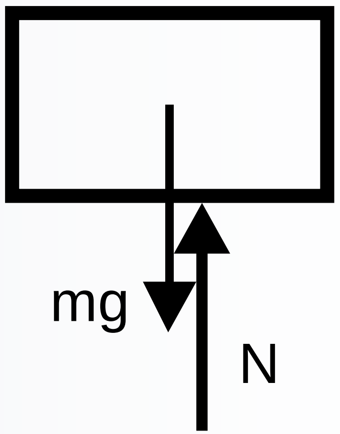
Mechanika ogólna

Wykład nr 6

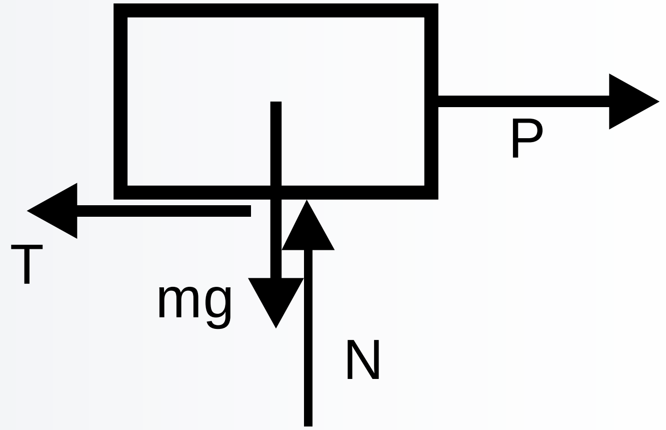
Zjawisko tarcia. Prawa tarcia.

Więzy z tarciem

- W więzach, w których nie występuje tarcie, reakcja jest prostopadła do płaszczyzny styku ciał (nacisk).



- W więzach z tarciem dochodzi jeszcze jedna reakcja, równoległa do płaszczyzny styku.



Prawa tarcia statycznego Coulomba i Morena

- Siła tarcia jest zawsze **przeciwna do** występującego lub ewentualnego **ruchu**.
- Wielkość siły tarcia jest **niezależna od** pola **powierzchni** stykających się ciał, **zależy** jedynie **od rodzaju powierzchni**.
- Zależność między naciskiem i siłą tarcia:

$$T = \mu \cdot N$$

Współczynnik tarcia

Rodzaj powierzchni	μ
Stal-stal	0,15
Stal-żeliwo	0,18
Żeliwo-żeliwo	0,45
Metal-drewno	0,5-0,6
Drewno-drewno	0,65
Skóra-metal	0,6

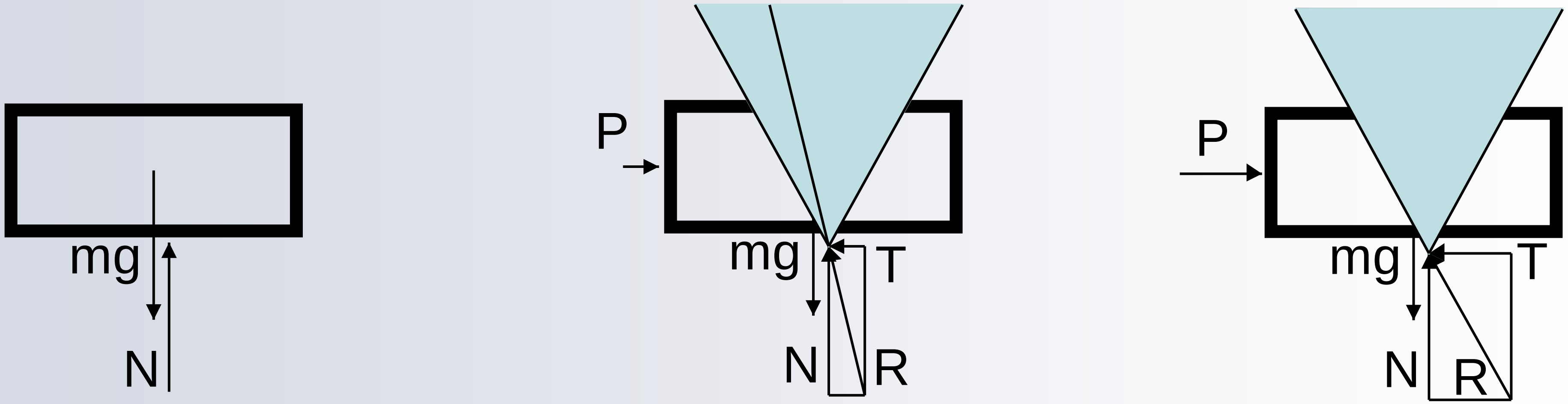
Tarcie statyczne i kinetyczne

- Tarcie występuje w przypadku układów poruszających (kinetyczne) lub w układach, w których ruch jest potencjalnie możliwy, ale jeszcze do niego nie dochodzi (statyczne).
- Tarcie **statyczne** przeciwdziałające wystąpieniu ruchu zwiększa się w wyniku przyłożenia siły od 0 do wartości maksymalnej (tarcie całkowicie rozwinięte).

Kąt tarcia

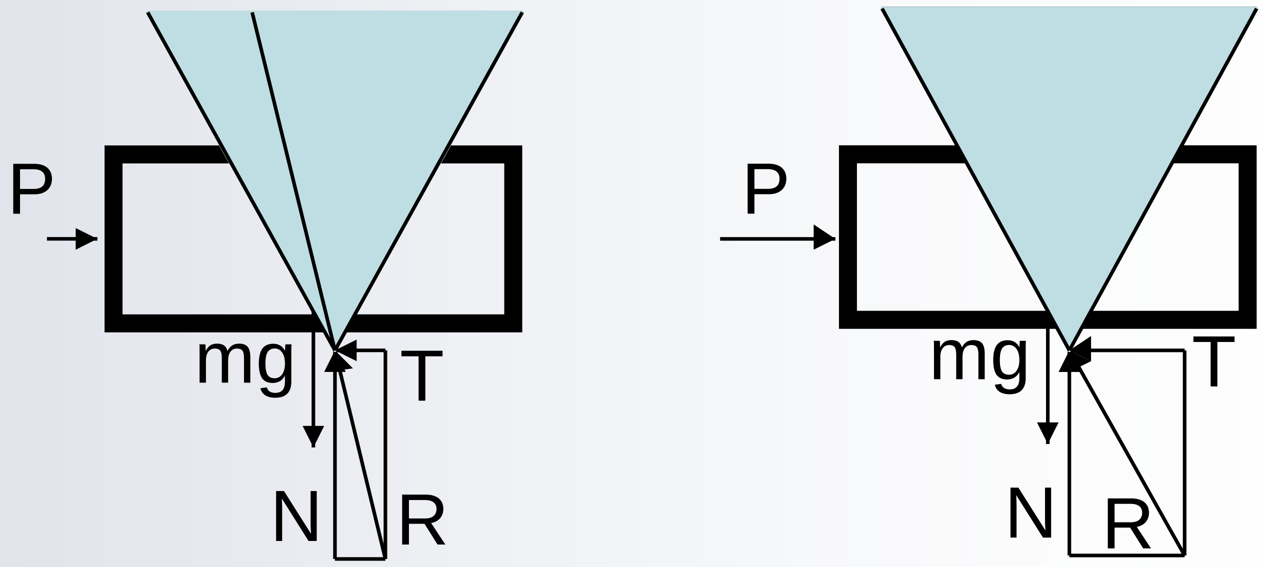
- Kąt między reakcją pionową a siłą tarcia nazywany jest kątem tarcia:

