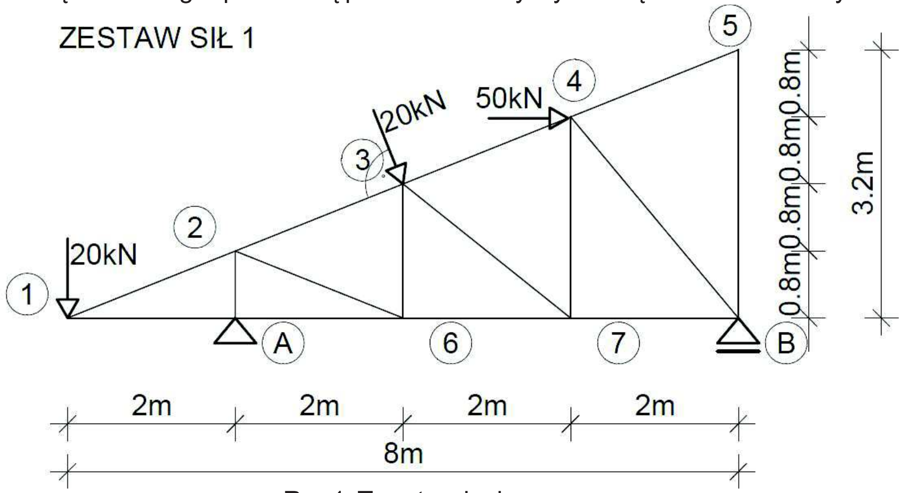
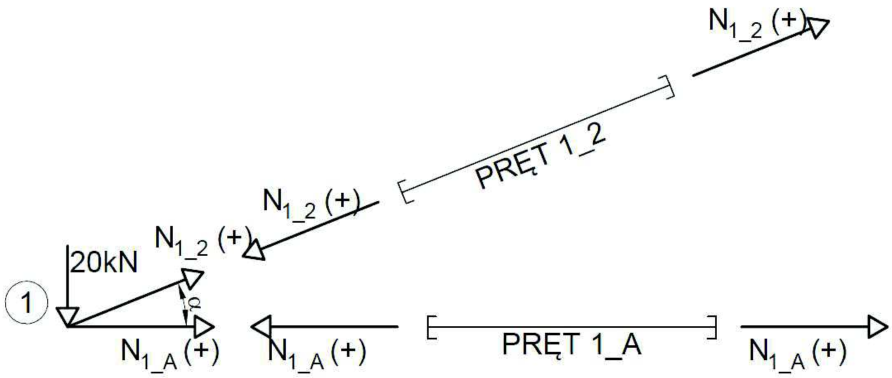
ZADANIE 4
1. Dane podstawowe

Całe zadanie zostanie zrobione dla kratownicy pokazanej na rys.1. Kratownica to ustrój owęzłach przegubowych. W prętach mamy tylko siły osiowe (wzdłuż pręta). Siły dodatnie to takie, które rozciągają pręt, dlatego też siły działające na węzeł (dodatnie) rysujemy od węzła. W drugim punkcie są policzone zostały siły wewnętrzne w kratownicy dla dóch rodzajów sił



Rys.1. Temat zadania

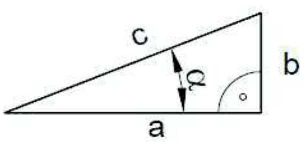


Rys. 2. Oznaczenia sił dodatnich

W zadaniu będą nam potrzebne wymiary i funkcje trygonometryczne kątów. Na rys.1 są pokazane kąty. Po prawej stronie pokazane są też rzuty na kierunek pionowy odległości między węzłami.

Najważniejsze wzory do tych obliczeń:

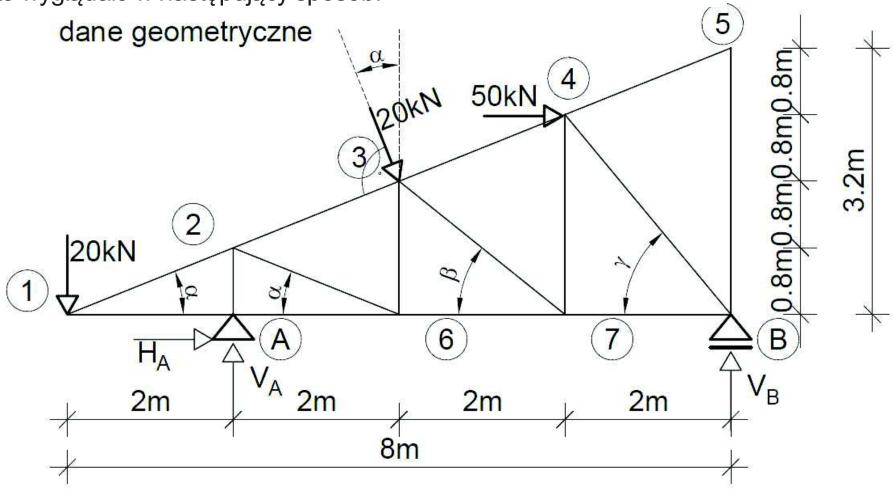
• twierdzenie Pitagorasa pokazane na rysunku

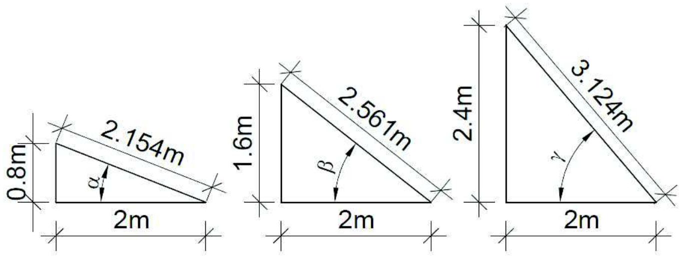


$a^2 + b^2 = c^2$ $\qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$

• funkcje trygonometryczne: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$

W tym zadaniu będzie to wyglądało w następujący sposób:





• dla kąta alfa

$$c := \sqrt{2^2 + 0.8^2} = 2.154$$

$$\sin\alpha := \frac{0.8}{\sqrt{2^2 + 0.8^2}} \qquad \sin\alpha = 0.371$$

$$\cos\alpha := \frac{2}{\sqrt{2^2 + 0.8^2}} \qquad \cos\alpha = 0.928$$

•dla kąta

$$c := \sqrt{2^2 + 1.6^2} = 2.561$$

$$\sin\beta := \frac{1.6}{\sqrt{2^2 + 1.6^2}} \qquad \sin\beta = 0.625$$

$$\cos\beta := \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1.6^2}} \qquad \cos\beta = 0.781$$

•dla kąta

$$c := \sqrt{2^2 + 1.6^2} = 2.561$$

$$\sin\gamma := \frac{2.4}{\sqrt{2^2 + 2.4^2}} \qquad \sin\gamma = 0.768$$

$$\cos\gamma := \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2.4^2}} \qquad \cos\gamma = 0.64$$

2. Wyznaczenia reakcji i sił wewnętrznych w kratownicy

2.1.Policzenie reakcji

Do liczenia reakcji wykorzystuje trzy równania równowagi:

$\Sigma X = 0$ - suma składowych sił wzdłuż osi X musi wynosić zero,

$\Sigma Y = 0$ - suma składowych sił wzdłuż osi Y musi wynosić zero

$\Sigma M = 0$ - suma momentów względem dowolnego punktu od sił zewnętrznych mus wynosić zero

Dwa pierwsze równania zawsze będą wyglądały tak samo. Natomiast przy trzecim zawartość równania zależy od punktu względem którego liczymy moment. Ten punkt powinien być tak wyznaczony, żeby mieć jak najmniej pracy. Najlepiej, jeżeli uda się tak wybrać punkt, żeby w równaniu była tylko jedna reakcja. W tym przypadku może to być punkt A lub B. W zadaniu zostanie wykorzystane równanie momentów względem punktu A, a jako sprawdzenie równowaga momentów względem punktu B

Równania do policzenia rekacji

Najpierw wykorzystuejemy sumę rzutów sił na oś X

$\Sigma X = 0$ $\quad 50 + 20\cdot\cos\alpha + H_A = 0$

$H_A := -20\cdot\sin\alpha - 50 \qquad H_A = -57.428$

Następnie suma rzutów sił na oś Y

$\Sigma Y = 0$ $\quad -20 - 20\cdot\cos\alpha + V_A + V_B = 0$ tu są dwie niewiadome i nie mogę narazie ich wyznaczyć

Wykorzystuję sumę momentów względem punku A

$\Sigma M_A = 0$ $\quad -20\cdot 2 + 20\cdot\cos\alpha\cdot 2 + 20\cdot\sin\alpha\cdot 1.6 + 50\cdot 2.4 - V_B\cdot 6 = 0$

$40\cdot\cos\alpha - 6\cdot V_B + 32.0\cdot\sin\alpha + 80.0 = 0$

$$V_B := \frac{(40\cdot\cos\alpha + 32.0\cdot\sin\alpha + 80.0)}{6}$$

$V_B = 21.504$

Wracamy do równania na ΣY i podstawiamy

$-20 - 20\cdot\cos\alpha + V_A + V_B = 0$

$V_A := 20\cdot\cos\alpha - V_B + 20$

$V_A = 17.066$

Wykonujemy sprawdzenie jako suma momentów względem punktu B

$\Sigma M_B = 0$ $\quad -20\cdot 8 - 20\cdot\cos\alpha\cdot 4 + 20\cdot\sin\alpha\cdot 1.6 + 50\cdot 2.4 + V_A\cdot 6 = 0$

Jak widać błąd wyszedł zerowy (ponieważ przykład jest w programie MATHCAD 10^{-14} jest zero numeryczne)

Zwracam uwagę na to, że w obliczeniach reakcji nie wprowadzamy do równań temperatury. Podobnie będzie podczas obliczeń sił normalnych

2.2. Obliczenia sił wewnętrznych

W prętach kratownicy są tylko siły normalne. Do ich wyznaczenia stosujemy dwie metody:
- metoda równoważenia sił w węźle
- metoda przekrojów (Rittera).

2.2.1. Obliczenia sił wewnętrznych - METODA RÓWNOWAŻENIE WĘZŁÓW

W metodzie równoważenia węzłów wyjmujemy z kratownicy węzeł. Siłami działającymi na węzeł są siły normalne z prętów oraz siły zewnętrzne (reakcje, obciążenia). Zwroty sił normalnych zawsze rysujemy od węzła a sił zewnętrznych tak, jak działają na węzeł. Takie
układy sił tworzą układy sił zbieżnych. Inaczej mówiąc kierunku wszystkich sił przecinają się w jednym punkcie. Dla takich zestawów sił można napisać dwa równania równowagi:

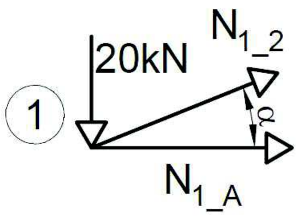
ΣX=0 - suma składowych sił wzdłuż osi X musi wynosić zero,

ΣY = 0 - suma składowych sił wzdłuż osi Y musi wynosić zero.

