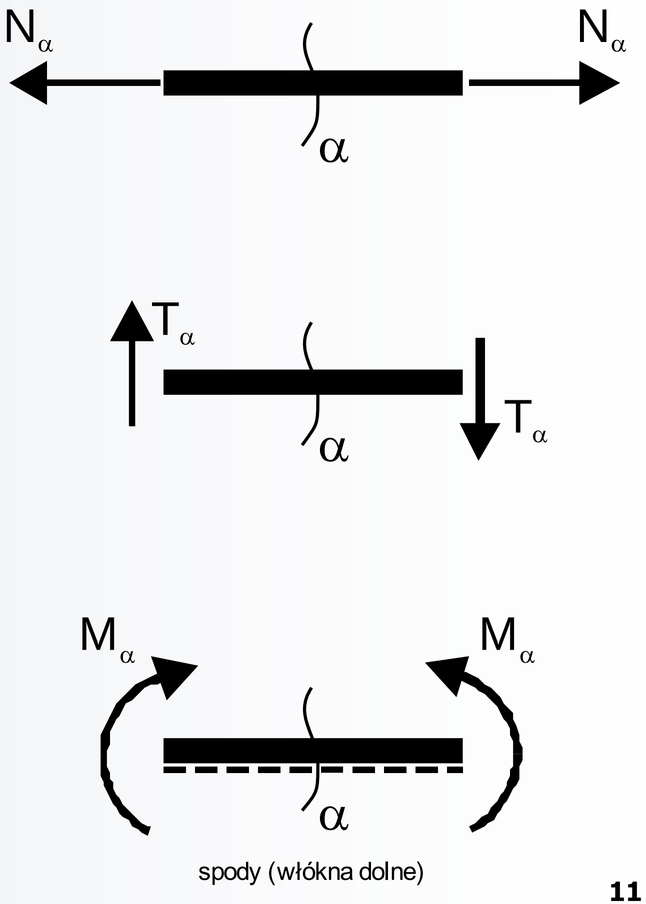
- Moment zginający – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich wzajemnemu obrotowi w rozważanym punkcie.



$$M_\alpha = -P\frac{l}{2}\sin\alpha$$

Siły wewnętrzne – konwencja znaków

- Siła normalna rozciągająca pręt jest dodatnia.
- Siła poprzeczna powodowana przez obciążenie działające po lewej stronie przekroju do góry lub po prawej stronie do dołu jest dodatnia.
- Moment rozciągający włókna dolne jest dodatni.



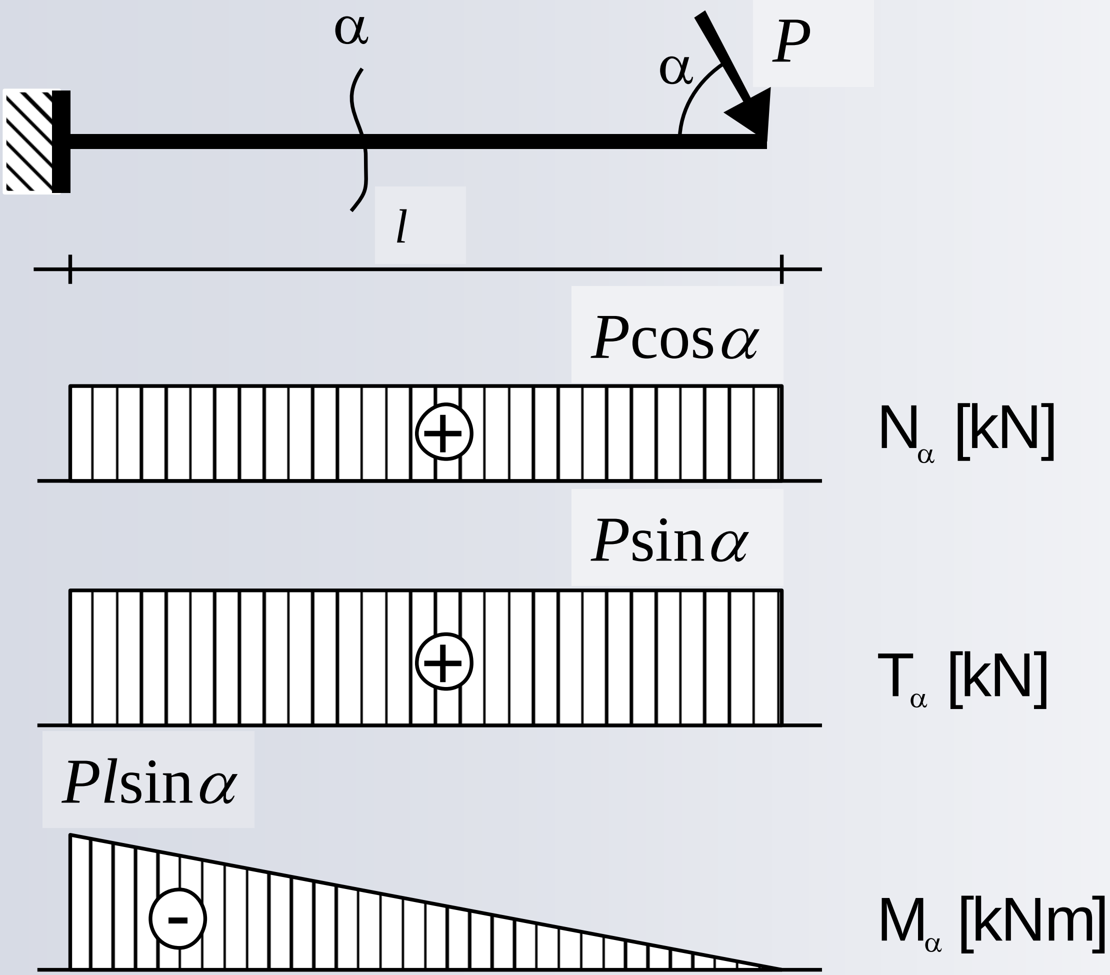
Siły wewnętrzne –wykresy (1)

- Kreskowanie (rzędne wykresu) należy zaznaczać prostopadle do osi pręta.
- Rzędne dodatnie wykresów sił normalnych i tnących odkłada się zazwyczaj u góry.
- Wykresy sił podłużnych i poprzecznych rysujemy ze znakiem.

Siły wewnętrzne –wykresy (2)

- Wykresy momentów nie muszą być znakowane, ale należy zwracać uwagę, aby rzędne momentu odkładać po stronie włókien rozciąganych.
- Rzędne dodatnie wykresu momentów zginających odkłada się u dołu (moment dodatni, gdy rozciągane są włókna dolne).
- Wykres momentu wskazuje jak odkształci się pręt i gdzie, w poszczególnych elementach, włókna są rozciągane.