$$\mu = \frac{T}{N} = \mathrm{tg}\,\phi$$



Stożek tarcia

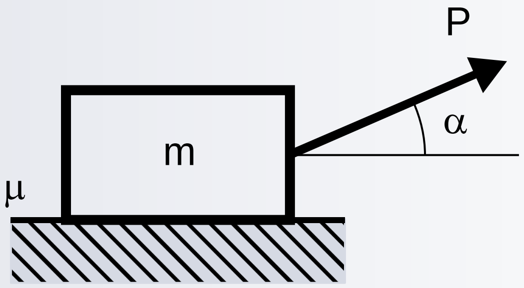
- Linia działania wypadkowej reakcji zawarta jest wewnątrz, lub w przypadku tarcia całkowicie rozwiniętego, na powierzchni stożka nazywanego stożkiem tarcia.

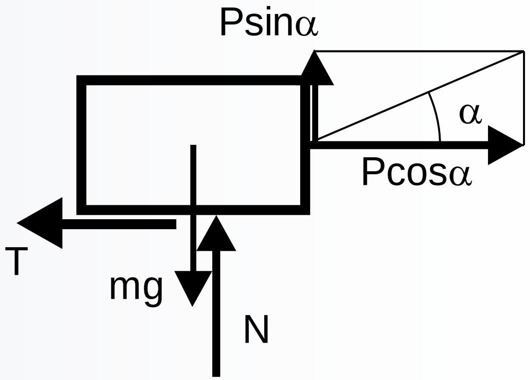


Tarcie ślizgowe - przykład

$$\sum X = 0: \quad P\cos\alpha - T = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad P\sin\alpha + N - m \cdot g = 0$$





- Prawo tarcia: $T = \mu \cdot N$

$$N = m \cdot g - P\sin\alpha$$

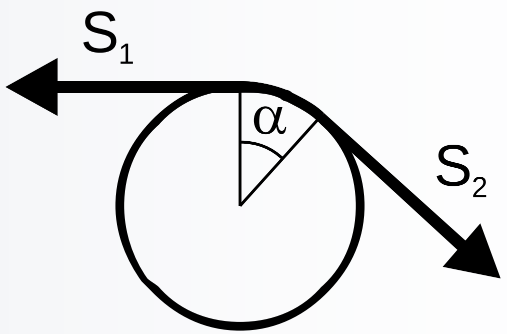
$$\mu\left(m \cdot g - P\sin\alpha\right) = P\cos\alpha$$

$$P = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}$$

Tarcie cięgien o bloczek nieruchomy (1)

- Zależność miedzy siłami w cięgnie przy całkowicie rozwiniętym tarciu:

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha}$$

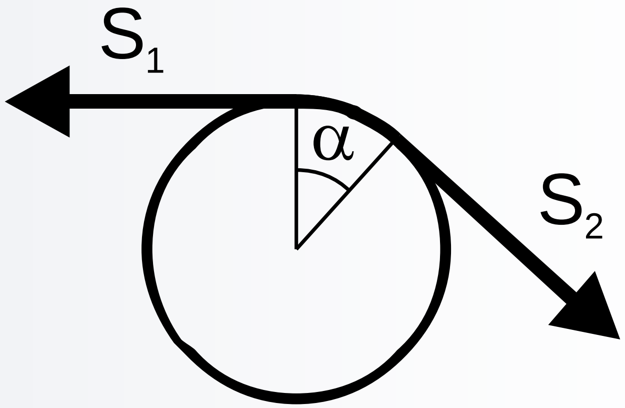


gdzie $\mathbf{S_1}$ jest siła działającą w cięgnie w kierunku ewentualnego ruchu.

Tarcie cięgien o bloczek nieruchomy (2)

- Zależność odwrotna:

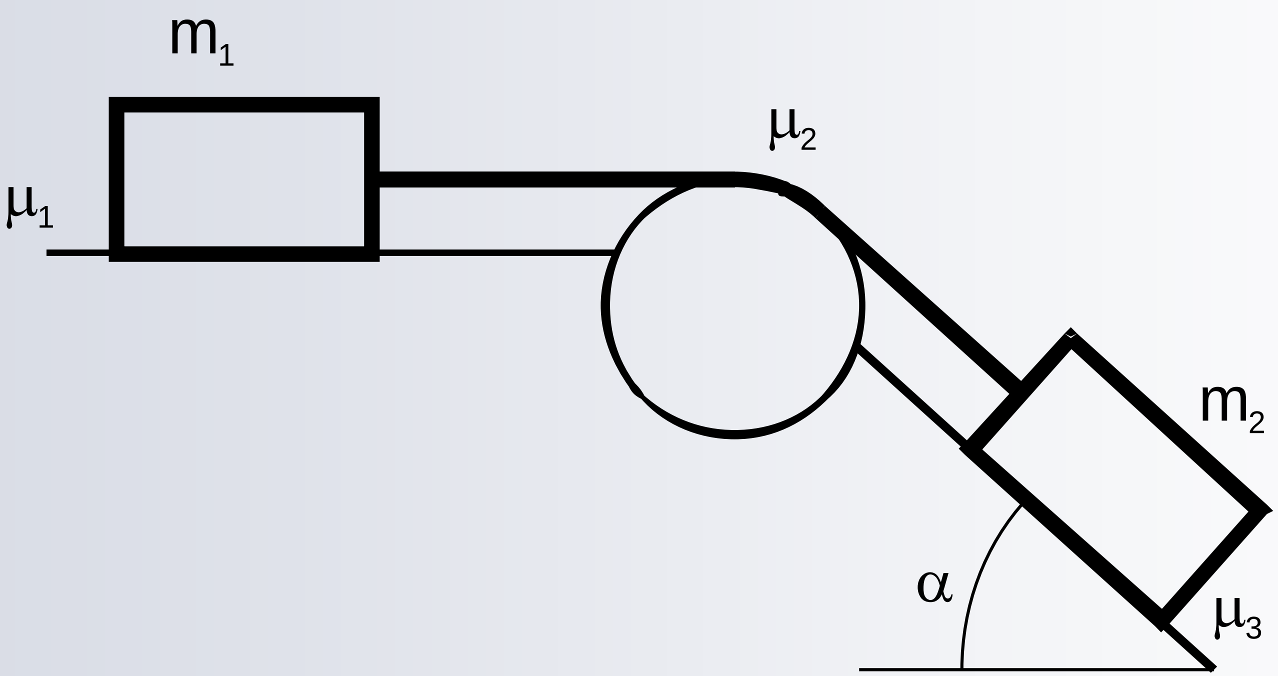
$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu\alpha}$$



- Kąt α nazywany jest kątem opasania i musi być wyrażany w radianach.