Zaczynamy od węzła, gdzie mamy do wyznaczenia tylko dwie niewiadome. Jak można zauważyć możemy zacząć od węzła 5 $N_{5\_4} := 0$ mamy dwie siły niewiadome N_{5_4} oraz N_{5_B}. Jak widać węzeł jest nieobciążony żadną siłą zewnętrzną więc obie siły wyniosą 0

$N_{5\_B} := 0$

Możemy też z tego sformyłować pierwszą zasadę na oznaczenie prętów zerowych w kratownicy
- jeżeli w węźle schodzą się dwa pręty i węzeł jest nieobciążaony to oba pręty są zerowe
Możemy także sformyłować drugą zasadęna oznaczenie prętów zerowych w kratownicy
- jeżeli w węźle schodzą się trzy pręty i dwa są współlniowe (kąt między nimi wynosi 180 stopni) to trzeci pręt jest zerowy
Węzeł 1 az zacząć albo od węzła 1 lub węzła B (w obu przypadkach mam 2 niewiadome siły)



Ponieważ obie siły mają składowe na kierunek osi X, zacznę od symy na oś Y

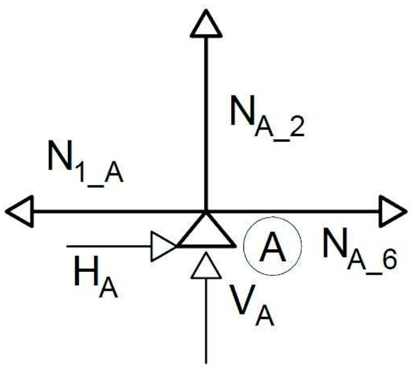
$\Sigma Y = 0 \qquad -20 + N_{1\_2} \cdot \sin\alpha = 0$

$N_{1\_2} := \dfrac{20}{\sin\alpha} = 53.852$

$\Sigma X = 0 \qquad N_{1\_2} \cdot \cos\alpha + N_{1\_A} = 0$

$N_{1\_A} := -N_{1\_2} \cdot \cos\alpha = -50$

Węzeł A



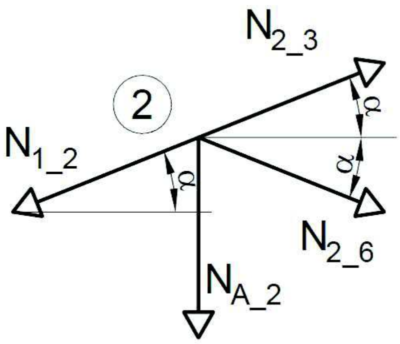
$\Sigma X = 0 \qquad N_{A\_6} + H_A - N_{1\_A} = 0$

$N_{A\_6} := N_{1\_A} - H_A = 7.428$

$\Sigma Y = 0 \qquad N_{A\_2} + V_A = 0$

$N_{A\_2} := -V_A = -17.066$

Węzeł 2



Niestety w tym przypadku mamy układ dwóch równań na wyznaczenie sił

$\Sigma X = 0 \qquad N_{2\_6} \cdot \cos\alpha + N_{2\_3} \cdot \cos\alpha - N_{1\_2} \cdot \cos\alpha = 0$

$N_{2\_6} = N_{1\_2} - N_{2\_3}$

$\Sigma Y = 0 \qquad -N_{2\_6} \cdot \sin\alpha + N_{2\_3} \cdot \sin\alpha - N_{1\_2} \cdot \sin\alpha - N_{A\_2} = 0$

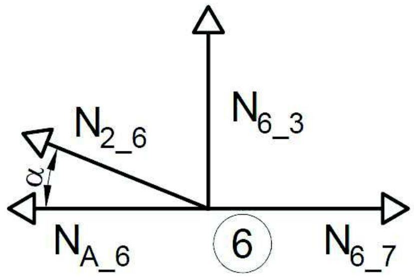
$-\left(N_{1\_2} - N_{2\_3}\right) \cdot \sin\alpha + N_{2\_3} \cdot \sin\alpha - N_{1\_2} \cdot \sin\alpha - N_{A\_2} = 0$

$$N_{2\_3} := \frac{N_{A\_2} + 2 \cdot N_{1\_2} \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin\alpha} = 30.876$$

Wracamy do równania ΣX=0

$$N_{2\_6} := N_{1\_2} - N_{2\_3} = 22.975$$

Węzeł 6



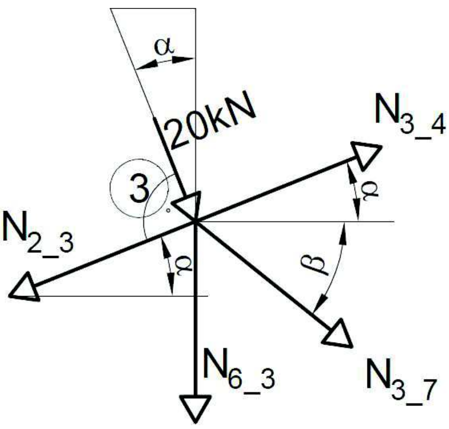
$\Sigma X = 0$ $\qquad -N_{A\_6} - N_{2\_6} \cdot \cos\alpha + N_{6\_7} = 0$

$$N_{6\_7} := N_{A\_6} + N_{2\_6} \cdot \cos\alpha = 28.76$$

$\Sigma Y = 0$ $\qquad N_{2\_6} \cdot \sin\alpha + N_{6\_3} = 0$

$$N_{6\_3} := -N_{2\_6} \cdot \sin\alpha = -8.533$$

Węzeł 3



Niestety w tym przypadku mamy układ dwóch równań na wyznaczenie sił

$\Sigma X = 0$ $\qquad N_{3\_4} \cdot \cos\alpha - N_{2\_3} \cdot \cos\alpha + N_{3\_7} \cdot \cos\beta + 20\sin\alpha = 0$

$$N_{3\_4} = -\frac{20 \cdot \sin\alpha - N_{2\_3} \cdot \cos\alpha + N_{3\_7} \cdot \cos\beta}{\cos\alpha}$$

$\Sigma Y = 0$ $\qquad -N_{6\_3} - N_{2\_3} \cdot \sin\alpha + N_{3\_4} \cdot \sin\alpha - N_{3\_7} \cdot \sin\beta - 20 \cdot \cos\alpha = 0$

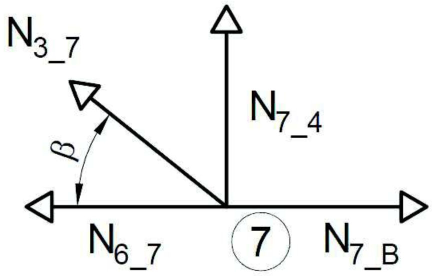
$$-N_{6\_3} - N_{2\_3} \cdot \sin\alpha + -\frac{20 \cdot \sin\alpha - N_{2\_3} \cdot \cos\alpha + N_{3\_7} \cdot \cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha - N_{3\_7} \cdot \sin\beta - 20 \cdot \cos\alpha = 0$$

$$N_{3\_7} := -\frac{20 \cdot \cos\alpha^2 + N_{6\_3} \cdot \cos\alpha + 20 \cdot \sin\alpha^2}{\cos\alpha \cdot \sin\beta + \cos\beta \cdot \sin\alpha} = -13.882$$

Wracamy do równania ΣX=0

$$N_{3\_4} := -\frac{20 \cdot \sin\alpha - N_{2\_3} \cdot \cos\alpha + N_{3\_7} \cdot \cos\beta}{\cos\alpha} = 34.551$$

Węzeł 7



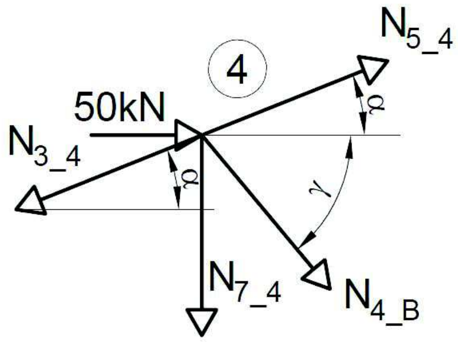
$\Sigma X = 0$ $\quad -N_{6\_7} - N_{3\_7} \cdot \cos\beta + N_{7\_B} = 0$

$N_{7\_B} := N_{6\_7} + N_{3\_7} \cdot \cos\beta = 17.92$

$\Sigma Y = 0$ $\quad N_{3\_7} \cdot \sin\beta + N_{7\_4} = 0$

$N_{7\_4} := -\left(N_{3\_7} \cdot \sin\beta\right) = 8.672$

Węzeł 4



Tutaj już wiemy że

N_{5_4}=0

$\Sigma X = 0$ $\quad -N_{3\_4} \cdot \cos\alpha + N_{5\_4} \cdot \cos\alpha + N_{4\_B} \cdot \cos\gamma + 50 = 0$ $\qquad N_{5\_4} = 0$

$$N_{4\_B} := -\frac{N_{5\_4} \cdot \cos\alpha - N_{3\_4} \cdot \cos\alpha + 50}{\cos\gamma} = -27.992$$

$\Sigma Y = 0$ $\quad -N_{7\_4} - N_{3\_4} \cdot \sin\alpha + N_{5\_4} \cdot \sin\alpha - N_{4\_B} \cdot \sin\gamma = 0$

$$N_{4\_B} := -\frac{N_{7\_4} + N_{3\_4} \cdot \sin\alpha - N_{5\_4} \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = -27.992$$

Jak widzimy z jednego i z drugiego równania wyszło to samo, czyli wykonalismy sprawdzenie. Jeszcze dodatkowo możemy sprawdzić węzeł B