Wykresy sił wewnętrznych



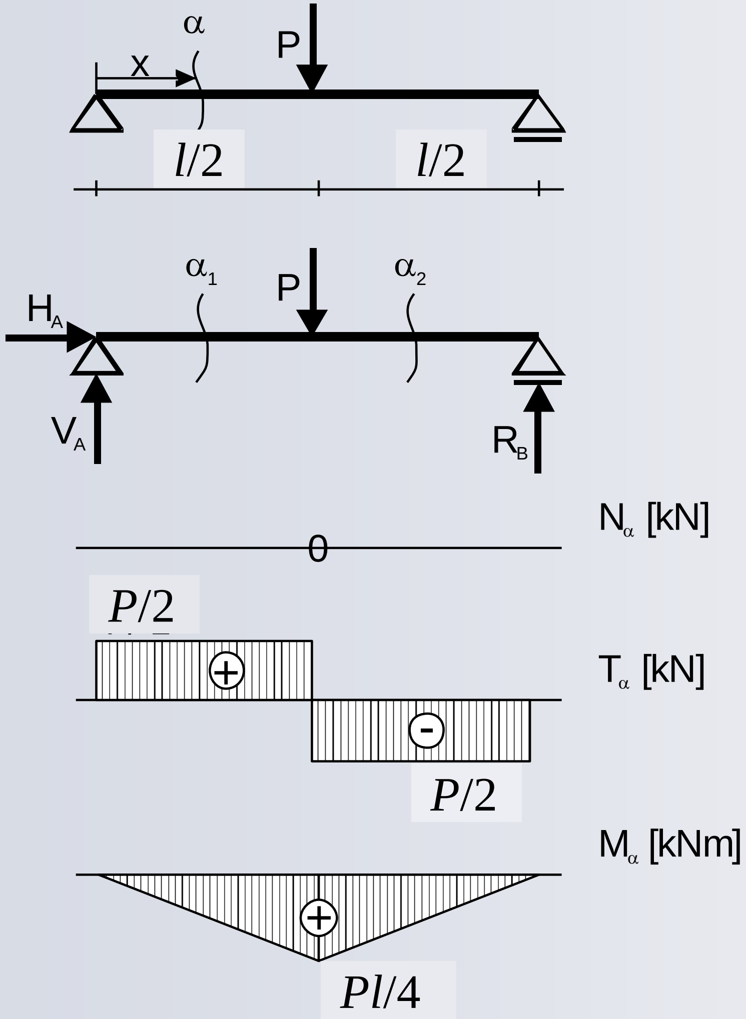
Punkty charakterystyczne, przekroje

- Ze względu na konieczność modyfikacji równań sił wewnętrznych:
  - w belkach i ramach – końce prętów, punkty przyłożenia sił:
    - czynnych: siła skupiona, moment skupiony, początek lub koniec obciążenia ciągłego;
    - biernych: punkty podporowe;
  - w ramach – dodatkowo węzły (połączenia prętów o różnej krzywiźnie).

Przegub

- Przegub jest jedynie punktem kontrolnym (moment równy jest 0). Nie powoduje on konieczności wprowadzenia dodatkowego przekroju.

Siła skupiona



$$H_A = 0$$

$$V_A = R_B = \frac{P}{2}$$

$$N_{\alpha 1} = 0 \quad N_{\alpha 2} = 0$$

$$T_{\alpha 1} = V_A = \frac{P}{2} \quad T_{\alpha 2} = V_A - P = -\frac{P}{2}$$

$$M_{\alpha 1} = V_A \cdot x = \frac{P}{2} \cdot x \quad \left| \begin{array}{ll} x = 0 & M_{\alpha 1} = 0 \\ x = \frac{l}{2} & M_{\alpha 1} = \frac{Pl}{4} \end{array} \right.$$

$$M_{\alpha 2} = V_A \cdot x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) =$$

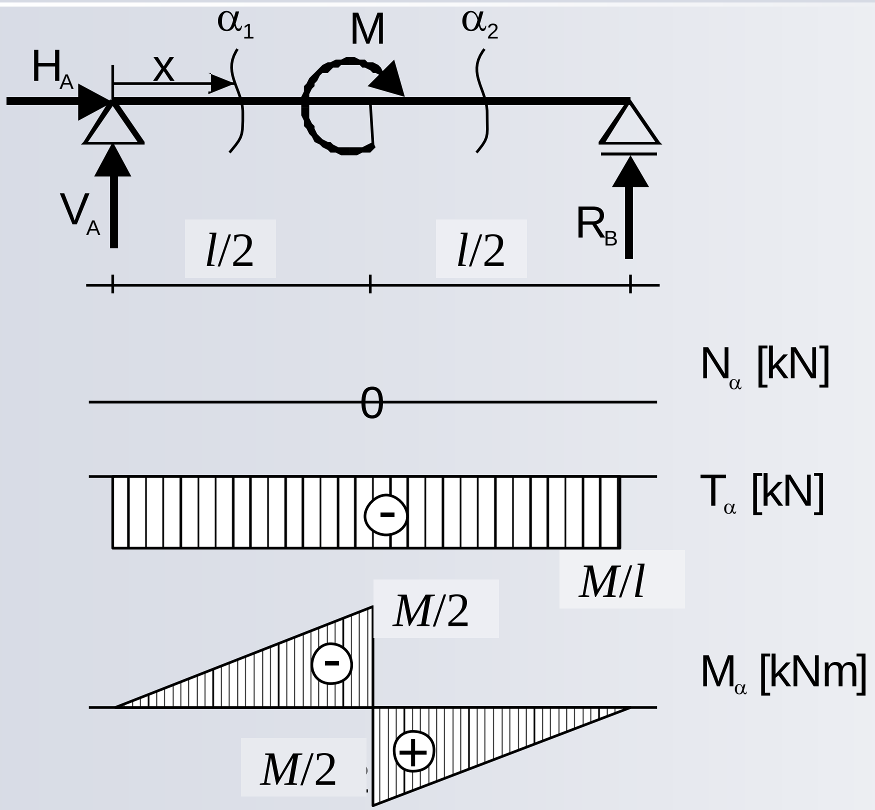
$$= \frac{P}{2} \cdot x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = P\left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right) \quad \left| \begin{array}{ll} x = \frac{l}{2} & M_{\alpha 2} = \frac{Pl}{4} \\ x = l & M_{\alpha 2} = 0 \end{array} \right.$$

Moment skupiony

$H_A = 0$

$V_A = -\frac{M}{l}$

$R_B = \frac{M}{l}$



$N_{\alpha 1} = 0 \quad N_{\alpha 2} = 0$

$T_{\alpha 1} = V_A = -\frac{M}{l} \quad T_{\alpha 2} = -\frac{M}{l}$

$M_{\alpha 1} = V_A \cdot x = -\frac{M}{l} \cdot x$

$x = 0 \quad M_{\alpha 1} = 0$

$x = \frac{l}{2} \quad M_{\alpha 1} = -\frac{M}{2}$

$M_{\alpha 2} = V_A \cdot x + M = M \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$