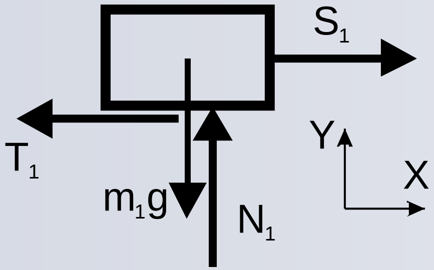
Tarcie cięgien – przykład (1)

- Obliczyć masę graniczną m_2, po przekroczeniu której rozpocznie się ruch. Miara kąta $\alpha=30^o$.



Tarcie cięgien – przykład (2)

I

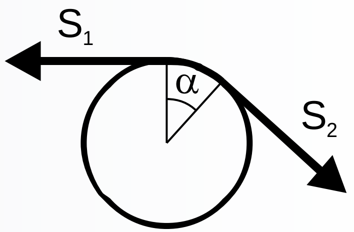


$$\sum X = 0: \quad S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

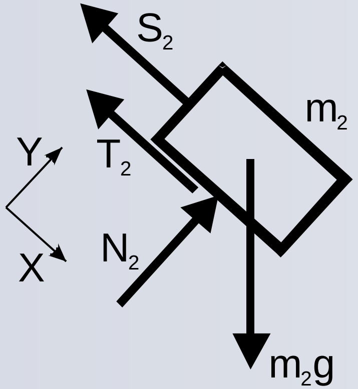
$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

II



$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_2 \alpha}$$

III



$$\sum X = 0: \quad m_2 g \sin\alpha - S_2 - T_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0$$

$$T_2 = \mu_3 \cdot N_2$$

Przykład – rozwiązanie

I

$$S_1 = T_1$$

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot N_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

II

$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_2 \alpha}$$

$$S_2 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_2 \frac{\pi}{6}}$$

III

$$m_2 g \sin\alpha - S_2 - T_2 = 0$$

$$m_2 g \sin\alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_2 \frac{\pi}{6}} - \mu_3 \cdot m_2 g \cos\alpha = 0$$

$$N_2 = m_2 g \cos\alpha$$

$$T_2 = \mu_3 \cdot N_2$$

$$m_2 = \frac{\mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_2 \frac{\pi}{6}}}{g \sin\alpha - \mu_3 \cdot g \cos\alpha}$$

Opór przy toczeniu

- W rzeczywistych układach, w przypadku ciał o przekrojach okrągłych, reakcja pionowa przesunięta jest w kierunku ewentualnego ruchu.
- Wynika to z nierównomiernego rozkładu sił pod ciałem. Mimo założenia kołowości przekroju, w rzeczywistości styk nie jest punktowy.

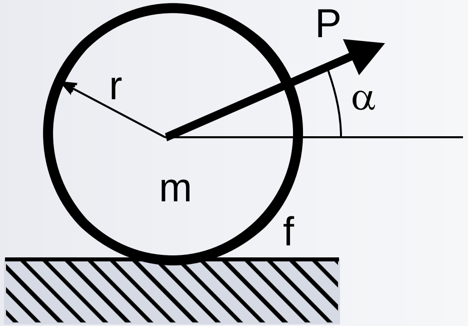
Wartości współczynnika oporu toczenia

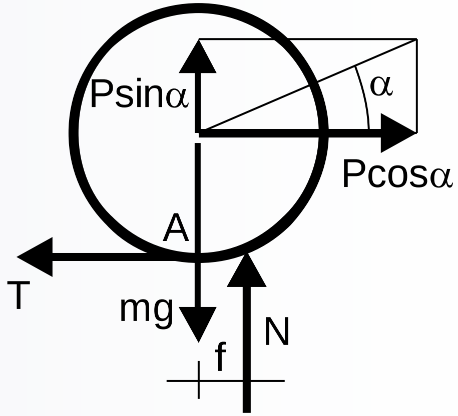
Koło	Rodzaj podłoża	*f* [cm]
Drewno	Drewno	0,05-0,8
Drewno	Stal	0,03-0,04
Stal	Stal	0,001-0,005
Żeliwo	Żeliwo	0,005

Opór toczenia - przykład

$$\sum Y = 0: \quad P\sin\alpha + N - m\cdot g = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad P\cos\alpha \cdot r - N\cdot f = 0$$





$$N = m\cdot g - P\sin\alpha$$

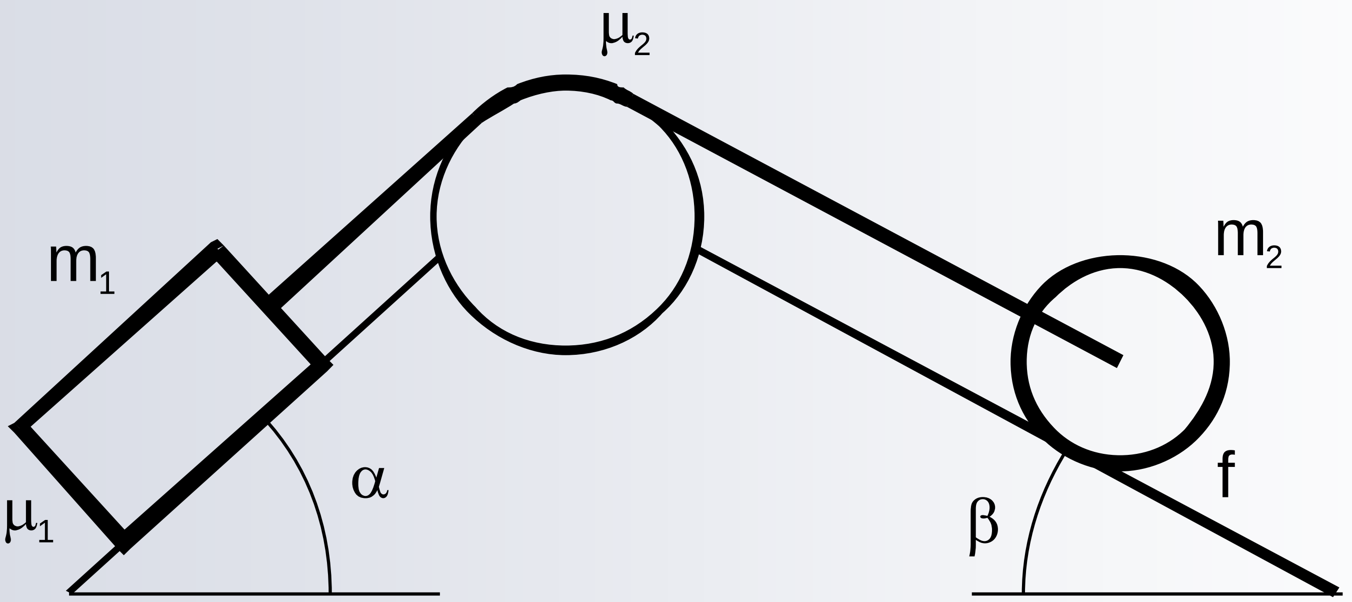
$$P\cos\alpha \cdot r - \left(m\cdot g - P\sin\alpha\right)\cdot f = 0$$