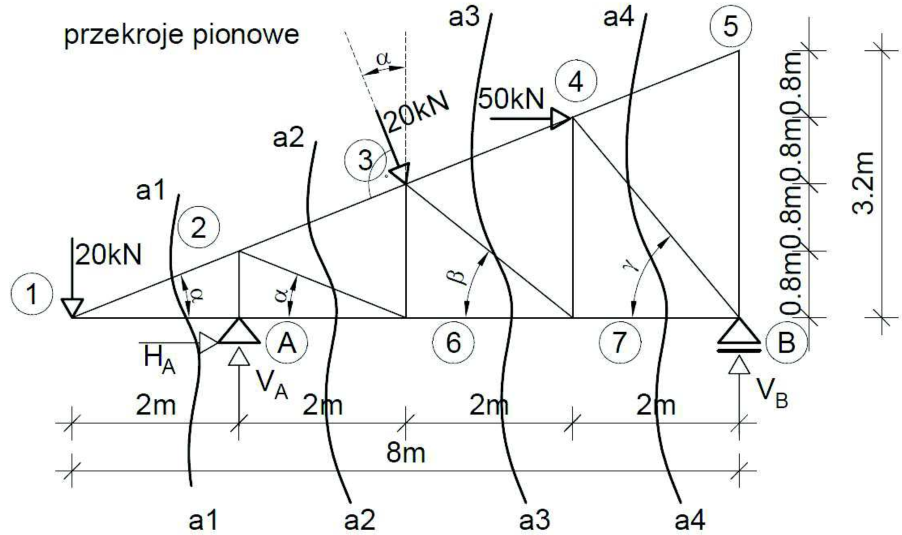
$\Sigma X = 0$ $\quad -N_{4\_B} \cdot \cos\gamma - N_{7\_B} = 0$ $\qquad$ Wyszło sprawdzenie

$\Sigma Y = 0$ $\quad N_{4\_B} \cdot \sin\gamma + V_B = 0$ $\qquad$ Wyszło sprawdzenie

Zakończyliśmy wyznaczanie sił pierwszą metodą - **RÓWNOWAŻENIA WĘZŁÓW**

2.2.2. Obliczenia sił wewnętrznych - METODA PRZEKROJÓW (RITTERA)

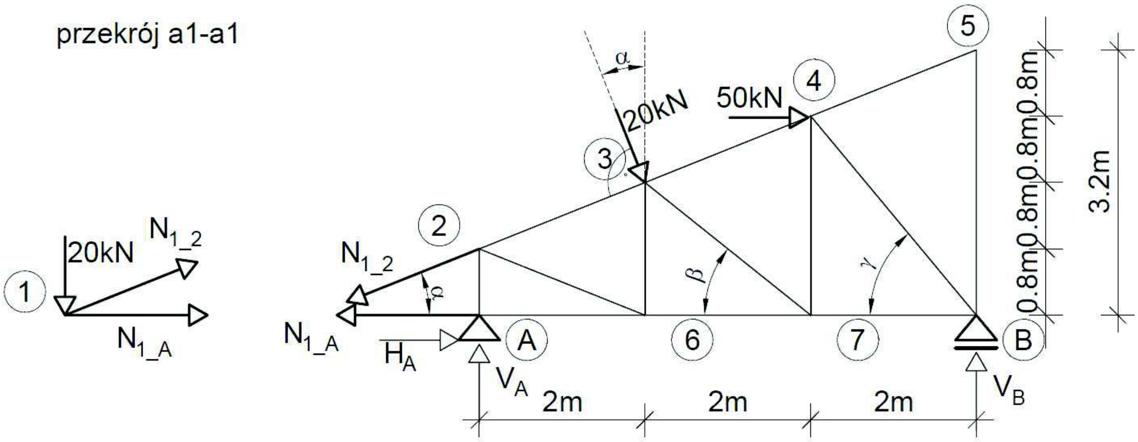
W metodzie przekrojów (Rittera) wykonujemy przekrój przez 3 pręty kratownicy. Na rys.3 pokazane są przekroje pionowe. Siły normalne zawsze rysujemy od węzłów (jest to ozaczenie jej dodatniej wartości). Przekrój przez kratownicę oznacza wyrzucenie tych prętów i zamodelowanie ich poprzez wstawienie sił w węzłach.



Każda z części ma byćw równowadze a więc musi spełniać trzy warunki równowagi. Dlatego kratownicę dzielimy przez trzy pręty, bo mamy równania równowagi, z których możemy wyznaczyć trzy niewiadome. Jednak pisząc równania równowagi, w przypadku tej metody, zawsze piszemy tak, aby w równaniu była jedna niewiadoma – jedna siła normalna. Oznacza to, że najczęściej piszemy równania momentów względem odpowiedniego punktu. W przekroju są trzy siły normalne. My liczymy jedną, więc ten punkt jest dobierany tak, aby dwie pozostałe siły dawały względem wybranego punktu moment równy zero. Takim punktem jest punkt przecięcia kierunków działania dwóch sił, których nie chcemy wstawiaćdo równania. Jednostki pomijamy. Możemy korzystać z lewej lub prawej strony przekroju - powinno nam wyjść te same wartości sił wewnętrznych.

Przekrój a1-a1

Zaczynamy obliczenia od siły w pręcie N_{1_2} z lewej strony. Jak widać jest to ten sam przypadek jak równoważenie węzła 1. Jeszcze raz możemy przepisać równania.



$\Sigma Y^L = 0$ $\qquad -20 + N_{1\_2} \cdot \sin\alpha = 0$

$$N_{1\_2} := \frac{20}{\sin\alpha} = 53.852$$

$\Sigma X^L = 0$ $\qquad N_{1\_2} \cdot \cos\alpha + N_{1\_A} = 0$

$$N_{1\_A} := -N_{1\_2} \cdot \cos\alpha = -50$$

Możemy także policzyć te siły z prawej strony, lecz jest to mało opłacalne, gdyż występuje tam dużo więcej sił.

$\Sigma Y^P = 0$ $\qquad -20\cos\alpha - N_{1\_2} \cdot \sin\alpha + V_A + V_B = 0$

$$N_{1\_2} := \frac{V_A + V_B - 20 \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = 53.852$$

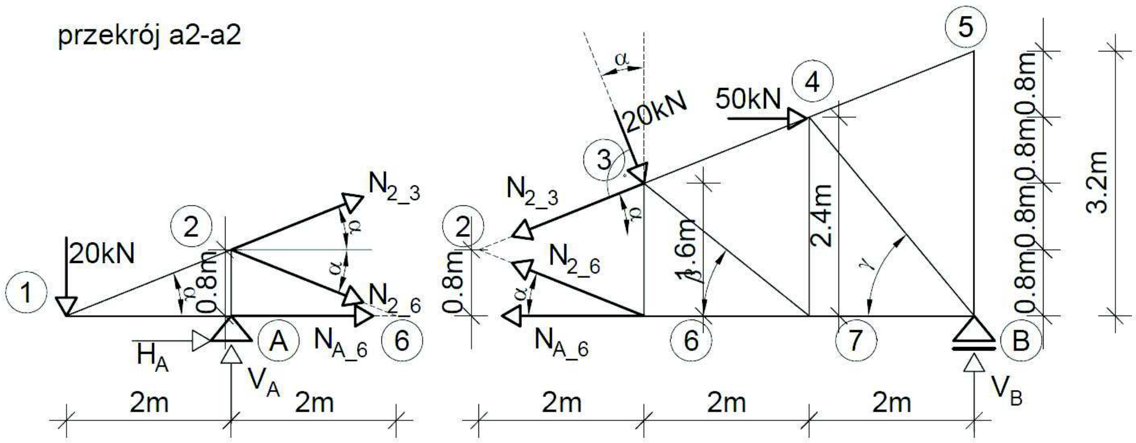
$\Sigma X^P = 0 \qquad -N_{1\_2}\cdot\cos\alpha - N_{1\_A} + 20\sin\alpha + 50 + H_A = 0$

$N_{1\_A} := H_A + 20\cdot\sin\alpha - N_{1\_2}\cdot\cos\alpha + 50 = -50$

Jak widać wyszły te same wartości. Wykorzystaliśmy tutaj sumy rzutów sił lewej i prawej części.

Przekrój a2-a2

Zaczynamy obliczenia od siły w pręcie N_{2_3} z lewej strony. Składowe sił skośnych oczywiście musimy rozłożyć na kierunki globalne X oraz Y. Zapisujemy równanie momentów względem punktu, który jest przecięciem kierunków dwóch pozostałych sił czyli N_{2_6} i N_{A_6}. Tym punktem jest węzeł 6 a równanie momentów jest wykonywane na razie dla lewej strony przekroju a2- a2.



$\Sigma M_6^L = 0 \qquad -20\cdot 4 + N_{2\_3}\cdot\cos\alpha\cdot 0.8 + N_{2\_3}\cdot\sin\alpha\cdot 2 + V_A\cdot 2 = 0$

$$N_{2\_3} := -\frac{1.0\cdot(5.0\cdot V_A - 200.0)}{2.0\cdot\cos\alpha + 5.0\cdot\sin\alpha} = 30.876$$

Zapisując równania z prawej strony przekroju, także możemy policzyć tę siłę z równania momentu względem węzła 6

$\Sigma M_6^P = 0 \qquad 20\sin\alpha\cdot 1.6 + 50\cdot 2.4 - N_{2\_3}\cdot\cos\alpha\cdot 1.6 - V_B\cdot 4 = 0$

$$\frac{0.625\cdot(32.0\cdot\sin\alpha - 4.0\cdot V_B + 120.0)}{\cos\alpha} = 30.876$$

Jak widzimy wyszło dokładnie to samo. Teraz wyznaczymy siłę N_{2_6} dla częsci lewej i prawej. Pozostałe dwie siły przecinają się w węźle 1.

$\Sigma M_1^L = 0 \qquad N_{2\_6}\cdot\cos\alpha\cdot 0.8 + N_{2\_6}\cdot\sin\alpha\cdot 2 - V_A\cdot 2 = 0$

$$N_{2\_6} := \frac{5.0\cdot V_A}{2.0\cdot\cos\alpha + 5.0\cdot\sin\alpha} = 22.975$$

Zapisując równania z prawej strony przekroju, także możemy policzyć tę siłę z równania momentu względem węzła 1

$\Sigma M_1^P = 0 \qquad 20\sin\alpha\cdot 1.6 + 20\cos\alpha\cdot 4 + 50\cdot 2.4 - N_{2\_6}\cdot\sin\alpha\cdot 4 - V_B\cdot 8 = 0$

$$\frac{20.0\cdot\cos\alpha - 2.0\cdot V_B + 8.0\cdot\sin\alpha + 30.0}{\sin\alpha} = 22.975$$

Jak widzimy wyszło dokładnie to samo. Teraz wyznaczymy siłę N_{A_6} dla częsci lewej i prawej. Pozostałe dwie siły przecinają się w węźle 2.