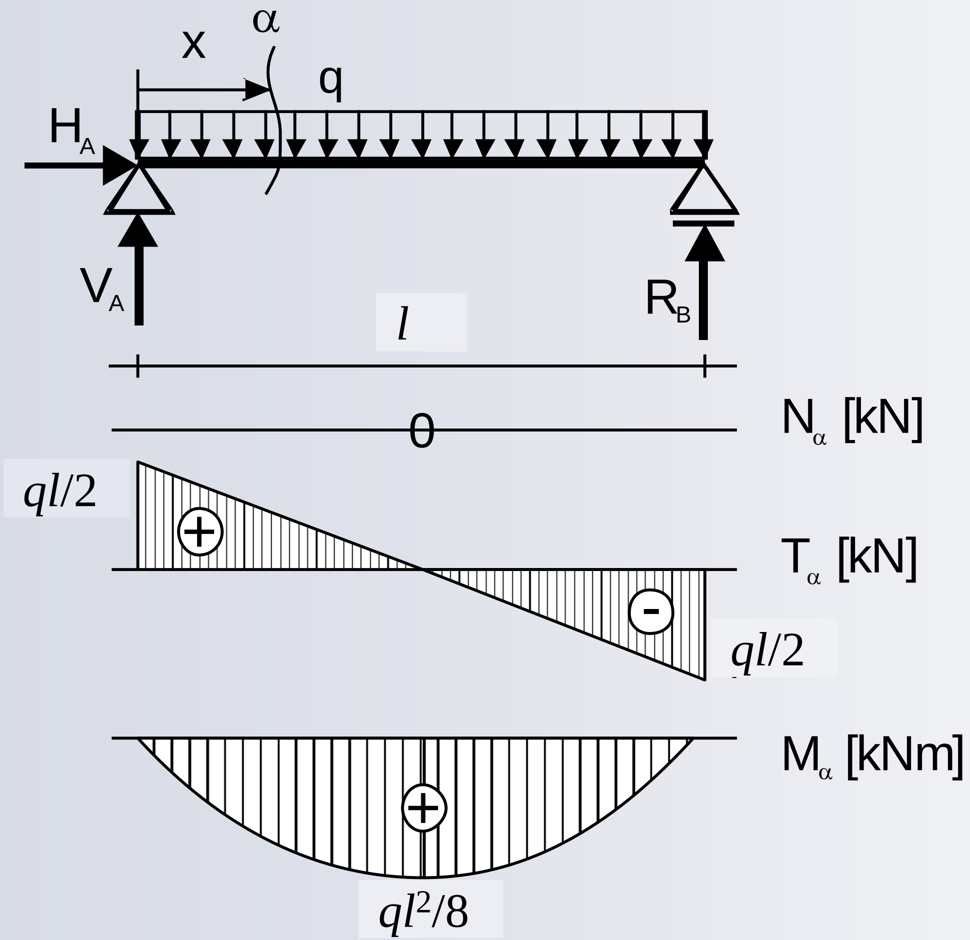
$x = \frac{l}{2} \quad M_{\alpha 2} = \frac{M}{2}$

$x = l \quad M_{\alpha 2} = 0$

Obciążenie ciągłe równomierne

$$H_A = 0$$

$$V_A = R_B = \frac{ql}{2}$$



$$N_\alpha = 0$$

$$T_\alpha = V_A - qx = \frac{ql}{2} - qx$$

$$x = 0 \quad T_\alpha = \frac{ql}{2}$$

$$x = \frac{l}{2} \quad T_\alpha = 0$$

$$x = l \quad T_\alpha = -\frac{ql}{2}$$

$$M_\alpha = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = q \cdot \left(\frac{l \cdot x}{2} - \frac{x^2}{2} \right)$$

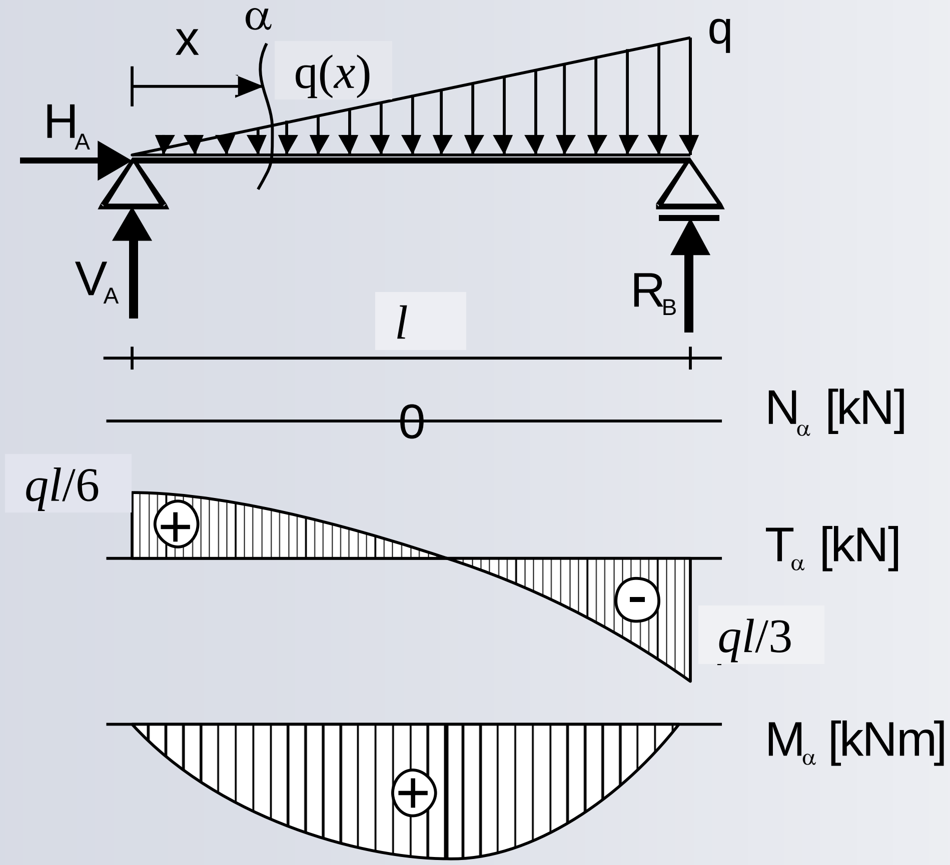
$$x = 0 \quad M_\alpha = 0$$

$$x = \frac{l}{2} \quad M_\alpha = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

$$x = l \quad M_\alpha = 0$$

Obciążenie ciągłe liniowo zmienne

$$H_A = 0$$
$$V_A = \frac{ql}{6}$$
$$R_B = \frac{ql}{3}$$



$$N_\alpha = 0$$

$$q(x) = \frac{q}{l} \cdot x$$

$$T_\alpha = V_A - \frac{1}{2} q(x) \cdot x = \frac{ql}{6} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{l}$$