$$P = \frac{m\cdot g\cdot f}{r\cdot\cos\alpha + f\sin\alpha}$$

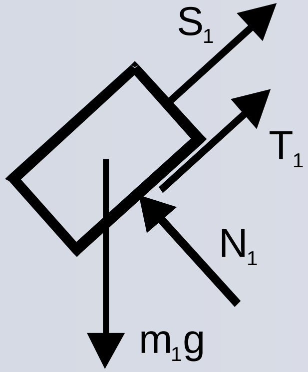
Przykład A

- Określić zakres, w jakim ma mieścić się wielkość masy m_2, aby nie wystąpił ruch.

  $\alpha=30^o$, $\beta=45^o$



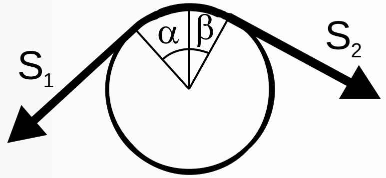
Przykład A – wariant I (ruch w lewo)



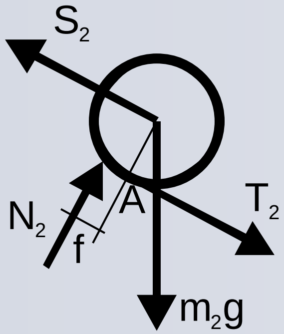
$$\sum X = 0: \quad m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha - S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu_2(\alpha+\beta)}$$



$$\sum Y = 0: \quad N_2 - m_2 g \cos\beta = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad N_2 \cdot f - S_2 \cdot r + m_2 g \sin\alpha \cdot r = 0$$

Wariant I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$$

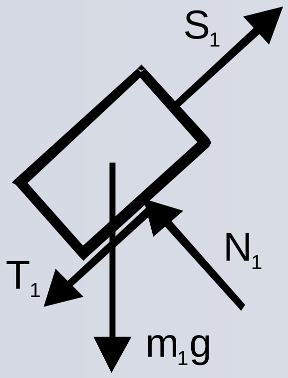
$$S_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$S_2 = \left(m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha\right) \cdot e^{-\mu_2(\alpha+\beta)}$$

$$N_2 = m_2 g \cos\beta$$

$$m_{2\min} = \frac{\left(m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha\right) \cdot e^{-\mu_2(\alpha+\beta)} \cdot r}{g \cos\beta \cdot f + g \sin\alpha \cdot r}$$

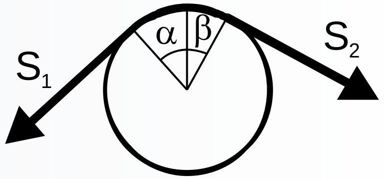
Przykład A – wariant II (ruch w prawo)



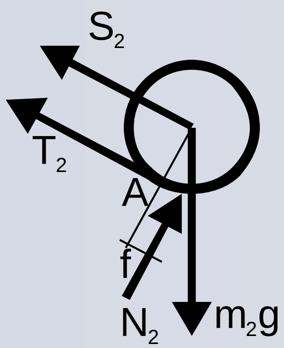
$$\sum X = 0: \quad m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha - S_1 + T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_2(\alpha+\beta)}$$



$$\sum Y = 0: \quad N_2 - m_2 g \cos\beta = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad N_2 \cdot f + S_2 \cdot r - m_2 g \sin\alpha \cdot r = 0$$

Wariant II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$S_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$$

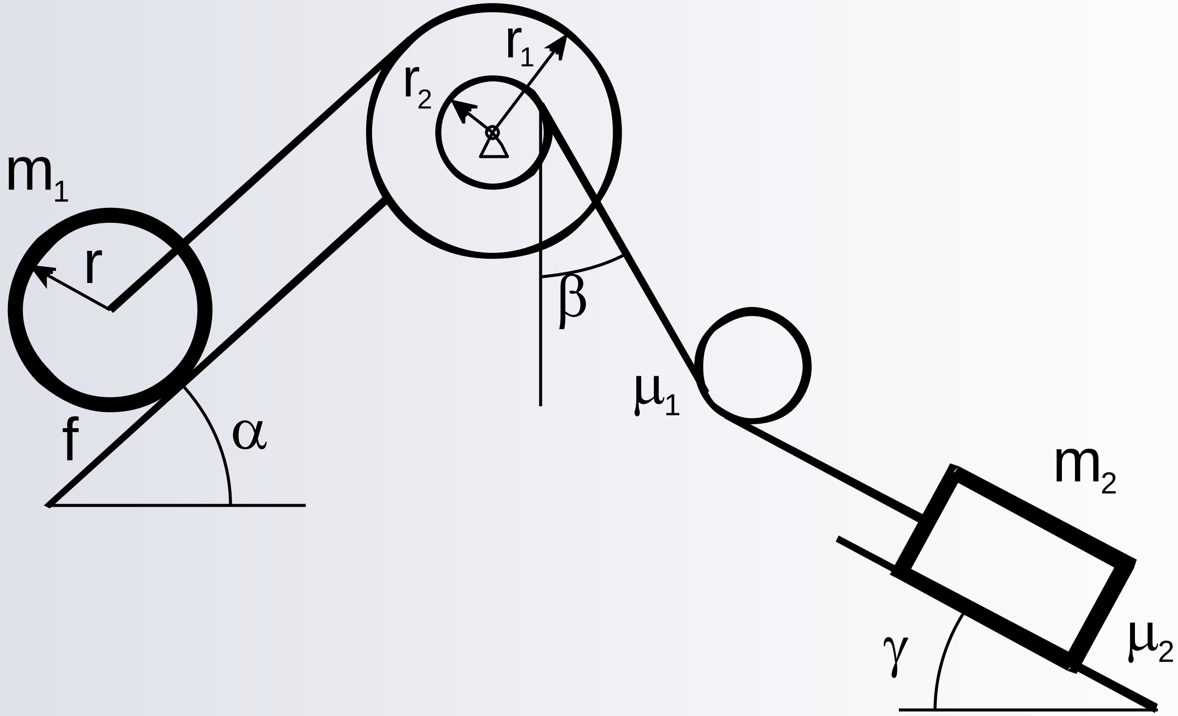
$$S_2 = \left(m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha\right) \cdot e^{\mu_2(\alpha+\beta)}$$