$\Sigma M_2^L = 0 \qquad -20\cdot 2 - H_A\cdot 0.8 - N_{A\_6}\cdot 0.8 = 0$

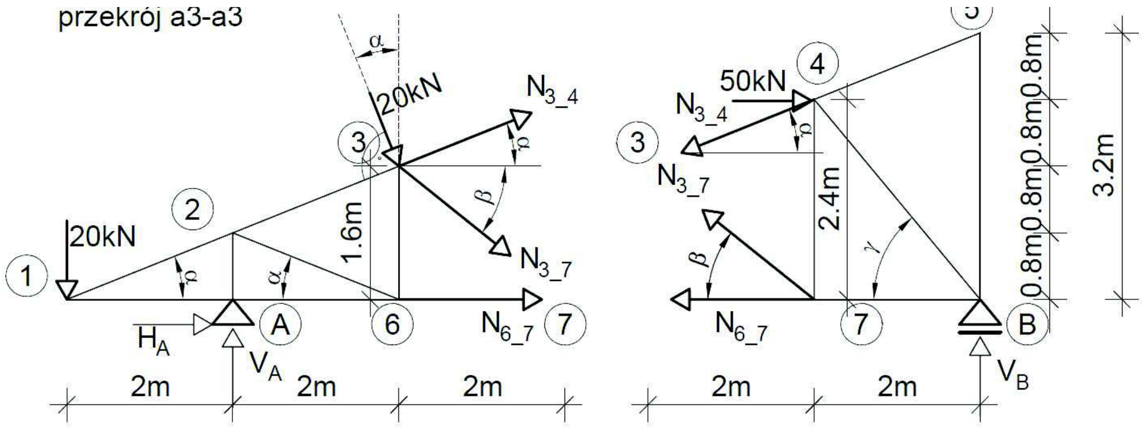
$N_{A\_6} := -H_A - 50.0 = 7.428$

Zapisując równania z prawej strony przekroju, także możemy policzyć tę siłę z równania momentu względem węzła 2

$\Sigma M_2^P = 0 \qquad 20\sin\alpha\cdot 0.8 + 20\cos\alpha\cdot 2 + 50\cdot 1.6 + N_{A\_6}\cdot 0.8 - V_B\cdot 6 = 0$

$N_{A\_6} := 7.5\cdot V_B - 50.0\cdot\cos\alpha - 20.0\cdot\sin\alpha - 100.0 = 7.428$

Przekrój a3-a3
Zaczynamy obliczenia od siły w pręcie N_{3_4} z lewej strony. Składowe sił skośnych oczywiście musimy rozłożyć na kierunki globalne X oraz Y. Zapisujemy równanie momentów względem punktu, który jest przecięciem kierunków dwóch pozostałych siłczyli N_{3_7} i N_{6_7}. Tym punktem jest węzeł 7 a równanie momentów jest wykonywane na razie dla lewej strony przekroju a3-a3.



$\Sigma M_7^{\,L} = 0 \qquad -20\cdot 6 + 20\sin\alpha\cdot 1.6 - 20\cos\alpha\cdot 2 + N_{3\_4}\cdot\cos\alpha\cdot 1.6 + N_{3\_4}\cdot\sin\alpha\cdot 2 + V_A\cdot 4 = 0$

$$N_{3\_4} := \frac{1.0\cdot(40.0\cdot\cos\alpha - 4.0\cdot V_A - 32.0\cdot\sin\alpha + 120.0)}{1.6\cdot\cos\alpha + 2.0\cdot\sin\alpha} = 34.551$$

Zapisując równania z prawej strony przekroju, także możemy policzyć tę siłę z równania momentu względem węzła 7

$\Sigma M_7^{\,P} = 0 \qquad 50\cdot 2.4 - N_{3\_4}\cdot\cos\alpha\cdot 2.4 - V_B\cdot 2 = 0$

$$N_{3\_4} := -\frac{2\cdot V_B - 120}{2.4\cos\alpha} = 34.551$$

Jak widzimy wyszło dokładnie to samo. Teraz wyznaczymy siłę N_{3_7} dla częsci lewej i prawej. Pozostałe dwie siły przecinają się w węźle 1.

$\Sigma M_1^{\,L} = 0 \qquad N_{3\_7}\cdot\cos\beta\cdot 1.6 + N_{3\_7}\cdot\sin\beta\cdot 4 - V_A\cdot 2 + 20\sin\alpha\cdot 1.6 + 20\cos\alpha\cdot 4 = 0$

$$N_{3\_7} := -\frac{80.0\cdot\cos\alpha - 2.0\cdot V_A + 32.0\cdot\sin\alpha}{(1.6\cdot\cos\beta + 4.0\cdot\sin\beta)} = -13.882$$

Zapisując równania z prawej strony przekroju, także możemy policzyć tę siłę z równania momentu względem węzła 1

$\Sigma M_1^{\,P} = 0 \qquad 50\cdot 2.4 - N_{3\_7}\cdot\sin\beta\cdot 6 - V_B\cdot 8 = 0$

$$N_{3\_7} := \frac{-8\cdot V_B + 120}{6\sin\beta} = -13.882$$

Jak widzimy wyszło dokładnie to samo. Teraz wyznaczymy siłę N_{6_7} dla częsci lewej i prawej. Pozostałe dwie siły przecinają się w węźle 3.

$\Sigma M_3^{\,L} = 0 \qquad -20\cdot 4 - H_A\cdot 1.6 + V_A\cdot 2 - N_{6\_7}\cdot 1.6 = 0$

$$N_{6\_7} := 1.25\cdot V_A - 1.0\cdot H_A - 50.0 = 28.76$$

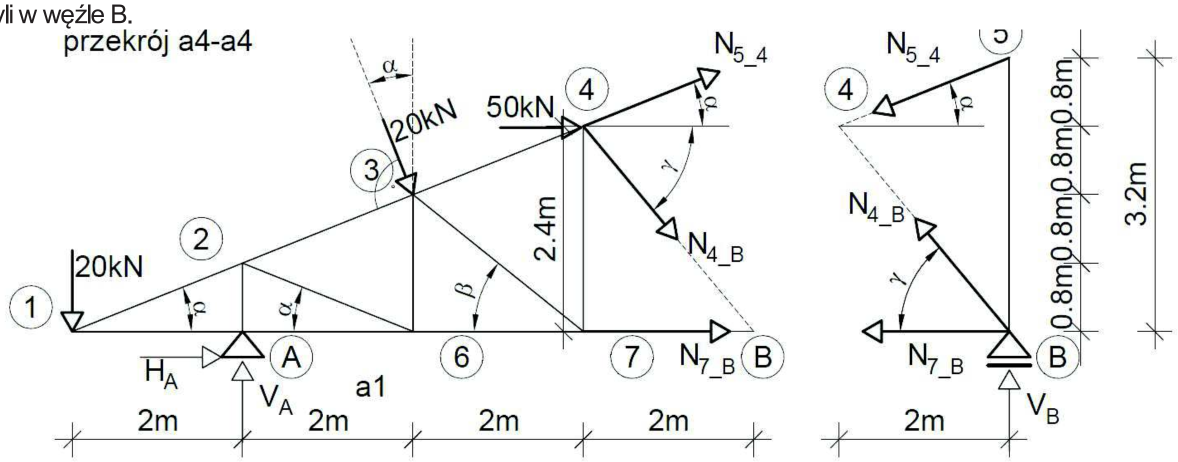
Zapisując równania z prawej strony przekroju, także możemy policzyć tę siłę z równania momentu względem węzła 3

$\Sigma M_3^{\,P} = 0 \qquad 50\cdot 0.8 + N_{6\_7}\cdot 1.6 - V_B\cdot 4 = 0$

$$N_{6\_7} := 2.5\cdot V_B - 25.0 = 28.76$$

Przekrój a4-a4
Zaczynamy obliczenia od siły w pręcie N_{5_4} z prawej strony. Składowe sił skośnych oczywiście musimy rozłożyć na kierunki

globalne X oraz Y. Zapisujemy równanie momentów względem punktu, który jest przecięciem kierunków dwóch pozostałych sił czyli w węźle B.



$$\Sigma M_B^{\ P} = 0 \qquad -N_{5\_4}\cdot\cos\alpha\cdot 3.2 = 0$$

$$N_{5\_4} := 0$$

Możemy także wykonać sprawdzenie czy rzeczywiście ta siła wynosi 0 rozpatrując lewą stronę

$$\Sigma M_B^{\ L} = 0 \qquad -20\cdot 8 + 20\sin\alpha\cdot 1.6 - 20\cos\alpha\cdot 4 + N_{5\_4}\cdot\cos\alpha\cdot 2.4 + N_{5\_4}\cdot\sin\alpha\cdot 2 + 50\cdot 2.4 + V_A\cdot 6 = 0$$

$$N_{5\_4} := -\frac{6.0\cdot V_A - 80.0\cdot\cos\alpha + 32.0\cdot\sin\alpha - 40.0}{2.4\cdot\cos\alpha + 2.0\cdot\sin\alpha} = 0$$

Jak widzimy wyszło dokładnie 0. Teraz wyznaczymy siłę N_{4_B} dla częsci lewej i prawej. Pozostałe dwie siły przecinają się w

$$\Sigma M_1^{\ L} = 0 \qquad N_{4\_B}\cdot\cos\gamma\cdot 2.4 + N_{4\_B}\cdot\sin\gamma\cdot 6 - V_A\cdot 2 + 20\sin\alpha\cdot 1.6 + 20\cos\alpha\cdot 4 + 50\cdot 2.4 = 0$$

$$N_{4\_B} := -\frac{200.0\cdot\cos\alpha - 5.0\cdot V_A + 80.0\cdot\sin\alpha + 300.0}{6.0\cdot\cos\gamma + 15.0\cdot\sin\gamma} = -27.992$$

Zapisując równania z prawej strony przekroju, także możemy policzyć tę siłę z równania momentu względem węzła 1

$$\Sigma M_1^{\ P} = 0 \qquad -N_{4\_B}\cdot\sin\gamma\cdot 8 - V_B\cdot 8 = 0$$

$$N_{4\_B} := \frac{-V_B}{\sin\gamma} \qquad N_{4\_B} = -27.992$$

Jak widzimy wyszło dokładnie to samo. Teraz wyznaczymy siłę N_{7_B} dla częsci lewej i prawej. Pozostałe dwie siły przecinają się w węźle 4.

$$\Sigma M_4^{\ L} = 0 \qquad -20\cdot 6 - H_A\cdot 2.4 + V_A\cdot 4 - 20\sin\alpha\cdot 0.8 - 20\cos\alpha\cdot 2 - N_{7\_B}\cdot 2.4 = 0$$

$$4\cdot V_A - 2.4\cdot N_{7\_B} - 2.4\cdot H_A - 40\cdot\cos\alpha - 16.0\cdot\sin\alpha - 120 = 0$$