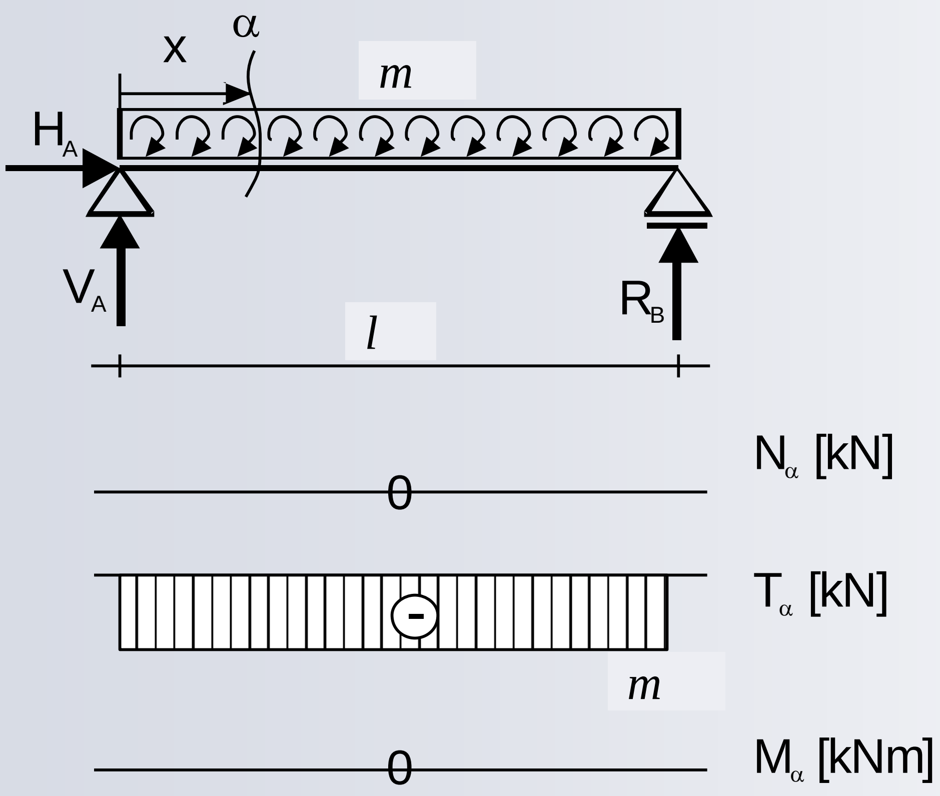
$$x = 0 \quad T_\alpha = \frac{ql}{6}$$
$$x = l \quad T_\alpha = \frac{ql}{3}$$

$$M_\alpha = V_A \cdot x - \frac{1}{2} q(x) \cdot x \cdot \frac{x}{3} =$$
$$= \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{1}{2}\frac{qx}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{3} = \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{1}{6}\frac{q}{l} x^3$$

$$x = 0 \quad M_\alpha = 0$$
$$x = l \quad M_\alpha = 0$$

Obciążenie ciągłe momentem

$H_A = 0$
$V_A = -m$
$V_B = m$



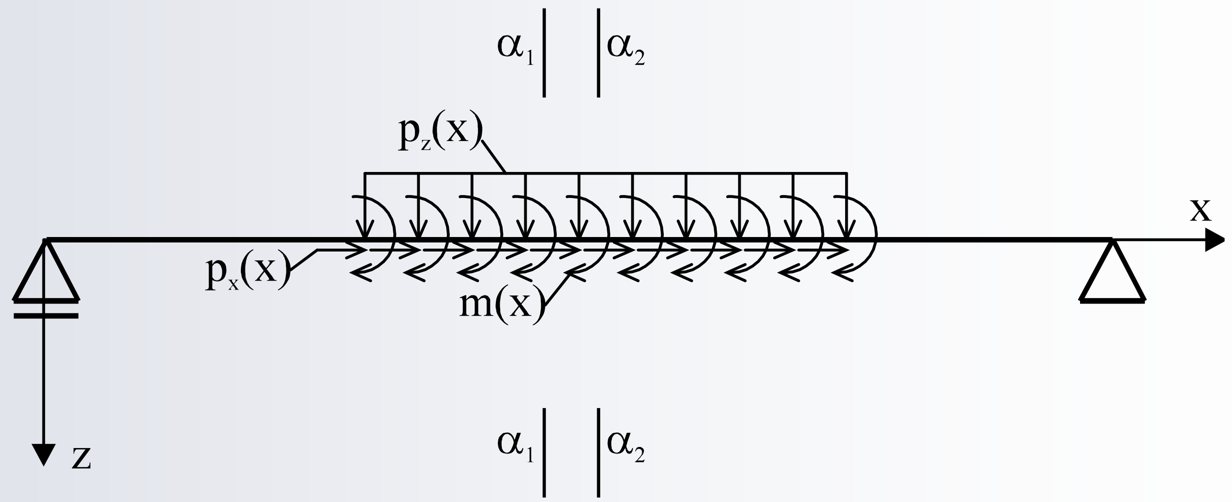
$$N_\alpha = 0$$

$$T_\alpha = V_A = -m$$

$$M_\alpha = V_A \cdot x + m \cdot x = -mx + mx = 0$$

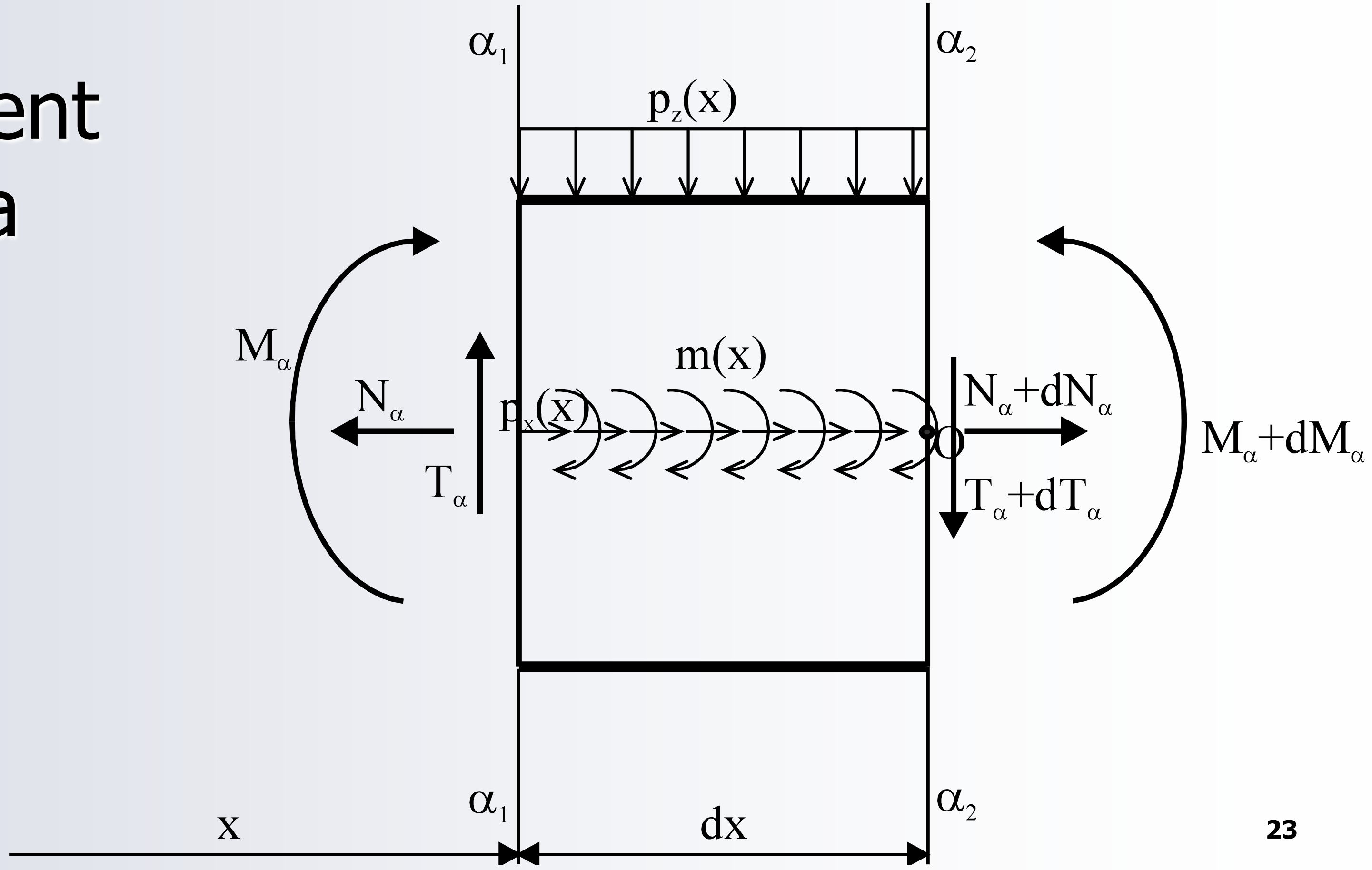
Warunki różniczkowe (1)