$$N_2 = m_2 g \cos\beta$$

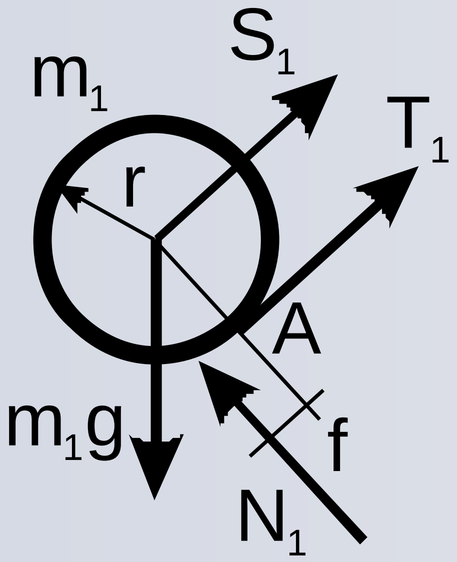
$$m_{2\max} = \frac{\left(m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha\right) \cdot e^{\mu_2(\alpha+\beta)} \cdot r}{g \sin\alpha \cdot r - g \cos\beta \cdot f}$$

Przykład B-I (1)

- Określić maksimum masy m_1, przy którym nie wystąpi jeszcze ruch.

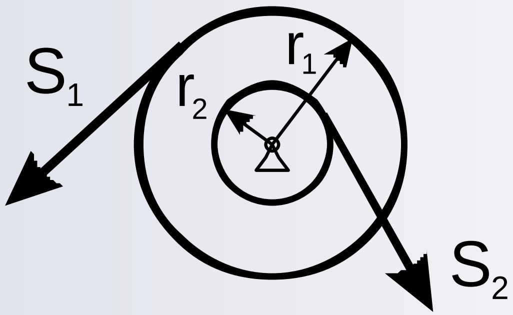


Przykład B-I (2)



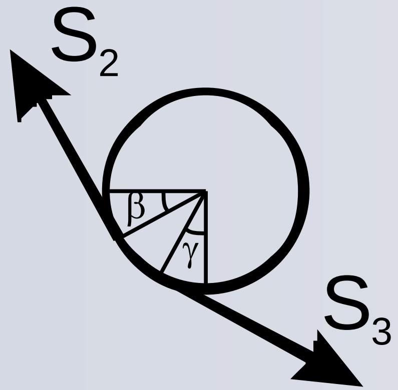
$$\sum Y = 0: \quad N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad N_1 \cdot f + S_1 \cdot r - m_1 g \sin\alpha \cdot r = 0$$

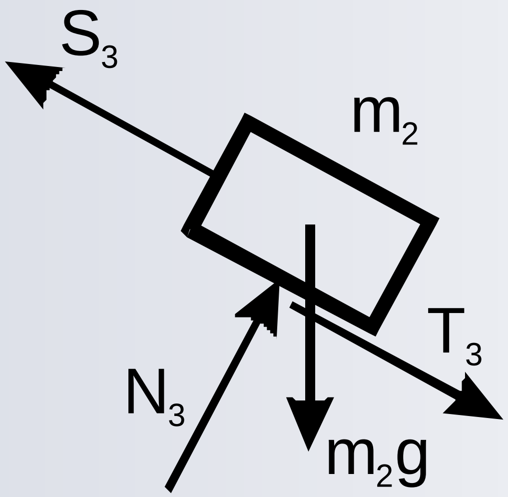


$$\sum M_O = 0: \quad S_1 \cdot r_1 - S_2 \cdot r_2 = 0$$

Przykład B-I (3)



$$S_3 = S_2 \cdot e^{-\mu_1\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}$$



$$\sum X = 0: \quad m_2 \cdot g \cdot \sin\gamma - S_3 + T_3 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_3 - m_2 \cdot g \cdot \cos\gamma = 0$$

$$T_3 = \mu_2 \cdot N_3$$

Przykład B-I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 g \cos\alpha \qquad S_1 = \frac{m_1 g \sin\alpha \cdot r - m_1 g \cos\alpha \cdot f}{r}$$

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{m_1 g \sin\alpha \cdot r - m_1 g \cos\alpha \cdot f}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_3 = S_2 \cdot e^{-\mu_1\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)} = \frac{m_1 g \sin\alpha \cdot r - m_1 g \cos\alpha \cdot f}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{-\mu_1\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}$$