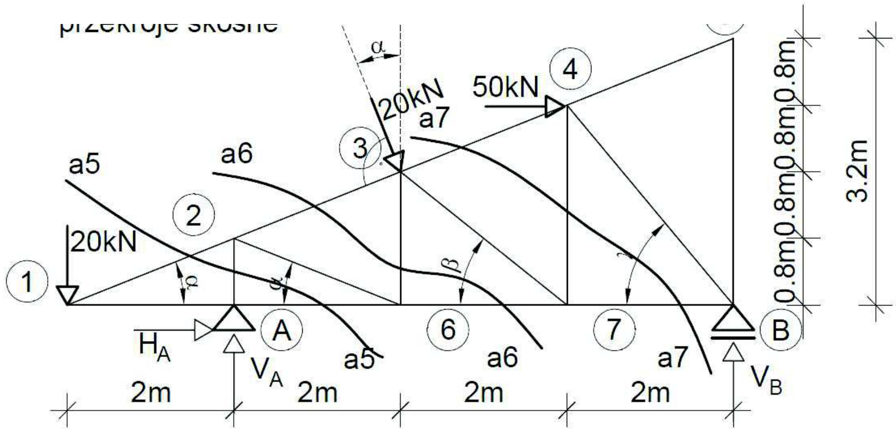
$$N_{7\_B} := \frac{4\cdot V_A - 2.4\cdot H_A - 40\cdot\cos\alpha - 16.0\cdot\sin\alpha - 120}{2.4} = 17.92$$

Zapisując równania z prawej strony przekroju co jest oczywiście prostsze, także możemy policzyć tę siłę z równania momentu względem węzła 4

$$\Sigma M_4^{\ P} = 0 \qquad N_{7\_B}\cdot 2.4 - V_B\cdot 2 = 0$$

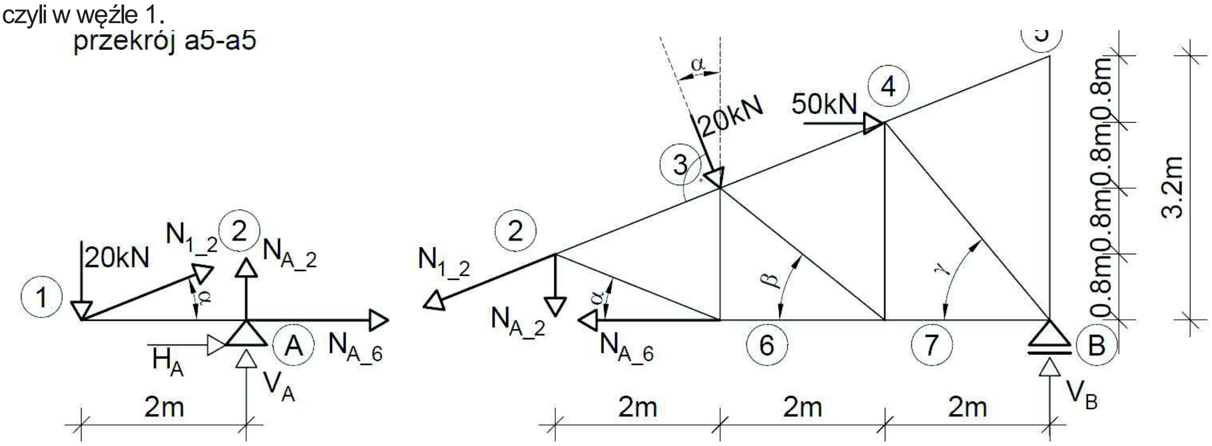
$$N_{7\_B} := \frac{V_B\cdot 2}{2.4} = 17.92$$

W następnych przekrojach wykorzystamy przekroje skośne do policzenia sił w słupkach kratownicy.



Przekrój a5-a5

Zaczynamy obliczenia od siły w słupku N_{A_2} z lewej strony. Składowe sił skośnych oczywiście musimy rozłożyć na kierunki globalne X oraz Y. Zapisujemy równanie momentów względem punktu, który jest przecięciem kierunków dwóch pozostałych sił czyli w węźle 1.



$\Sigma M_1^{L} = 0 \qquad -N_{A\_2}\cdot 2 - V_A\cdot 2 = 0$

$N_{A\_2} := -V_A = -17.066$

$\Sigma M_1^{P} = 0 \qquad N_{A\_2}\cdot 2 - V_B\cdot 8 + 20\sin\alpha\cdot 1.6 + 20\cos\alpha\cdot 4 + 50\cdot 2.4 = 0$

$N_{A\_2} := 4.0\cdot V_B - 40.0\cdot\cos\alpha - 16.0\cdot\sin\alpha - 60.0 = -17.066$

Można także wykorzystać sumę na oś Y, ΣY=0 z lewej lub prawej strony jeżeli znamy pozostałe siły w pasach i $N_{1\_2} = 53.852$

$\Sigma Y^{L} = 0 \qquad N_{A\_2} + V_A - 20 + N_{1\_2}\cdot\sin\alpha = 0$

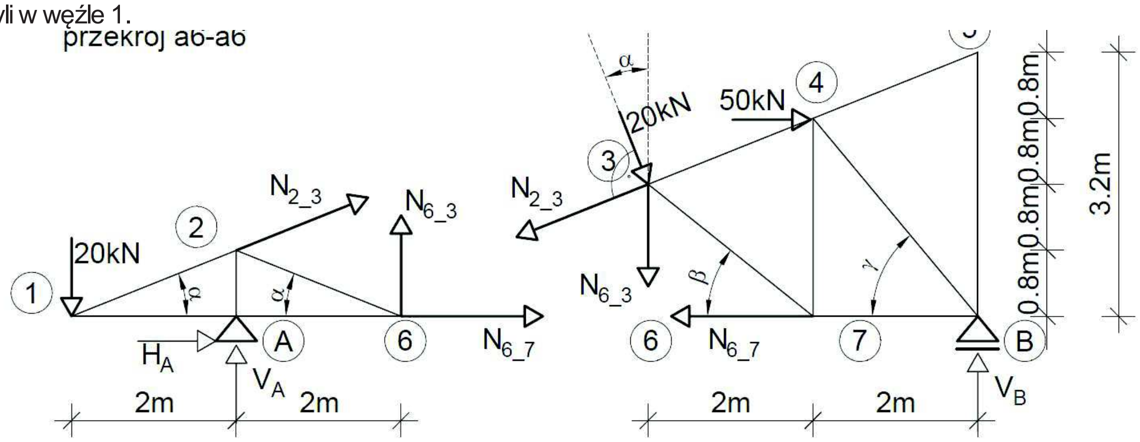
$N_{A\_2} := 20 - N_{1\_2}\cdot\sin\alpha - V_A = -17.066$

$\Sigma Y^{P} = 0 \qquad -N_{A\_2} - N_{1\_2}\cdot\sin\alpha + V_B - 20\cos\alpha = 0$

$N_{A\_2} := V_B - 20\cdot\cos\alpha - N_{1\_2}\cdot\sin\alpha = -17.066$

Przekrój a6-a6

Zaczynamy obliczenia od siły w słupku N_{6_3} z lewej strony. Składowe sił skośnych oczywiście musimy rozłożyć na kierunki globalne X oraz Y. Zapisujemy równanie momentów względem punktu, który jest przecięciem kierunków dwóch pozostałych sił czyli w węźle 1.



$$\Sigma M_1^{L} = 0 \qquad -N_{6\_3}\cdot 4 - V_A\cdot 2 = 0$$

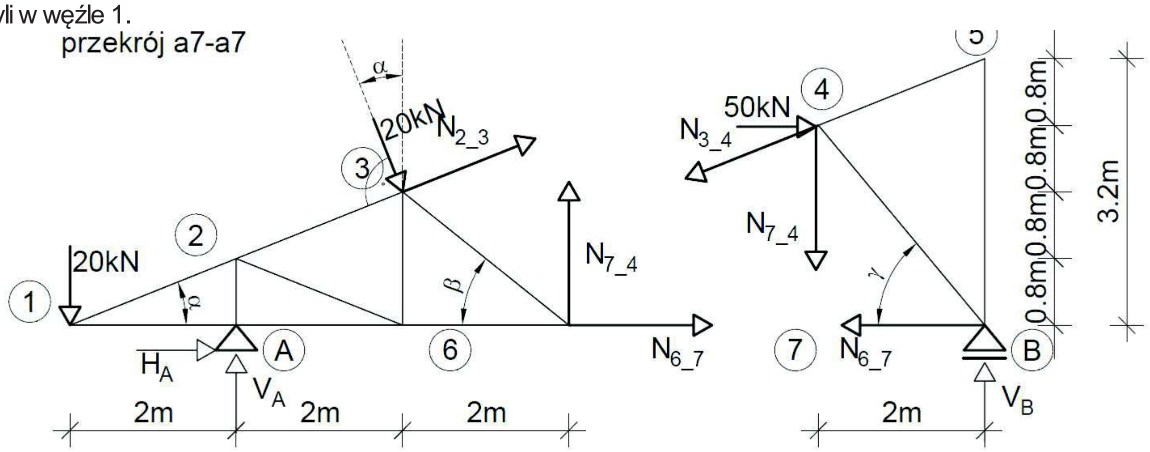
$$N_{6\_3} := -\frac{V_A}{2} = -8.533$$

$$\Sigma M_1^{P} = 0 \qquad N_{A\_2}\cdot 4 - V_B\cdot 8 + 20\sin\alpha\cdot 1.6 + 20\cos\alpha\cdot 4 + 50\cdot 2.4 = 0$$

$$N_{6\_3} := 2.0\cdot V_B - 20.0\cdot\cos\alpha - 8.0\cdot\sin\alpha - 30.0 = -8.533$$

Przekrój a7-a7

Zaczynamy obliczenia od siły w słupku N_{7_4} z lewej strony. Składowe sił skośnych oczywiście musimy rozłożyć na kierunki globalne X oraz Y. Zapisujemy równanie momentów względem punktu, który jest przecięciem kierunków dwóch pozostałych sił czyli w węźle 1.



$$\Sigma M_1^{L} = 0 \qquad -N_{7\_4}\cdot 6 - V_A\cdot 2 + 20\sin\alpha\cdot 1.6 + 20\cos\alpha\cdot 4 = 0$$