- Zależności różniczkowe pomiędzy: M_α, T_α, N_α oraz $p_z(x)$, $p_x(x)$ i $m(x)$.
- Aby wyznaczyć te zależności rozważymy belkę swobodnie podpartą, obciążoną obciążeniami ciągłymi i ciągłym momentem na fragmencie belki.



Warunki różniczkowe (2)

- Z tej belki wycinamy fragment przedstawiony na rysunku.



Warunki różniczkowe (3)

- Suma rzutów wszystkich sił na oś poziomą x :

$$\sum X = 0 \qquad -N_{\alpha} + p_x(x)dx + (N_{\alpha} + dN_{\alpha}) = 0$$

- Suma rzutów wszystkich sił na oś pionową z :

$$\sum Z = 0 \qquad -T_{\alpha} + p_z(x)dx + (T_{\alpha} + dT_{\alpha}) = 0$$

- Suma momentów wszystkich sił względem punktu O:

$$\sum M_o = 0 \qquad M_{\alpha} + T_{\alpha}dx + m_x(x)dx - p_z(x)dx\frac{dx}{2} - (M_{\alpha} + dM_{\alpha}) = 0$$

Warunki różniczkowe (4)

- Po odrzuceniu wielkości małej w porównaniu z pozostałymi $p_z(x)dx\frac{dx}{2}$, otrzymujemy:

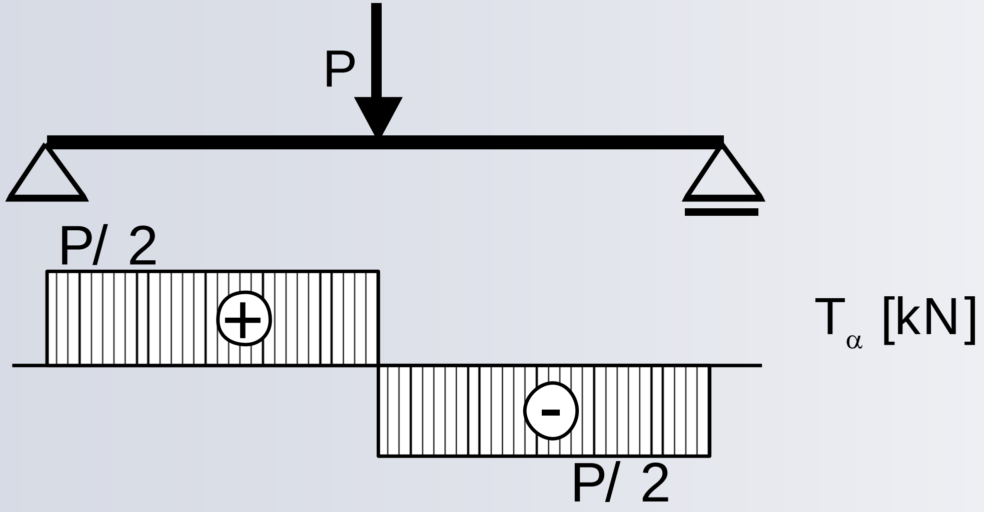
$$\frac{dN_\alpha}{dx} = -p_x(x) \qquad \frac{dT_\alpha}{dx} = -p_z(x) \qquad \frac{dM_\alpha}{dx} = T_\alpha + m(x)$$

- Z powyższych równań wynika również, że:

$$\frac{d^2M_\alpha}{dx^2} = \frac{dT_\alpha}{dx} = -p_z(x)$$

Zależności między M_α, T_α oraz q (1)

- Jeżeli w przedziale nie ma obciążenia ciągłego poprzecznego to wykres sił tnących jest stały, równoległy do osi pręta.

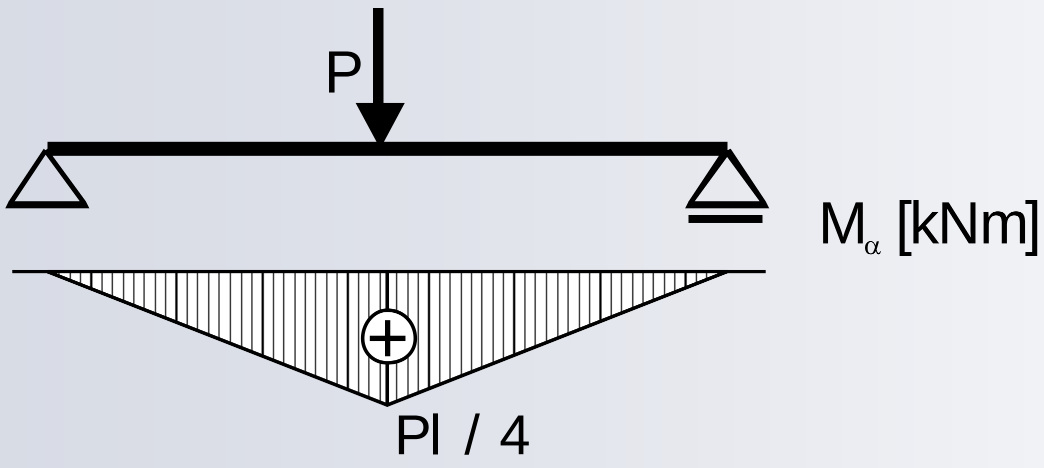


$$\frac{dT_\alpha}{dx} = -q(x) = 0$$

$$T_\alpha(x) = C_1 = const$$

Zależności między M_α, T_α oraz q (2)

- Jeżeli w przedziale nie ma obciążenia ciągłego poprzecznego i nie występuje obciążenie ciągłe momentem to wykres momentu jest linią prostą nachyloną do pręta.