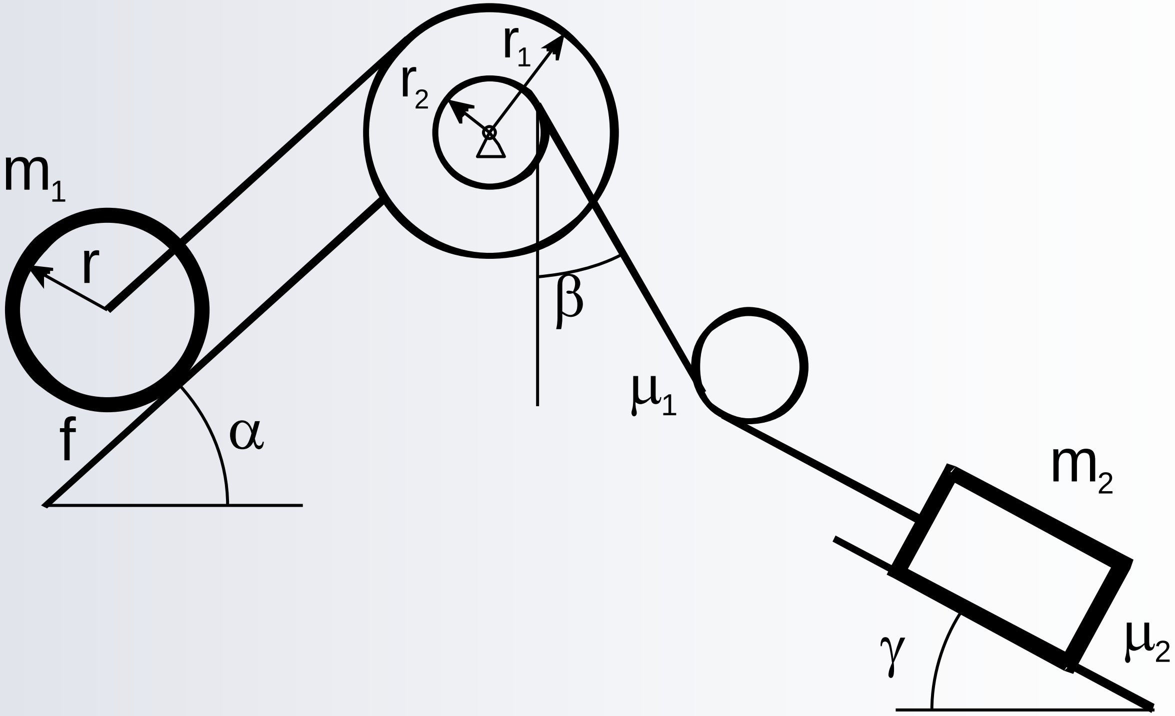
$$N_3 = m_2 \cdot g \cdot \cos\gamma$$

$$T_3 = \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\gamma$$

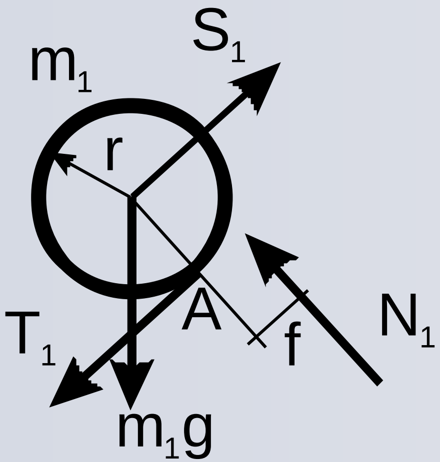
$$m_1 = \frac{\left(m_2 \cdot g \cdot \sin\gamma + \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\gamma\right) \cdot r \cdot r_2}{\left(g \sin\alpha \cdot r - g \cos\alpha \cdot f\right) \cdot r_1} \cdot e^{\mu_1\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}$$

Przykład B-II (1)

- Określić minimum masy m_1, przy którym nie wystąpi jeszcze ruch.

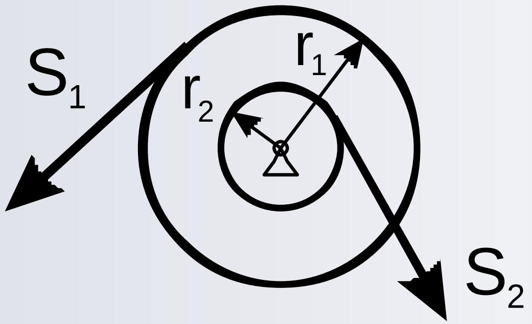


Przykład B-II (2)



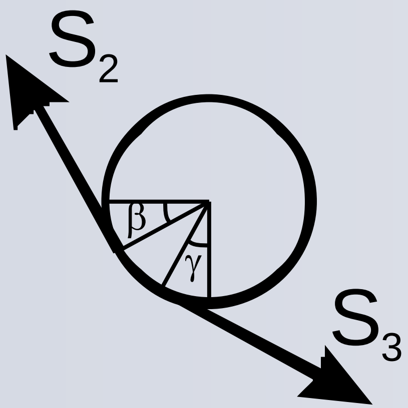
$$\sum Y = 0: \quad N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad N_1 \cdot f - S_1 \cdot r + m_1 g \sin\alpha \cdot r = 0$$

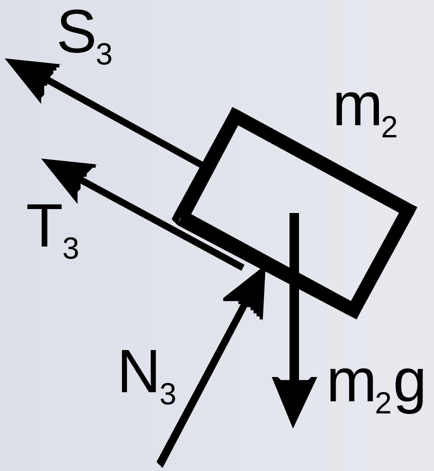


$$\sum M_O = 0: \quad S_1 \cdot r_1 - S_2 \cdot r_2 = 0$$

Przykład B-II (3)



$$S_3 = S_2 \cdot e^{\mu_1\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}$$



$$\sum X = 0: \quad m_2 \cdot g \cdot \sin\gamma - S_3 - T_3 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_3 - m_2 \cdot g \cdot \cos\gamma = 0$$

$$T_3 = \mu_2 \cdot N_3$$

Przykład B-II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 g \cos\alpha \qquad S_1 = \frac{m_1 g \cos\alpha \cdot f + m_1 g \sin\alpha \cdot r}{r}$$

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{m_1 g \cos\alpha \cdot f + m_1 g \sin\alpha \cdot r}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_3 = S_2 \cdot e^{\mu_1\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)} = \frac{m_1 g \cos\alpha \cdot f + m_1 g \sin\alpha \cdot r}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{\mu_1\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}$$

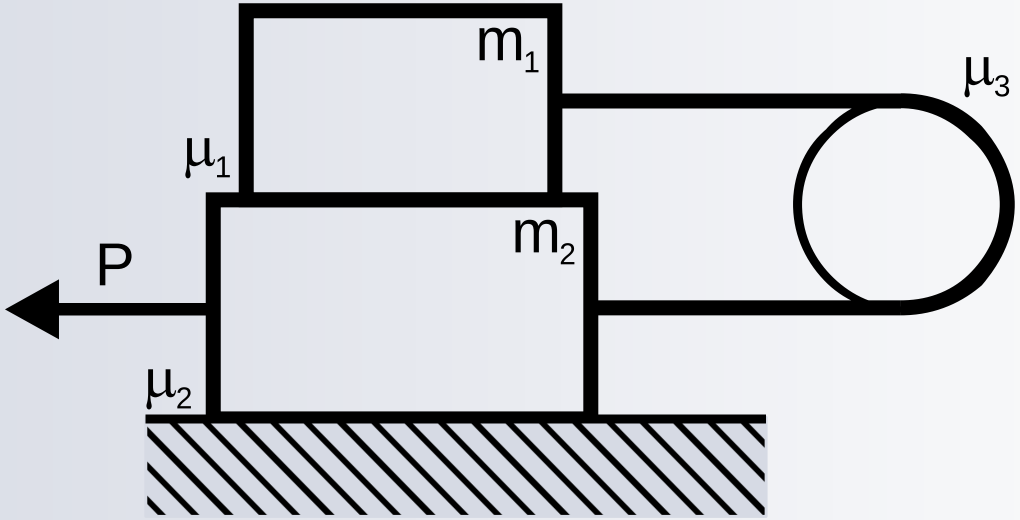
$$N_3 = m_2 \cdot g \cdot \cos\gamma$$

$$T_3 = \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\gamma$$

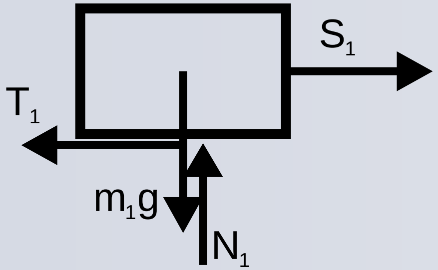
$$m_1 = \frac{\left(m_2 \cdot g \cdot \sin\gamma - \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\gamma\right) \cdot r \cdot r_2}{\left(g \cos\alpha \cdot f + g \sin\alpha \cdot r\right) \cdot r_1} \cdot e^{-\mu_1\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}$$

Przykład C-I (1)

- Określić graniczną wartość siły, przy przekroczeniu której może wystąpić ruch.