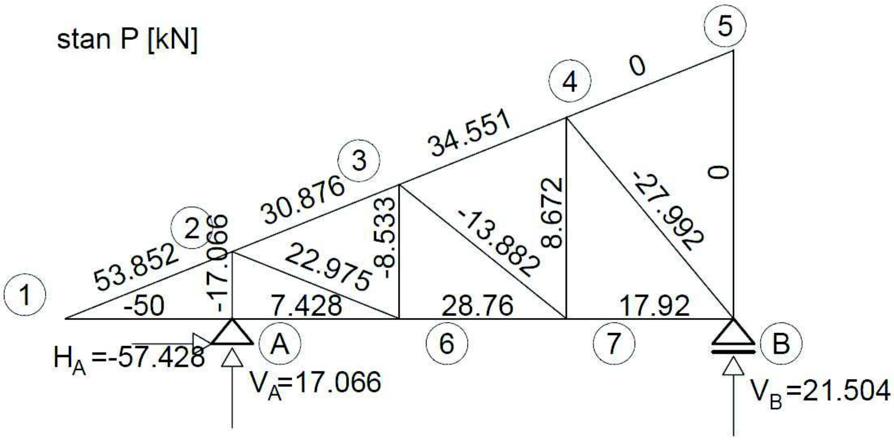
$$N_{7\_4} := \frac{-V_A\cdot 2 + 20\sin\alpha\cdot 1.6 + 20\cos\alpha\cdot 4}{6} = 8.672$$

$$\Sigma M_1^{P} = 0 \qquad N_{7\_4}\cdot 6 - V_B\cdot 8 + 50\cdot 2.4 = 0$$

$$N_{7\_4} := \frac{V_B\cdot 8 - 120}{6} = 8.672$$

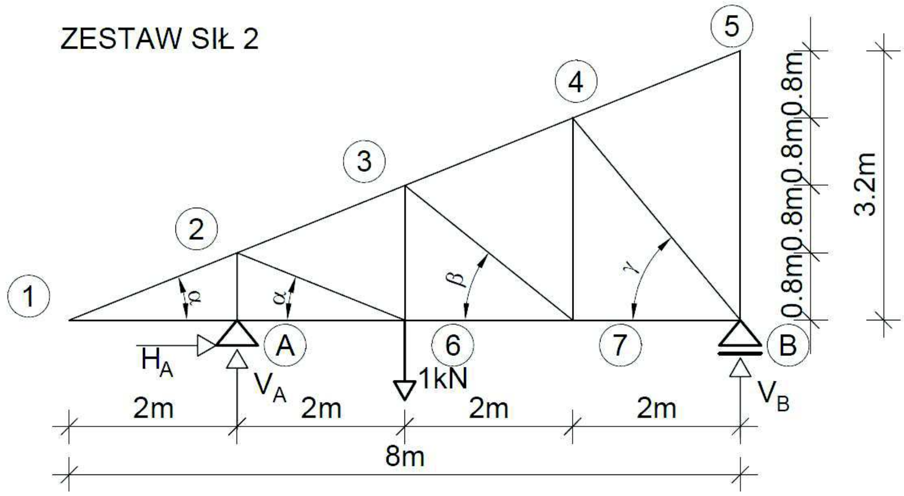
Powyżej przedstawiono 2 sposoby liczenia kratownicy. Można ją liczyć na różne sposoby. Może to być kombinacja tych dwu metod. Poniżej przedstawiono rysunek kratownicy z siłami, które należy **wykonać dla stanu P**

$N_{A\_2} = -17.066$
$N_{2\_6} = 22.975$
$N_{6\_3} = -8.533$
$N_{3\_7} = -13.882$
$N_{7\_4} = 8.672$
$N_{4\_B} = -27.992$
$N_{5\_B} = 0$



$N_{1\_2} = 53.852$
$N_{2\_3} = 30.876$
$N_{3\_4} = 34.551$
$N_{5\_4} = 0$
$N_{1\_A} = -50$
$N_{A\_6} = 7.428$
$N_{6\_7} = 28.76$
$N_{7\_B} = 17.92$

3.1. Wyznaczenie reakcji i sił wewnętrznych w kratownicy dla drugiego zestawu sił
3.1.1. Policzenie reakcji
Do liczenia reakcji wykorzystuje trzy równania równowagi:



$\Sigma X = 0$ - suma składowych sił wzdłuż osi X musi wynosić zero,

$\Sigma Y = 0$ - suma składowych sił wzdłuż osi Y musi wynosić zero

$\Sigma M = 0$ - suma momentów względem dowolnego punktu od sił zewnętrznych mus wynosić zero

Równania do policzenia rekacji

Najpierw wykorzystuejemy sumę rzutów sił na oś X

$\Sigma X = 0$ $\quad 0 + H_A = 0$

$H_A := 0$

Następnie suma rzutów sił na oś Y

$\Sigma Y = 0$ $\quad -1 + V_A + V_B = 0$ tu są dwie niewiadome i nie mogę narazie ich wyznaczyć

Wykorzystuję sumę momentów względem punku A

$\Sigma M_A = 0$ $\quad 1 \cdot 2 - V_B \cdot 6 = 0$

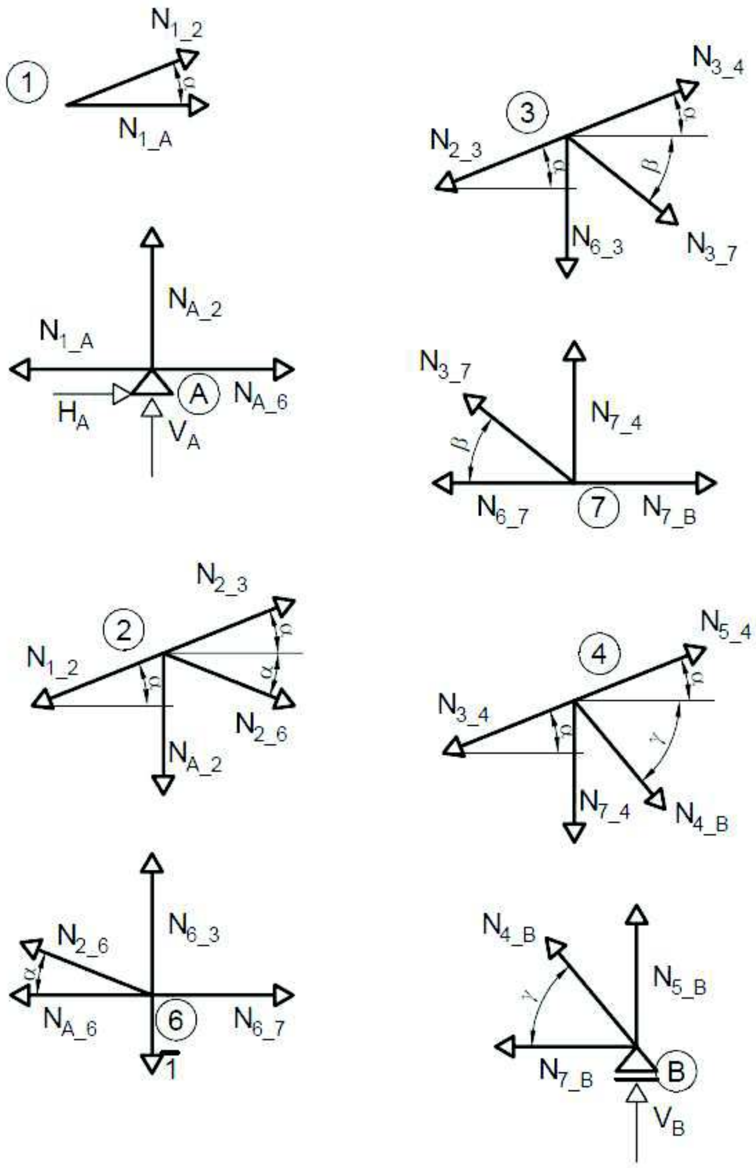
$V_B := \frac{1}{3}$

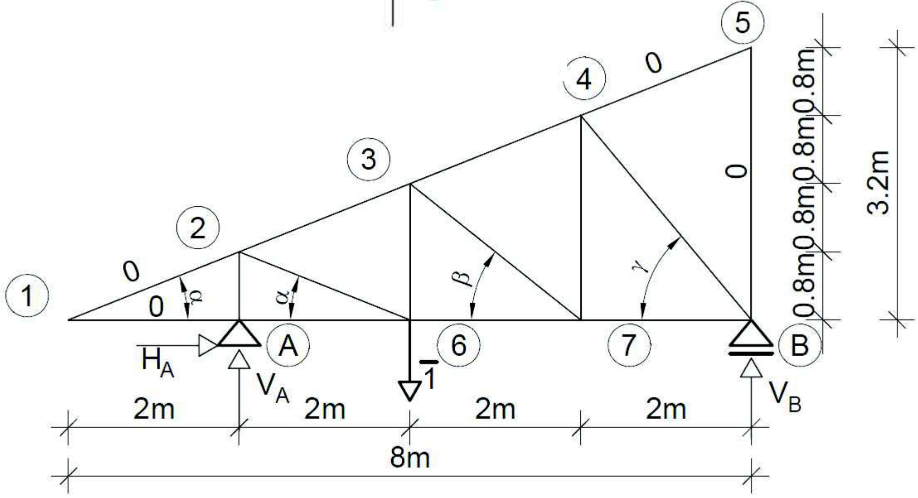
Wracamy do równania na ΣY i podstawiamy

$V_A := 1 - V_B = 0.667$

3.1.2. Wyznaczenie sił wewnętrznych - METODA RÓWNOWAŻENIA WĘZŁÓW

Poniżej schemat z węzłami





Powyżej zaznaczono pręty zerowe, wynika z tego że nie ma potrzeby liczenia równowagi wezłów 1 oraz 5. Poniżej obliczenia pozostałych prętów

$N_{1\_A} := 0$ $N_{5\_4} := 0$

$N_{1\_2} := 0$ $N_{5\_B} := 0$

Węzeł A

$\Sigma X = 0$ $N_{A\_6} + H_A - N_{1\_A} = 0$

$N_{A\_6} := N_{1\_A} - H_A = 0$

$\Sigma Y = 0 \qquad N_{A\_2} + V_A = 0$

$$N_{A\_2} := -V_A = -0.667$$

Węzeł 2

Niestety w tym przypadku mamy układ dwóch równań na wyznaczenie sił

$\Sigma X = 0 \qquad N_{2\_6} \cdot \cos\alpha + N_{2\_3} \cdot \cos\alpha - N_{1\_2} \cdot \cos\alpha = 0$

$$N_{2\_6} = N_{1\_2} - N_{2\_3}$$

$\Sigma Y = 0 \qquad -N_{2\_6} \cdot \sin\alpha + N_{2\_3} \cdot \sin\alpha - N_{1\_2} \cdot \sin\alpha - N_{A\_2} = 0$

$$-\left(N_{1\_2} - N_{2\_3}\right) \cdot \sin\alpha + N_{2\_3} \cdot \sin\alpha - N_{1\_2} \cdot \sin\alpha - N_{A\_2} = 0$$

$$N_{2\_3} := \frac{N_{A\_2} + 2 \cdot N_{1\_2} \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sin\alpha} = -0.898$$