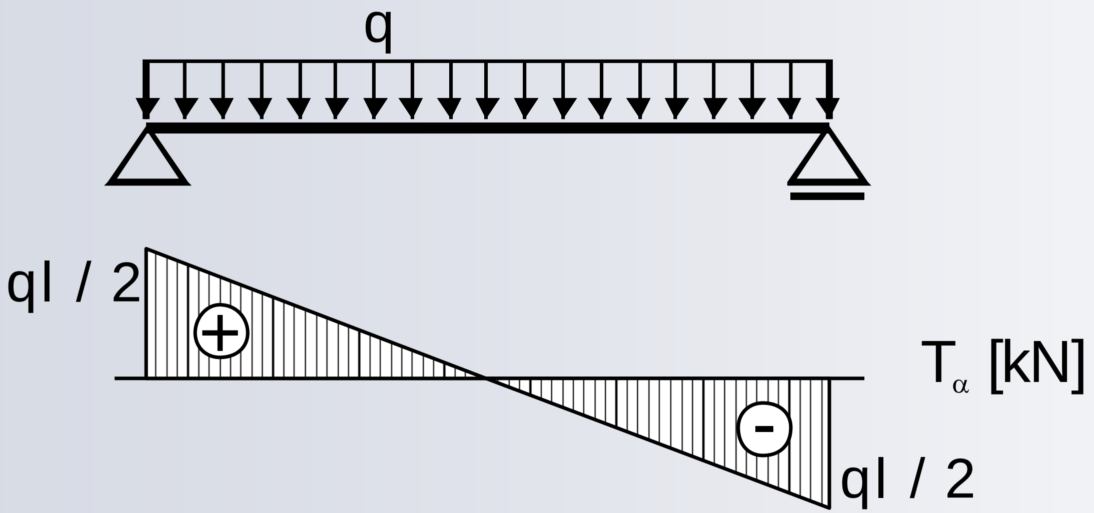


$$\frac{dM_\alpha}{dx} = T_\alpha(x) = C_1$$

$$M_\alpha(x) = C_1 \cdot x + C_2$$

Zależności między M_α, T_α oraz q (3)

- Jeżeli w przedziale działa stałe obciążenie ciągłe to wykres sił tnących jest nachylony do pręta, rzędne maleją wraz ze wzrostem x.



$$\frac{dT_\alpha}{dx} = -q$$

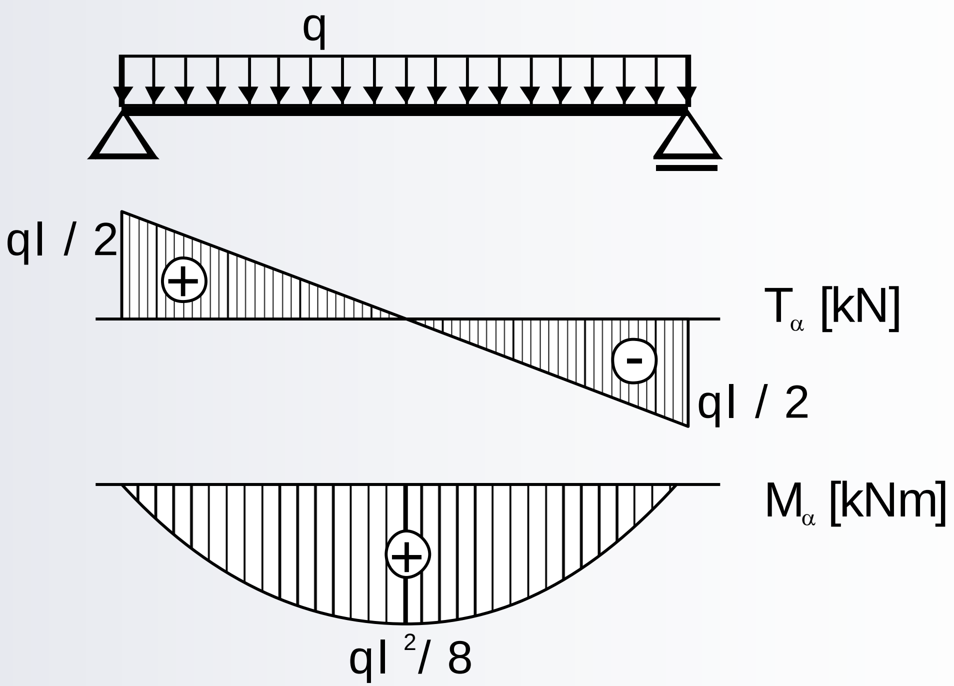
$$T_\alpha = -qx + C_1$$

Zależności między M_α, T_α oraz q (4)

- Jeżeli w przedziale działa stałe obciążenie ciągłe i nie ma obciążenia ciągłego momentem, to wykres momentów zginających jest parabolą (krzywą drugiego stopnia). →

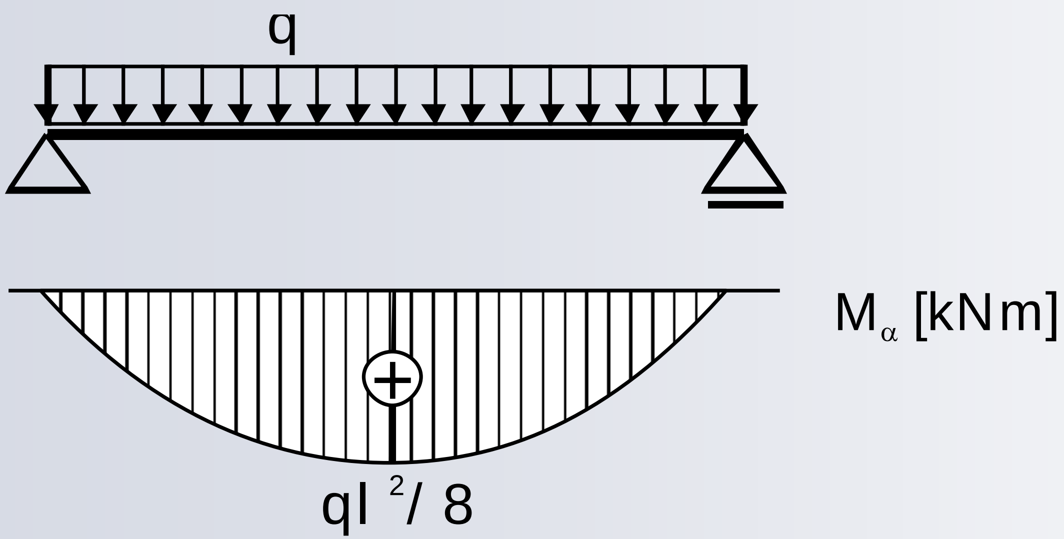
Zależności między M_α, T_α oraz q (5)

- Jeżeli w przedziale zeruje się równanie siły tnącej to wykres momentów osiąga ekstremum w tym punkcie. →



Zależności między M_α, T_α oraz q (6)

- Jeżeli obciążenie ciągłe jest skierowane do dołu, to wypukłość wykresu jest skierowana w dół (i odwrotnie: zwrot obciążenia do góry – wypukłość do góry).