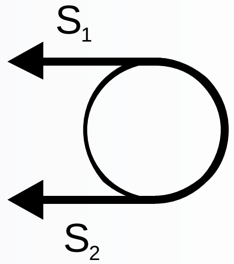
Przykład C-I (2)



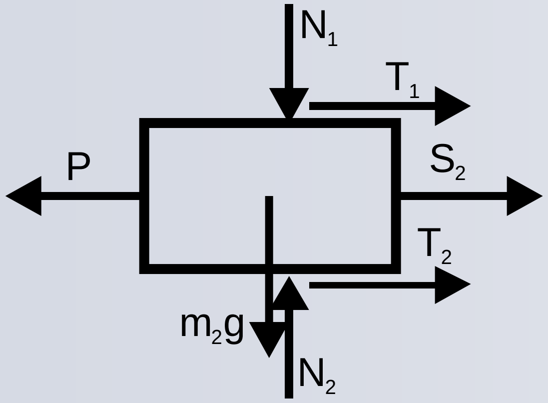
$$\sum X = 0: \quad S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_3 \pi}$$



$$\sum X = 0: \quad P - T_1 - T_2 - S_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_2 - m_2 \cdot g - N_1 = 0$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

Przykład C-I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$S_2 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_3 \pi}$$

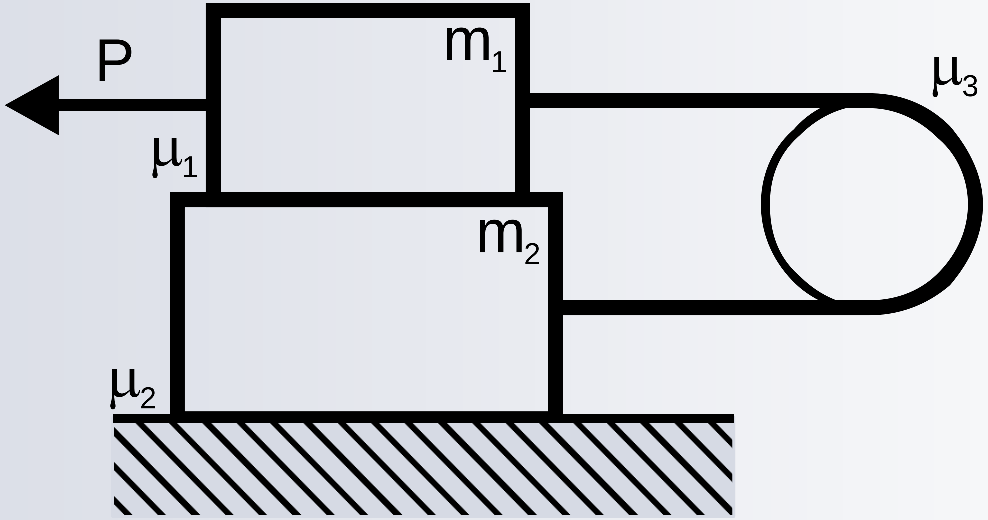
$$N_2 = m_2 \cdot g + m_1 \cdot g$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot \left(m_2 \cdot g + m_1 \cdot g \right)$$

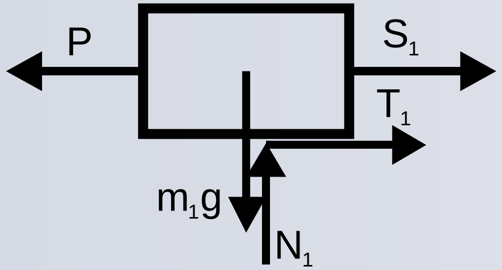
$$P = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g_1 + \mu_2 \cdot \left(m_2 \cdot g + m_1 \cdot g \right)_2 + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_3 \pi}$$

Przykład C-II (1)

- Określić graniczną wartość siły, przy przekroczeniu której może wystąpić ruch.



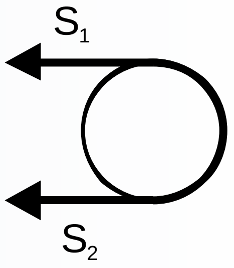
Przykład C-II (2)



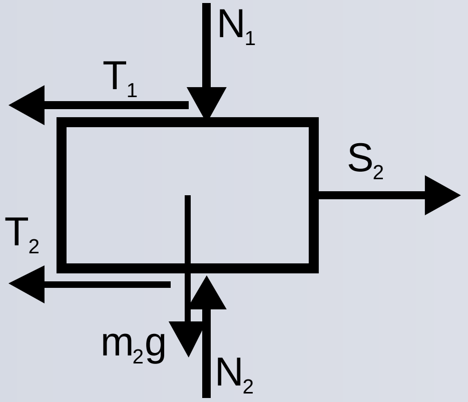
$$\sum X = 0: \quad P - S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu_3 \pi}$$



$$\sum X = 0: \quad S_2 - T_1 - T_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: \quad N_2 - m_2 \cdot g - N_1 = 0$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