Wracamy do równania ΣX=0

$$N_{2\_6} := N_{1\_2} - N_{2\_3} = 0.898$$

Węzeł 6

$\Sigma X = 0 \qquad -N_{A\_6} - N_{2\_6} \cdot \cos\alpha + N_{6\_7} = 0$

$$N_{6\_7} := N_{A\_6} + N_{2\_6} \cdot \cos\alpha = 0.833$$

$\Sigma Y = 0 \qquad N_{2\_6} \cdot \sin\alpha + N_{6\_3} - 1 = 0$

$$N_{6\_3} := 1 - N_{2\_6} \cdot \sin\alpha = 0.667$$

Węzeł 3

$\Sigma X = 0 \qquad N_{3\_4} \cdot \cos\alpha - N_{2\_3} \cdot \cos\alpha + N_{3\_7} \cdot \cos\beta = 0$

$$\frac{N_{2\_3} \cdot \cos\alpha - N_{3\_7} \cdot \cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$N_{3\_4} = \frac{N_{2\_3} \cdot \cos\alpha - N_{3\_7} \cdot \cos\beta}{\cos\alpha}$$

$\Sigma Y = 0 \qquad -N_{6\_3} - N_{2\_3} \cdot \sin\alpha + N_{3\_4} \cdot \sin\alpha - N_{3\_7} \cdot \sin\beta = 0$

$$-N_{6\_3} - N_{2\_3} \cdot \sin\alpha + \frac{N_{2\_3} \cdot \cos\alpha - N_{3\_7} \cdot \cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha - N_{3\_7} \cdot \sin\beta = 0$$

$$N_{3\_7} := -\frac{N_{6\_3}}{\sin\beta + \dfrac{\cos\beta \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha}} = -0.711$$

Wracamy do równania ΣX=0

$$N_{3\_4} := \frac{N_{2\_3} \cdot \cos\alpha - N_{3\_7} \cdot \cos\beta}{\cos\alpha} = -0.299$$

Węzeł 7

$\Sigma X = 0 \qquad -N_{6\_7} - N_{3\_7} \cdot \cos\beta + N_{7\_B} = 0$

$$N_{7\_B} := N_{6\_7} + N_{3\_7} \cdot \cos\beta = 0.278$$

$\Sigma Y = 0 \qquad N_{3\_7} \cdot \sin\beta + N_{7\_4} = 0$

$$N_{7\_4} := -\left(N_{3\_7} \cdot \sin\beta\right) = 0.444$$

Węzeł 4

Tutaj już wiemy że

$N_{5\_4}=0$

$\Sigma X = 0 \qquad -N_{3\_4} \cdot \cos\alpha + N_{5\_4} \cdot \cos\alpha + N_{4\_B} \cdot \cos\gamma = 0$

$$N_{4\_B} := -\frac{N_{5\_4} \cdot \cos\alpha - N_{3\_4} \cdot \cos\alpha}{\cos\gamma} = -0.434$$

$\Sigma Y = 0 \qquad -N_{7\_4} - N_{3\_4} \cdot \sin\alpha + N_{5\_4} \cdot \sin\alpha - N_{4\_B} \cdot \sin\gamma = 0$

$$N_{4\_B} := -\frac{N_{7\_4} + N_{3\_4} \cdot \sin\alpha - N_{5\_4} \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = -0.434$$

Jak widzimy z jednego i z drugiego równania wyszło to samo, czyli wykonalismy sprawdzenie. Jeszcze dodatkowo możemy sprawdzić węzeł B

Zakończyliśmy wyznaczanie sił pierwszą metodą - **RÓWNOWAŻENIA WĘZŁÓW -** poniżej rysunek z siłami wewnętrznymi.

$N_{A\_2} = -0.667$

$N_{2\_6} = 0.898$

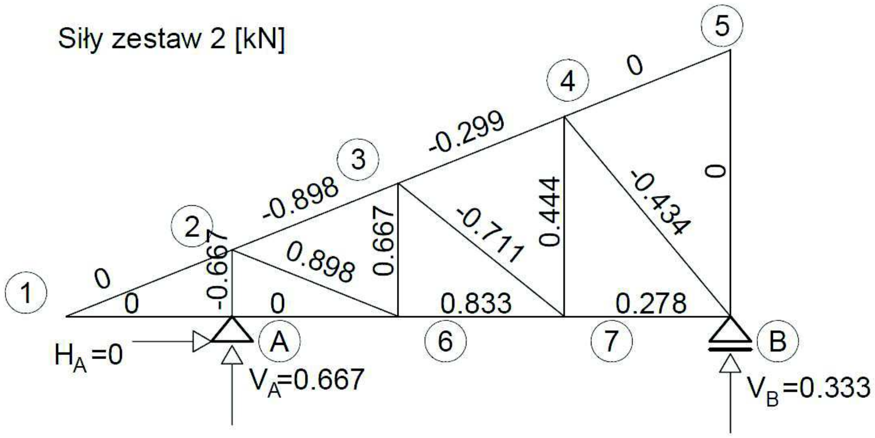
$N_{6\_3} = 0.667$

$N_{3\_7} = -0.711$

$N_{7\_4} = 0.444$

$N_{4\_B} = -0.434$

$N_{5\_B} = 0$



$N_{1\_2} = 0$

$N_{2\_3} = -0.898$

$N_{3\_4} = -0.299$

$N_{5\_4} = 0$

$N_{1\_A} = 0$

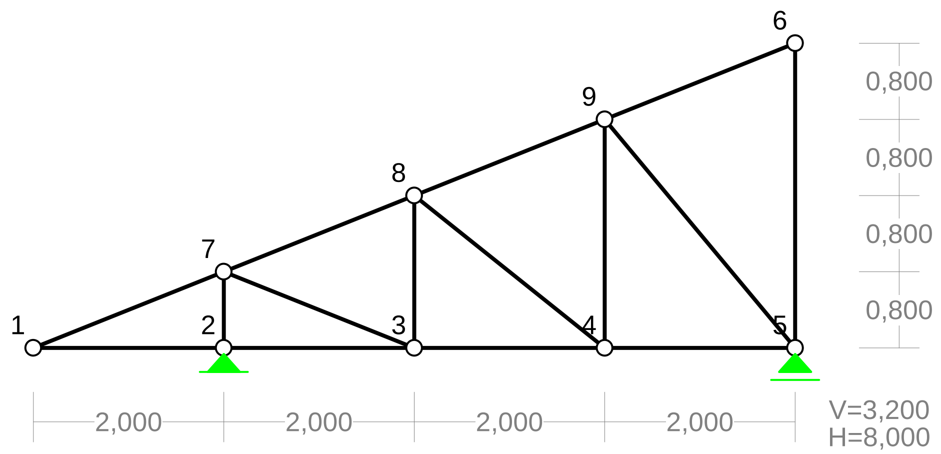
$N_{A\_6} = 0$

$N_{6\_7} = 0.833$

$N_{7\_B} = 0.278$

Wyniki z programu RM-WIN

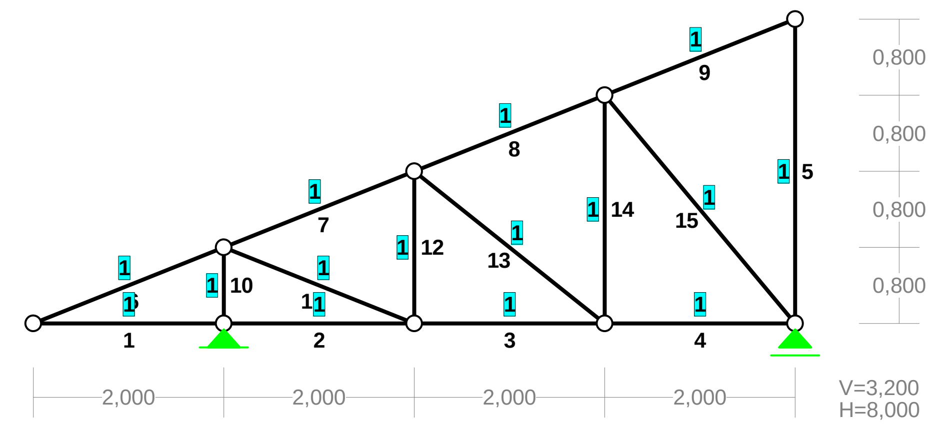
WĘZŁY:



WĘZŁY:

Nr:	X [m]:	Y [m]:	Nr:	X [m]:	Y [m]:
1	0,000	0,000	6	8,000	3,200
2	2,000	0,000	7	2,000	0,800
3	4,000	0,000	8	4,000	1,600
4	6,000	0,000	9	6,000	2,400
5	8,000	0,000			

PRZEKROJE PRĘTÓW:



PRĘTY UKŁADU:

Typy prętów: 00 - sztyw.-sztyw.; 01 - sztyw.-przegub;
10 - przegub-sztyw.; 11 - przegub-przegub
22 - cięgno

Pręt:	Typ:	A:	B:	Lx[m]:	Ly[m]:	L[m]:	Red.EJ:	Przekrój:
1	11	1	2	2,000	0,000	2,000	1,000	1 R 60x6
2	11	2	3	2,000	0,000	2,000	1,000	1 R 60x6
3	11	3	4	2,000	0,000	2,000	1,000	1 R 60x6
4	11	4	5	2,000	0,000	2,000	1,000	1 R 60x6
5	11	5	6	0,000	3,200	3,200	1,000	1 R 60x6
6	11	1	7	2,000	0,800	2,154	1,000	1 R 60x6
7	11	7	8	2,000	0,800	2,154	1,000	1 R 60x6
8	11	8	9	2,000	0,800	2,154	1,000	1 R 60x6
9	11	9	6	2,000	0,800	2,154	1,000	1 R 60x6
10	11	2	7	0,000	0,800	0,800	1,000	1 R 60x6
11	11	7	3	2,000	-0,800	2,154	1,000	1 R 60x6
12	11	3	8	0,000	1,600	1,600	1,000	1 R 60x6
13	11	8	4	2,000	-1,600	2,561	1,000	1 R 60x6
14	11	4	9	0,000	2,400	2,400	1,000	1 R 60x6
15	11	9	5	2,000	-2,400	3,124	1,000	1 R 60x6

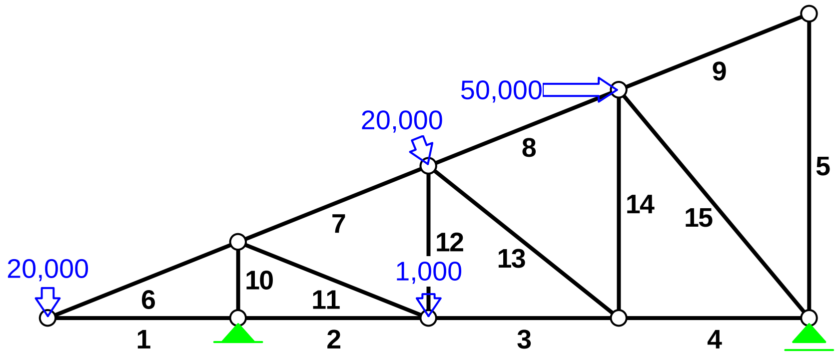
WIELKOŚCI PRZEKROJOWE:

Nr.	A[cm2]	Ix[cm4]	Iy[cm4]	Wg[cm3]	Wd[cm3]	h[cm]	Materiał:
1	10,2	38	38	13	13	6,0	2 Stal St3

STAŁE MATERIAŁOWE:

Materiał:	Moduł E: [N/mm2]	Napręż.gr.: [N/mm2]	AlfaT: [1/K]
2 Stal St3	205000	215,000	1,20E-05

OBCIĄŻENIA:

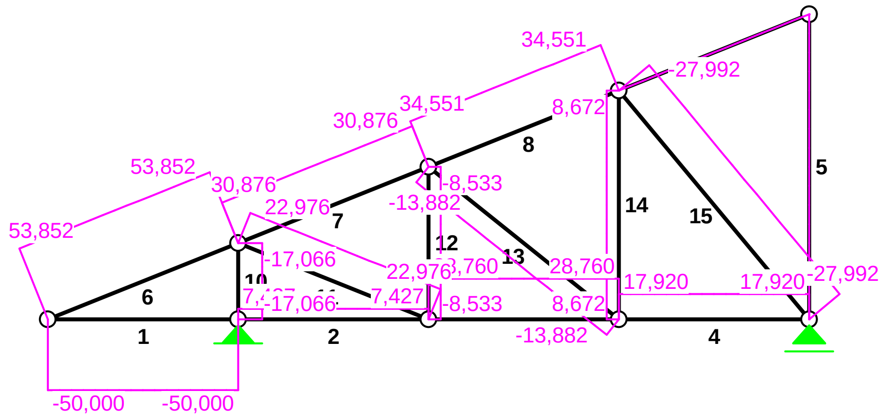


OBCIĄŻENIA: ([kN],[kNm],[kN/m])

Pręt:	Rodzaj:	Kąt:	P1(Tg):	P2(Td):	a[m]:	b[m]:
Grupa: A ""				Zmienne	γf= 1,00	
1	Skupione	0,0	20,000		0,00	
7	Skupione	21,8	20,000		2,15	
8	Skupione	90,0	50,000		2,15	
Grupa: B ""				Zmienne	γf= 1,00	
2	Skupione	0,0	1,000		2,00	

ZESTAW SIŁ 1

NORMALNE:

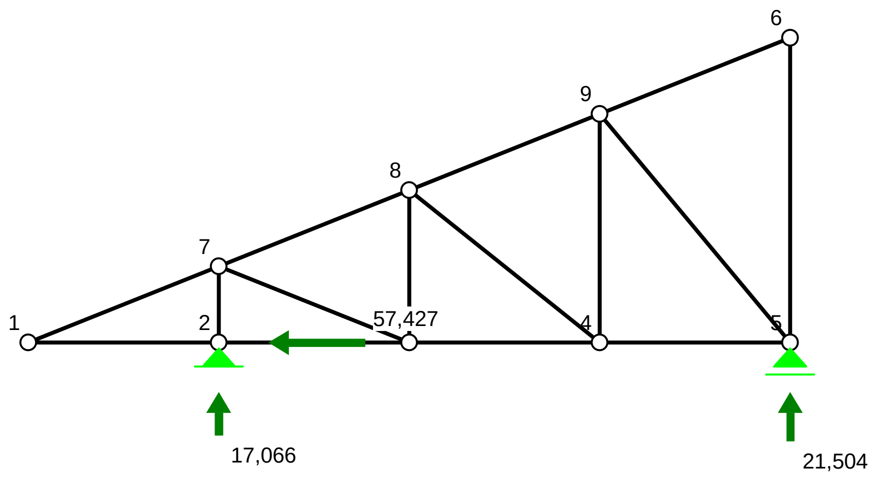


SIŁY PRZEKROJOWE: T.I rzędu
Obciążenia obl.: A

Pręt:	x/L:	x[m]:	M[kNm]:	Q[kN]:	N[kN]:
1	0,00	0,000	0,000	0,000	-50,000
	1,00	2,000	0,000	0,000	-50,000
2	0,00	0,000	0,000	0,000	7,427
	1,00	2,000	0,000	0,000	7,427
3	0,00	0,000	0,000	0,000	28,760
	1,00	2,000	0,000	0,000	28,760
4	0,00	0,000	0,000	0,000	17,920
	1,00	2,000	0,000	0,000	17,920
5	0,00	0,000	0,000	0,000	-0,000
	1,00	3,200	0,000	0,000	-0,000
6	0,00	0,000	0,000	0,000	53,852
	1,00	2,154	0,000	0,000	53,852
7	0,00	0,000	0,000	0,000	30,876
	1,00	2,154	0,000	0,000	30,876
8	0,00	0,000	0,000	0,000	34,551
	1,00	2,154	0,000	0,000	34,551
9	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000
	1,00	2,154	0,000	0,000	0,000
10	0,00	0,000	0,000	0,000	-17,066
	1,00	0,800	0,000	0,000	-17,066
11	0,00	0,000	0,000	0,000	22,976
	1,00	2,154	0,000	0,000	22,976
12	0,00	0,000	0,000	0,000	-8,533
	1,00	1,600	0,000	0,000	-8,533
13	0,00	0,000	0,000	0,000	-13,882
	1,00	2,561	0,000	0,000	-13,882
14	0,00	0,000	0,000	0,000	8,672
	1,00	2,400	0,000	0,000	8,672
15	0,00	0,000	0,000	0,000	-27,992
	1,00	3,124	0,000	0,000	-27,992

* = Wartości ekstremalne

REAKCJE PODPOROWE:

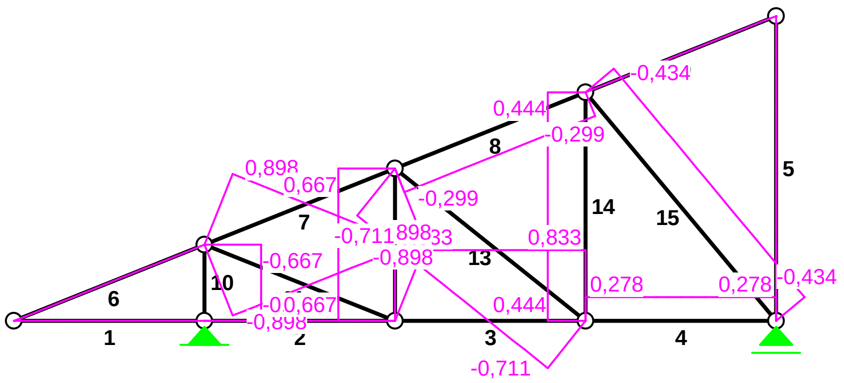


REAKCJE PODPOROWE: T.I rzędu
Obciążenia obl.: A

Węzeł:	H[kN]:	V[kN]:	Wypadkowa[kN]:	M[kNm]:
2	-57,427	17,066	59,909	
5	-0,000	21,504	21,504	

ZESTAW SIŁ 2

NORMALNE:

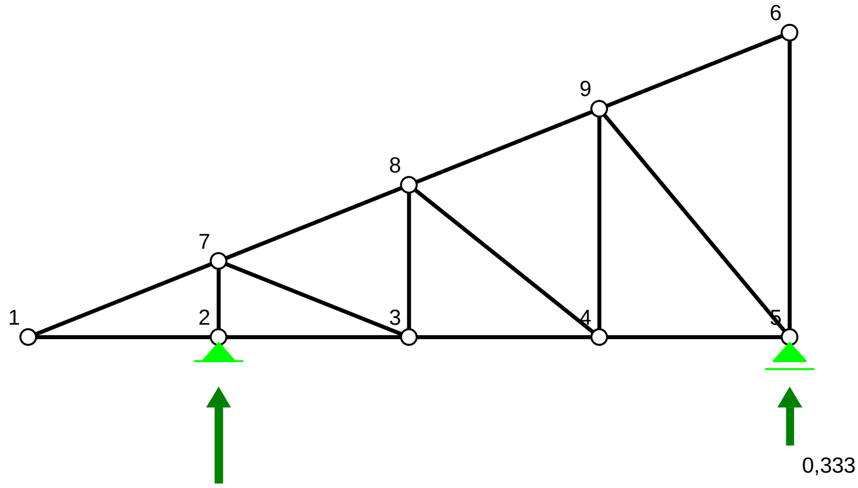


SIŁY PRZEKROJOWE: T.I rzędu
Obciążenia obl.: B

Pręt:	x/L:	x[m]:	M[kNm]:	Q[kN]:	N[kN]:
1	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000
	1,00	2,000	0,000	0,000	0,000
2	0,00	0,000	0,000	0,000	-0,000
	1,00	2,000	0,000	0,000	-0,000
3	0,00	0,000	0,000	0,000	0,833
	1,00	2,000	0,000	0,000	0,833
4	0,00	0,000	0,000	0,000	0,278
	1,00	2,000	0,000	0,000	0,278
5	0,00	0,000	0,000	0,000	-0,000
	1,00	3,200	0,000	0,000	-0,000
6	0,00	0,000	0,000	0,000	-0,000
	1,00	2,154	0,000	0,000	-0,000
7	0,00	0,000	0,000	0,000	-0,898
	1,00	2,154	0,000	0,000	-0,898
8	0,00	0,000	0,000	0,000	-0,299
	1,00	2,154	0,000	0,000	-0,299
9	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000
	1,00	2,154	0,000	0,000	0,000
10	0,00	0,000	0,000	0,000	-0,667
	1,00	0,800	0,000	0,000	-0,667
11	0,00	0,000	0,000	0,000	0,898
	1,00	2,154	0,000	0,000	0,898
12	0,00	0,000	0,000	0,000	0,667
	1,00	1,600	0,000	0,000	0,667
13	0,00	0,000	0,000	0,000	-0,711
	1,00	2,561	0,000	0,000	-0,711
14	0,00	0,000	0,000	0,000	0,444
	1,00	2,400	0,000	0,000	0,444
15	0,00	0,000	0,000	0,000	-0,434
	1,00	3,124	0,000	0,000	-0,434

* = Wartości ekstremalne

REAKCJE PODPOROWE:



REAKCJE PODPOROWE: T.I rzędu
Obciążenia obl.: B

Węzeł:	H[kN]:	V[kN]:	Wypadkowa[kN]:	M[kNm]:
2	0,000	0,667	0,667	
5	0,000	0,333	0,333	