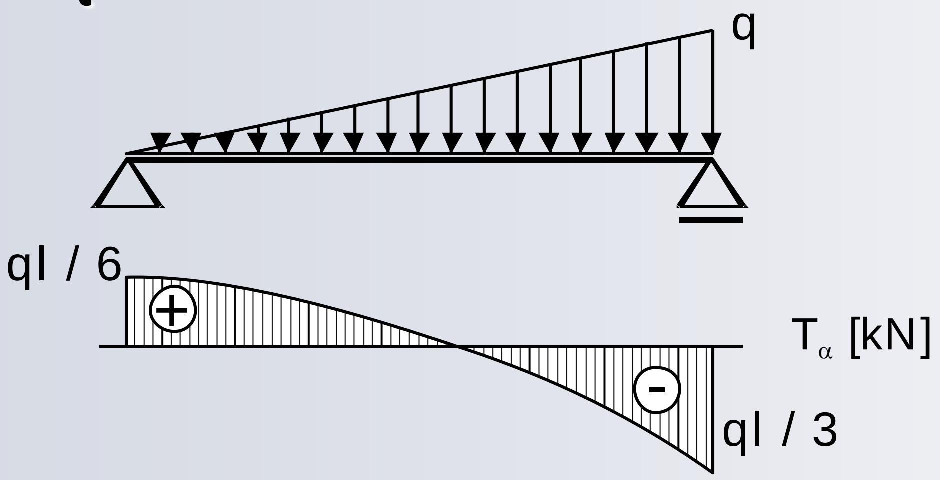
$$\frac{d^2 M_\alpha}{dx^2} = -q(x) = -q$$

$$\frac{dM_\alpha}{dx} = -qx + C_1$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + C_1 x + C_2$$

Zależności między M_α, T_α oraz q (7)

- Jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe liniowo zmienne i nie ma obciążenia ciągłego momentem to wykres sił poprzecznych jest parabolą. W punkcie, gdzie obciążenie ciągłe się zeruje parabola jest styczna do osi do pręta.



$$q(x) = C_1 x + C_2$$

$$T(x) = -\frac{1}{2} C_1 x^2 - C_2 x + C_3$$

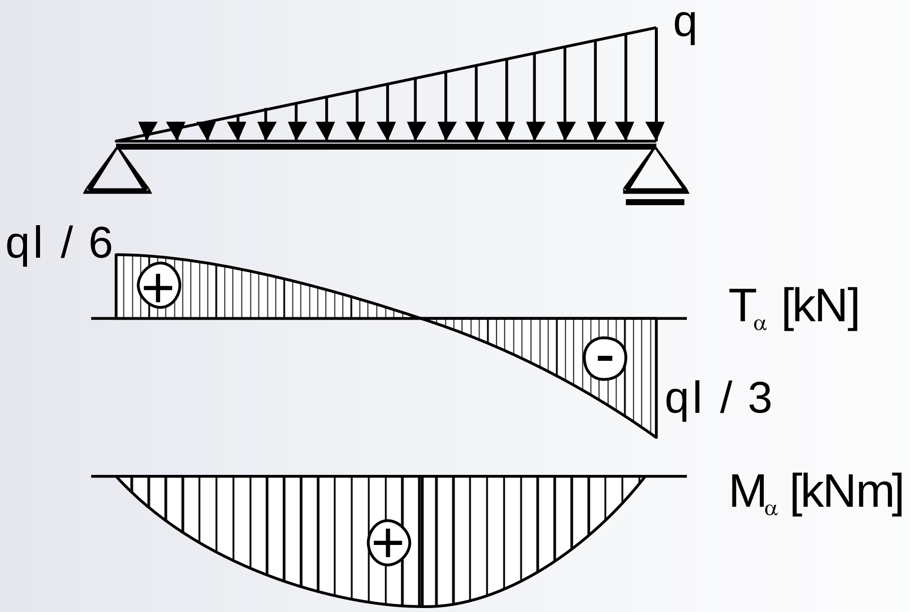
Zależności między M_α, T_α oraz q (8)

- Jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe liniowe to wykres momentów zginających jest krzywą trzeciego stopnia.

→

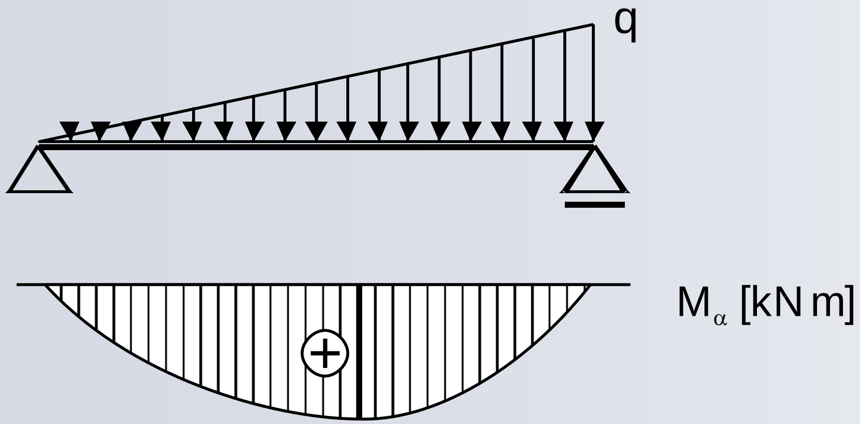
Zależności między M_α, T_α oraz q (9)

- Jeżeli równanie sił tnących zeruje się w przedziale, to wykres momentów osiąga ekstremum w tym punkcie. →



Zależności między M_α, T_α oraz q (10)

- Jeżeli obciążenie ciągłe jest skierowane do dołu, to wypukłość wykresu jest skierowana w dół i odwrotnie.