Przykład C-II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

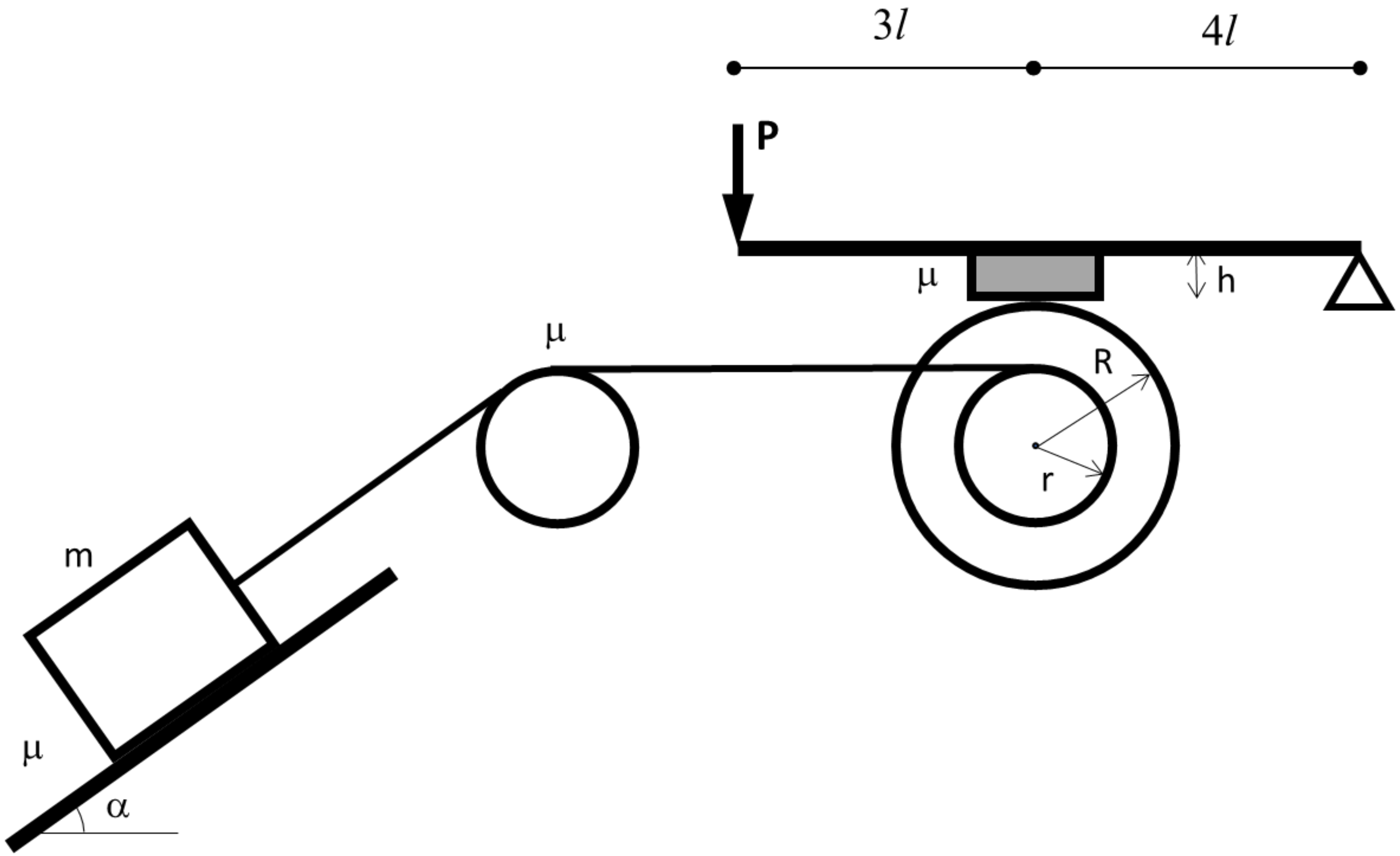
$$N_2 = m_2 \cdot g + m_1 \cdot g$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot \left(m_2 \cdot g + m_1 \cdot g \right)$$

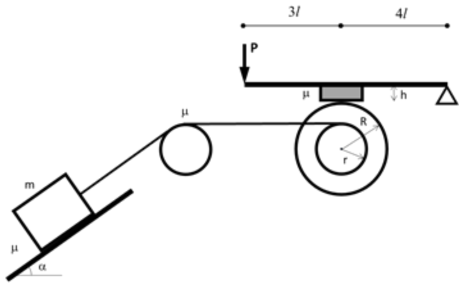
$$S_2 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot \left(m_2 \cdot g + m_1 \cdot g \right)$$

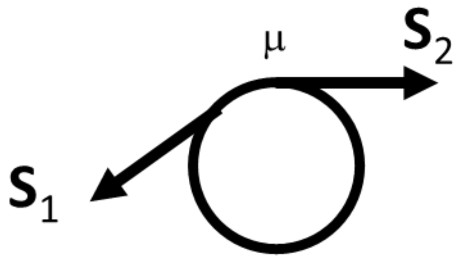
$$S_1 = \left(\mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot \left(m_2 \cdot g + m_1 \cdot g \right) \right) \cdot e^{\mu_3 \pi}$$

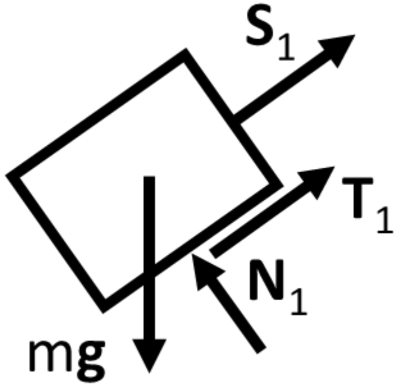
$$P = \left(\mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot \left(m_2 \cdot g + m_1 \cdot g \right) \right) \cdot e^{\mu_3 \pi} + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

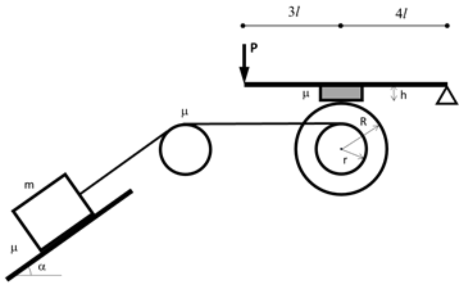


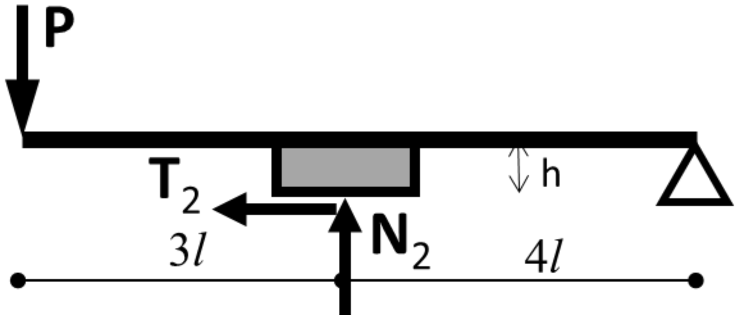
3l
4l
P
μ
h
μ
R
r
m
μ
α

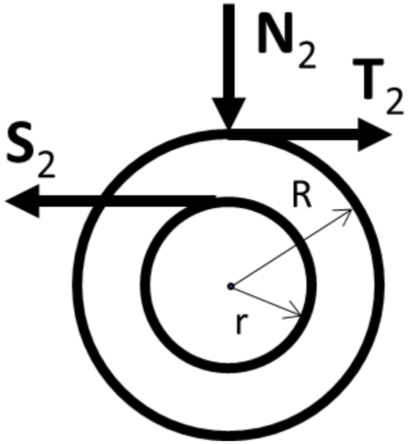

3l
4l
P
μ
h
μ
R
r
m
μ
α


μ
S2
S1


S1
T1
N1
mg


3l
4l
P
μ
h
μ
R
r
m
μ
α


P
h
T2
N2
3l
4l


N2
T2
S2
R
r