$$q(x) = C_1 x + C_2$$

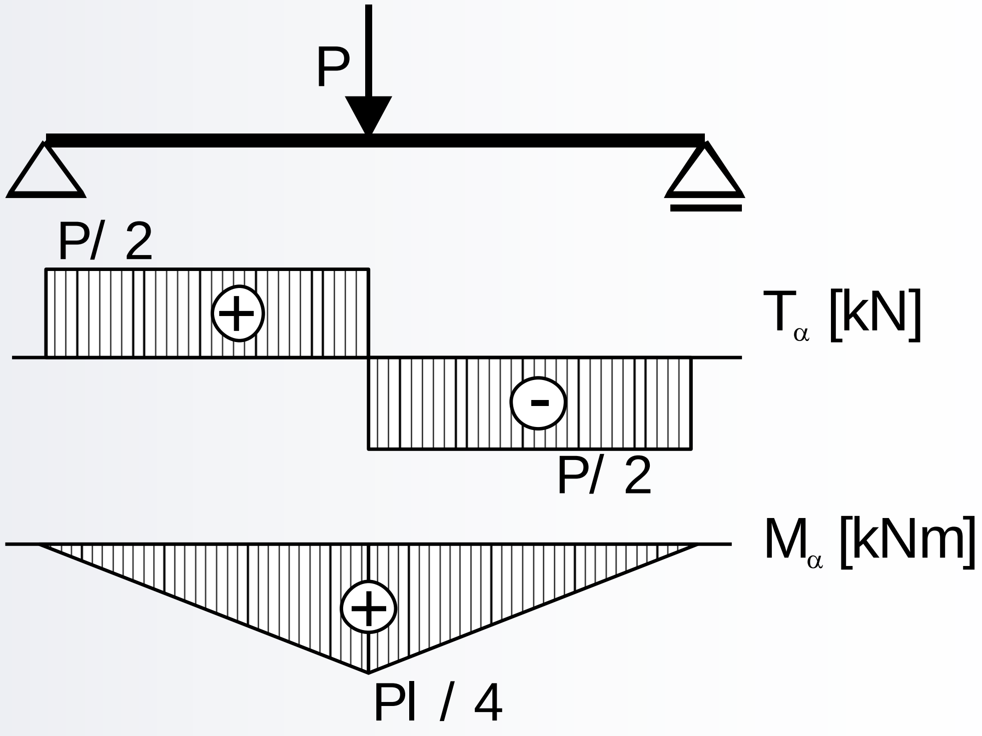
$$\frac{d^2 M_\alpha}{dx^2} = -q(x) = -C_1 x - C_2$$

$$\frac{dM_\alpha}{dx} = -\frac{1}{2} C_1 x^2 - C_2 x + C_3$$

$$M(x) = -\frac{1}{6} C_1 x^3 - \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

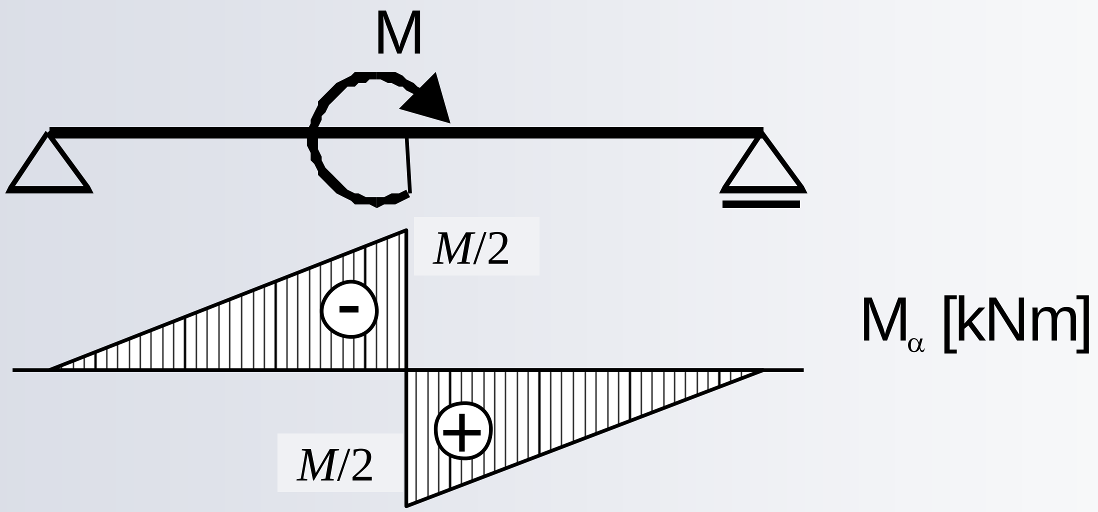
Zależności między M_α, T_α oraz q (11)

- Jeżeli na pręcie występuje siła skupiona, to na wykresie sił poprzecznych wystąpi „skok" o tą wartość, a na wykresie momentów zginających wystąpi „załamanie" wykresu.



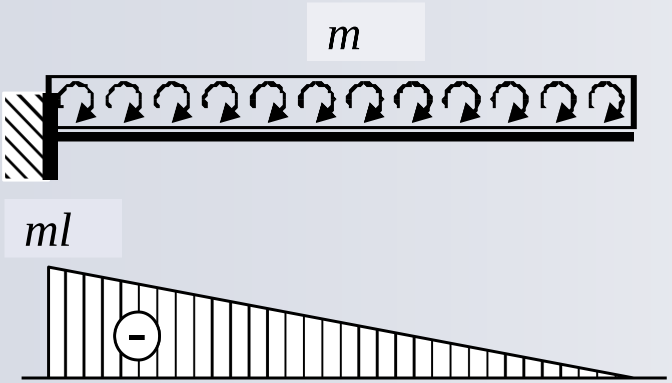
Zależności między M_α, T_α oraz q (12)

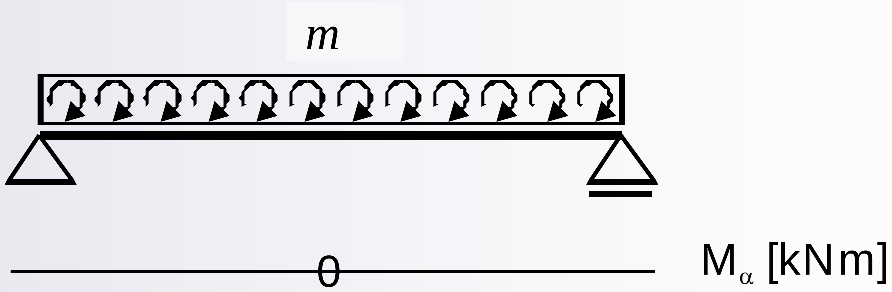
- Jeżeli na pręcie występuje moment skupiony, to na wykresie momentów zginających wystąpi „skok” o wartość tego momentu.



Zależności między M_α, T_α oraz q (13)

- Jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe momentem to wykres momentów zginających jest liniowy (liniowo zmienny lub w szczególnym przypadku stały, gdy $T_\alpha = -m$).





$$\frac{dM_\alpha}{dx} = T_\alpha + m(x)$$

Zależności między M_α , T_α oraz q (14)

Obciążenie	Wykres T	Wykres M
Brak obc. ciągłego	stały	prosta
Obc. ciągłe stałe	prosta	parabola 2^o
Obc. ciągłe trójkątne	parabola 2^o	krzywa 3^o
Siła skupiona	skok	załamanie
Moment skupiony	–	skok
Obc. ciągłe momentem	–	prosta